

FRP 바닥판의 휨 해석모델 개발

Simplified Analytical Model for Flexural Response of Fiber Reinforced Plastic Decks

김 영 빈*
Kim, Young-Bin

이 재 홍**
Lee, Jae-Hong

요 약

본 연구에서는 사각형 모듈의 인발성형된 복합재료 바닥판의 휨 거동에 대한 해석 모델을 개발하였다. FRP 바닥판의 해석 모델은 FSDT 평판 이론을 기반으로 임의 적층각을 지닌 FRP 바닥판의 처짐을 예측할 수 있었다. 수치적 예제에서는 네 번이 단순 지지된 등분포 하중을 받는 사각형 모듈의 FRP 바닥판을 2차원 평판 유한 요소해석을 적용하여 수행하였고, 해석 결과에 대해서는 바닥판 길이-높이의 비와 화이버 각도의 변화에 따른 효과에 대해 역점을 두고 다루었다. 연구 결과, 본 연구에서 제안한 해석 모델이 FRP 바닥판의 휨 거동을 해석하고 예측하는데 효과적이고 정확하다는 것이 입증되었다. 또한, FRP 바닥판의 높이가 높아질수록 plate 해석 이론에 있어서 일차전단변형이론(First order Shear Deformable laminated plate Theory : FSDT)이 아닌 고차전단변형(Higher order Shear Deformable plate Theory : HSDT)의 필요성에 대해 언급하였다.

Abstract

An analytical model was developed to investigate the flexural behavior of a pultruded fiber-reinforced plastic deck of rectangular unit module. The model is based on first-order shear deformable plate theory (FSDT), and capable of predicting deflection of the deck of arbitrary laminate stacking sequences. To formulate the problem, two-dimensional plate finite element method is employed. Numerical results are obtained for FRP decks under uniformly-distributed loading, addressing the effects of fiber angle and span-to-height ratio. It is found that the present analytical model is accurate and efficient for solving flexural behavior of FRP decks. Also, as the height of FRP deck plate is higher, the necessity of higher order Shear deformable plate theory(HSDT) is announced, not the FSDT in the plate analysis theory.

키워드 : FRP 바닥판, 인발성형, 고전적층 평판이론, 1차 전단변형이론

Keywords : FRP deck, pultrusion, classical lamination theory, first-order shear deformable plate theory

1. 서 론

최근 FRP(fiber-reinforced plastic)는 교량과 같은 건설 분야에 있어 세계 각국에서 활발히 진행 중에 있다. 이는 교량 바닥판으로서 FRP가 전통적인 재료인 강재 바닥판과 콘크리트 바닥판과 비해 단위 무게당 강도 및 강성이 크고 부식에 대한 높은 저항성으로 유지 관리 측면에서 유리할 뿐만 아니라 기

존 바닥판을 교체함으로써 구조물의 고정 하중을 감소시킬 수 있는 장점을 지니고 있기 때문이다. 이러한 FRP 재료의 현저한 이점으로 인해 미국에서는 연방 도로국과 각 주의 교통국에서 차세대 교량 바닥판으로 인식하여 전폭적인 연구 개발과 시범 시공을 앞 다투어 실시하고 있다. 또한 유럽에서도 유럽 컨소시엄을 형성하여 FRP 바닥판의 연구 개발과 실용화에 중점을 두고 있다. 따라서 FRP 바닥판의 연구 기술은 교량 분야의 첨단 기술로서 새로운 연구 분야로 세계적인 관심의 대상으로 부각 되고 있다.

현재 상업적으로 사용되어질 수 있는 FRP 바닥판은 크게 샌드위치 구조(sandwich construction)와 접

* 정회원, 세종대학교 건축공학과 박사수료
E-mail: kbin13@empal.com
** 정회원, 세종대학교 건축공학과, 부교수
Tel : 02-3408-3287 Fax : 02-3408-3331
E-mail: jhlee@sejong.ac.kr

착제를 붙인 인발 성형된 유형(adhesively bonded pultruded shapes)의 두 가지 형태로 분류되고 있다. 샌드위치 구조는 최소한의 무게로 최대한의 강도를 얻기 위한 항공우주, 자동차, 해양산업에서 널리 사용되어지고 있다. 이 형태는 단단한 표면 시트와 낮은 비중을 가진 코어재료로 구성되어 하나의 바닥판으로 거동하게 되며 다양한 두께와 처짐 제한이 있는 설계에서는 많은 이점이 나타내고 있다. 접착제를 붙인 인발 성형된 유형은 인발 성형된 형태를 접착제를 이용하여 조립하여 사용되어지며, 이러한 형태는 인발성형공법을 이용하여 일정한 단면 형상을 가진 구조재를 경제적으로 제작, 생산할 수 있게 되었다⁴⁾. 이처럼 FRP 바닥판의 제작이 다양해짐에 따라 최근 들어서 많은 연구자들에 의해 FRP 바닥판에 대한 이론 및 실험적인 연구들이 수행되고 있다. Davalos와 Salim²⁾은 일차 전단변형이론을 기반으로 FRP 교량 바닥판 설계를 개발하였고, 또한 정적하중의 다양한 하중 조건에 따른 바닥판에 대해 연구³⁾하였다. 또한, Aref^{4),5)}는 모듈 형태의 FRP 바닥판 시스템의 개발과 FRP 바닥판의 최적 설계에 대해 제안하였다.

FRP 바닥판은 기존 구조 재료와는 달리 해석 방법이 상대적으로 까다로워 대부분의 연구가 범용 유한요소해석 프로그램을 이용하여 연구되어 왔다. 이와 같은 해석 프로그램들은 데이터 입력에 많은 시간과 노력이 필요할 뿐 아니라 많은 자유도(degree of freedom)로 인해 해석시간도 상당히 소요되어 실용적인 접근에 애로 사항이 많았다. 국내에서는 FRP 바닥판 거동에 관한 실험 연구는 다소 수행되었으나 정확한 해석모델에 대한 연구는 미비한 상태이며, 일부 이론 연구들은 모델을 단순화시켜 실제 거동과는 많은 차이를 보이고 있다. 국외에서는 CLT(classical laminated plate theory) 이론을 바탕으로 Aref⁶⁾가 Ritz method을 이용하여 모듈화된 바닥판의 해석 모델을 개발하였으며, 다양한 실험 및 이론 연구가 수행 중에 있다. 이에 본 연구는 FRP 재료를 이용한 바닥판 해석에 있어서 CLT(classical laminated plate theory)와 FSDT(first order shear deformable laminated plate theory)를 이용하여 FRP 바닥판의 구조적 거동을 효과적으로 나타낼 수 있는 단순, 정확한 이론적 평판 해석모델을 개발하고, 범용 유한요소

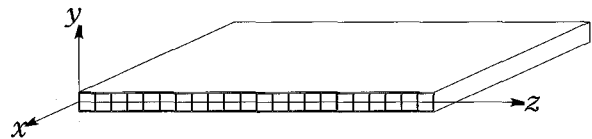
해석프로그램인 ABAQUS⁷⁾의 결과를 비교 분석하여 정확성과 적용성을 입증하고자 한다. 또한, 제안된 해석 모델을 이용하여 임의의 화이버 적층각을 가진 FRP 바닥판의 처짐 및 구조적 거동을 예측하려 한다.

2. 이론 해석 모델

2.1 기본가정

본 연구에서는 FSDT(First-order shear-deformation theory) 이론을 바탕으로 여러 개의 사각형 셀을 연결한 형상의 FRP 바닥판 휨 해석 모델을 개발하는 과정으로 아래와 같은 기본 가정이 사용되었으며, <그림 1>과 같이 직교 좌표계(Cartesian coordinate system)를 사용하였다.

- 1) 국부변형(플랜지-웹 접합부위 등)은 무시되었다.
- 2) 면의 변형률(transverse shear strain)은 두께 방향으로 일정하다.



<그림 1> 직교좌표계(Cartesian coordinate system)

FSDT이론에 근거하여 바닥판의 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다⁸⁾.

$$U(x, y, z) = u(x, y) + z\psi_x(x, y) \tag{1a}$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) + z\psi_y(x, y) \tag{1b}$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) \tag{1c}$$

여기서, u, v, w 는 각각 중립면에서 x, y, z 방향의 변위를 나타내며, ψ_x, ψ_y, ψ_z 는 x, y 방향의 기울기를 나타낸다. 또한, 전단변형(shear deformation)을 고려하지 않는 CLT에서는 $\psi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \psi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 로 나타낼 수 있으며, 기본가정과 변위장에 근거한 변형률은 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \epsilon_x^0 + z\kappa_x \tag{2a}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y^{\circ} + z\chi_y \quad (2b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{\circ} + z\chi_{xy} \quad (2c)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^{\circ} \quad (2d)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{\circ} \quad (2e)$$

여기서 $\epsilon_x^{\circ}, \epsilon_y^{\circ}, \gamma_{xy}^{\circ}$ 은 각각 중립면의 변형률로서 k_x, k_y, k_{xy} 는 곡률을 나타내며, 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon_x^{\circ} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3a)$$

$$\epsilon_y^{\circ} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3b)$$

$$\chi_x = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \quad (3c)$$

$$\chi_y = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \quad (3d)$$

$$\chi_{xy} = \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \quad (3e)$$

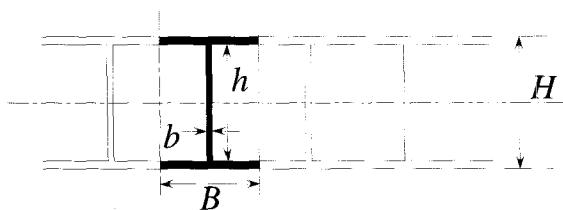
$$\gamma_{xy}^{\circ} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3f)$$

$$\gamma_{yz}^{\circ} = \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi_y \quad (3g)$$

$$\gamma_{xz}^{\circ} = \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x \quad (3h)$$

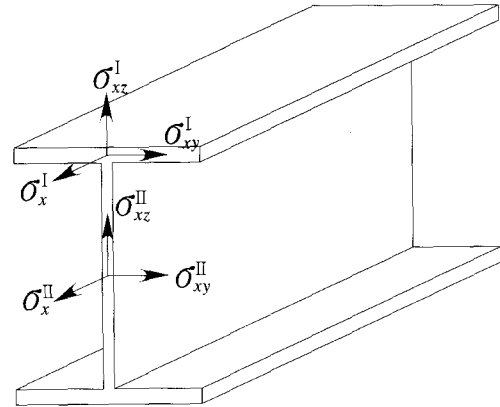
2.2 바닥판의 요소

FRP 바닥판의 해석 모델을 개발하기 위한 바닥판 단면의 단위 모듈은 반복적인 형태로서 <그림 2>와 같이 주어진다. 바닥판의 단면은 상·하부 플랜지 부분과 웹 부분으로 분리하여 표현할 수 있으며, x 축에 대해 수직인 대표요소에 작용하는 응력 벡터(tractions)는 <그림 3>과 같이 나타낼 수 있다.



B : y 방향에 대한 폭, H : 바닥판의 두께
 b : 플랜지와 웹의 두께, h : 웹의 높이

<그림 2> 바닥판의 요소



<그림 3> x 축에 수직인 대표요소의 단면에 작용하는 응력벡터

2.3 Lamina 구성방정식

2.3.1 상·하부 플랜지 (Segment I)

플랜지에서는 $x-y$ 평면에 대해 평면응력(plane stress)상태이며, 적층판의 k 번째 층의 구성방정식은 다음과 같다⁹⁾.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^I \\ \sigma_y^I \\ \sigma_{xy}^I \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{\circ} + z\chi_x \\ \epsilon_y^{\circ} + z\chi_y \\ \gamma_y^{\circ} + z\chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

추가적으로, 면의 전단응력과 전단변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^I \\ \sigma_{xz}^I \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

위 식에서 $|\bar{Q}|^k$ 는 k 번째층의 축소된 변형 강성(reduced transformed stiffnesses)을 나타내며 이 값은 각 층이 가지고 있는 재료의 물성치^{9),10)}로 이루어져 있다.

2.3.2 웹 (Segment II)

웹에서는 $x-z$ 평면에 대하여 평면응력상태이며 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^H \\ \sigma_z^H \\ \sigma_{xz}^H \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* + z\chi_x \\ \varepsilon_z^* \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

일반적으로, z방향은 바닥판의 두께방향이며 이 방향의 변형률 $\varepsilon_z^* = 0$ 의 가정으로부터 식(6)은 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^H \\ \sigma_{xz}^H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* + z\chi_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

추가적으로 면외 전단응력과 전단변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^H \\ \sigma_{xy}^H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy}^* + z\chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

2.4 Laminate 구성방정식

x축 방향의 면내력 N_x 는 상·하부 플랜지에 작용하는 축력 N_x^I 과 웹에 작용하는 축력 N_x^H 의 합력으로 다음과 같이 주어진다.

$$N_x = N_x^I + N_x^H \quad (9)$$

여기서, N_x^H 는 일반적으로 CLT 가정에 의한 식으로 주어지며 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$N_x^H = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x^I dz \quad (10)$$

식(10)과 식(4)를 이용하여 위 식은 다음과 같이 정의된다.

$$N_x^H = A_{11}^I \varepsilon_x^* + A_{12}^I \varepsilon_y^* + A_{16}^I \gamma_{xy}^* + B_{11}^I \chi_x + B_{12}^I \chi_y + B_{16}^I \chi_{xy} \quad (11)$$

여기서, A_{ij}^I, B_{ij}^I 는 각각 축방향, 연계 강성을 나타내며 다음과 같이 나타낼 수 있다¹¹⁾.

$$A_{ij}^I = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{Q}_{ij}^k dz = \sum_{k=1}^{n_I} \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \quad (12a)$$

$$B_{ij}^I = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{Q}_{ij}^k dz = \sum_{k=1}^{n_I} \frac{1}{2} \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (12b)$$

식(12)에서 n_I 은 상·하부 플랜지의 적층된 전체 플라이 개수를 나타낸다. 반면에, N_x^H 는 <그림 3>의 웹의 단면적에 대해 σ_x^H 를 적분하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_x^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_x^H dy dz \quad (13)$$

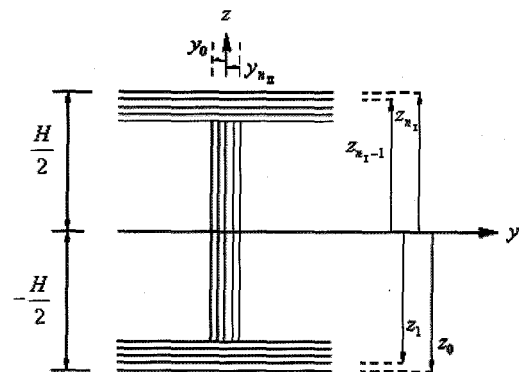
식(13)에 식(6)을 대입하여, ε_x^* 과 γ_{xz} 가 z에 대한 함수가 아니라고 가정하면 N_x^H 는 다음과 같다.

$$N_x^H = A_{11}^H \varepsilon_x^* + A_{16}^H \gamma_{xz} \quad (14)$$

여기서, A_{11}^H, A_{16}^H 은 웹의 축방향 강성으로서 다음과 같이 정의되며, 식(15)에서 n_{II} 은 <그림 4>에서 볼 수 있듯이 웹의 적층된 전체 플라이 개수를 나타낸다.

$$A_{11}^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \bar{Q}_{11}^H dy dz = \frac{h}{B} \sum_{k=1}^{n_{II}} \bar{Q}_{11}^k (y_k - y_{k-1}) \quad (15a)$$

$$A_{16}^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \bar{Q}_{16}^H dy dz = \frac{h}{B} \sum_{k=1}^{n_{II}} \bar{Q}_{16}^k (y_k - y_{k-1}) \quad (15b)$$



<그림 4> FRP 바닥판의 적층된 요소의 좌표

N_x^H 와 동일한 방법으로 다른 면내력과 모멘트, 전단력을 유도하면 다음과 같이 정의된다.

$$N_y^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_y^H dy dz \quad (16a)$$

$$N_{xy}^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xy}^H dy dz \quad (16b)$$

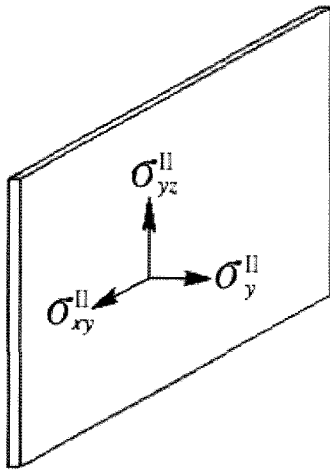
$$M_x^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_x^H z dy dz \quad (16c)$$

$$M_y^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_y^H z dy dz \quad (16d)$$

$$M_{xy}^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xy}^H z dy dz \quad (16f)$$

$$Q_{yz}^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{yz}^H dy dz \quad (16g)$$

$$Q_{xz}^H = \frac{1}{B} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xz}^H dy dz \quad (16h)$$



〈그림 5〉 y축에 수직인 대표요소의 단면에 작용하는 응력벡터

y축 방향에 작용하는 응력은 그림 5와 같으며, σ_y 는 횡방향의 수직 응력으로서 웹에 작용하는 값이 극히 미소하여 무시할 수 있다. 따라서 $N_y = M_y = 0$ 로 정의된다. 다른 면내력, 모멘트, 전단력에 대해서

는 식(16)에 식(7)과 식(8)을 대입하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_{xy}^H = A_{45}^H \gamma_{yz} + A_{55}^H \gamma_{xy} \quad (17a)$$

$$M_x^H = \frac{h^2}{12} A_{11}^H \chi_x \quad (17b)$$

$$M_{xy}^H = \frac{h^2}{12} A_{55}^H \chi_{xy} \quad (17c)$$

$$Q_{yz}^H = A_{44}^H \gamma_{yz} + A_{45}^H \gamma_{xy} \quad (17d)$$

$$Q_{xz}^H = A_{16}^H \epsilon_x + A_{66}^H \gamma_{xz} \quad (17e)$$

여기서,

$$(A_{44}^H, A_{55}^H, A_{45}^H, A_{66}^H) \quad (18)$$

$$= \frac{h}{B} \sum_{k=1}^{n_H} (\bar{Q}_{44}^k, \bar{Q}_{55}^k, \bar{Q}_{45}^k, \bar{Q}_{66}^k) (y_k - y_{k-1})$$

따라서 적층된 FRP 바닥판의 구성 방정식은 상하부 플랜지와 웹의 면내력, 모멘트, 전단력 등을 모든 변형률에 대한 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & A_{16}^H \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & A_{45}^H & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & A_{44} & A_{45} \\ \text{sym} & & & & & & & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{11}^I + A_{11}^H, & A_{66} &= A_{66}^I + A_{55}^H \\ D_{11} &= D_{11}^I + \frac{h^2}{12} A_{11}^H, & D_{66} &= D_{66}^I + \frac{h^2}{12} A_{55}^H \\ A_{44} &= A_{44}^I + A_{44}^H, & A_{55} &= A_{55}^I + A_{66}^H \end{aligned} \quad (20)$$

다른 강성들에 대해서는 다음과 같이 정의된다.

$$A_{ij} = A_{ij}^I, \quad B_{ij} = B_{ij}^I, \quad D_{ij} = D_{ij}^I \quad (21)$$

위에서 보는 것과 같이 FRP 바닥판 DECK의 플랜지와 웹 각각의 구성방정식을 통하여 적층된 FRP 바닥판의 구성방정식 즉, A·B·D relation을 유도하였으며, 이 때 산정되는 A·B·D relation은 복합재료 역학에서 일반적으로 사용되는 A·B·D relation의 값과는 확연히 다른 형태를 나타내는 것을 알 수 있다. 그리고 식 (19)를 보면, 면내력 N_x, N_{xy} 와 전단 변형률 γ_{yz}, γ_{xz} 와 관계에서 A_{16}^I, A_{45}^I 의 연계 강성으로 인한 값이 존재하는 것을 볼 수 있다. 그러나 이 연계 강성들은 바닥판의 웹 적층각이 역대칭 앵글 플라이(antisymmetric angle ply)이거나 균형 대칭(balanced symmetric)일 때 거의 미소하거나 없으므로 무시할 수 있다. 또한, 식(20)에서 $A_{44}^I, A_{44}^I, A_{55}^I, A_{55}^I$ 에 대한 전단보정계수(shear correction factor)값은 FRP 재료의 경우 재료의 물성과 형태에 따라 변화하나, 등방성(isotropic)재료에 대한 값인 5/6로 가정하였다.

2.5 지배방정식

해석모델의 지배방정식은 일반적인 FSDT모델의 방정식과 동일하며 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{22a}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \tag{22b}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0 \tag{22c}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_{yz} = 0 \tag{22d}$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = 0 \tag{22e}$$

위 식으로부터 CLT의 경우 식(23)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{23a}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \tag{23b}$$

$$\partial^2 \frac{M_x}{\partial x^2} + 2\partial^2 \frac{M_{xy}}{\partial x \partial y} + \partial^2 \frac{M_y}{\partial y^2} + q = 0 \tag{23c}$$

3. Navier's 방법

본 해석 모델의 정확성을 알아보기 위해 Navier's 방법을 이용하여 CLT와 FSDT에 대해 각각 구하여 비교하였다. FRP 바닥판은 네 변의 길이가 같고 지지조건은 단순 지지된 것으로 가정하였으며, 바닥판의 적층각은 균형 대칭이 되도록 함으로서 연계강성을 없게 하였다($B_{ij} = A_{16}^I = A_{45}^I = 0$)

3.1 CLT

등분포하중 q_0 를 받고 네 변의 경계조건이 단순 지지된 바닥판의 처짐은 다음과 같이 나타낼 수 있다⁹⁾.

$$w(x, y) = \sum \sum W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{24}$$

($m, n = 1, 3, 5, \dots$)

여기서,

$$W_{mn} = \frac{Q_{mn}}{d_{mn}} \tag{25a}$$

$$Q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}, (m, n = 1, 3, 5, \dots) \tag{25b}$$

$$d_{mn} = D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \tag{25c}$$

3.2 FSDT

FSDT이론을 사용한 등분포하중을 받고 네 변이 단순 지지된 바닥판의 처짐은 다음과 같다¹¹⁾.

$$w(x, y) = \sum \sum W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{26}$$

($m, n = 1, 3, 5, \dots$)

여기서,

$$W_{mn} = \frac{Q_{mn}(K_{22}K_{33} - K_{23}^2)}{K_{11}K_{22}K_{33} + 2K_{12}K_{13}K_{23} - K_{11}K_{23}^2 - K_{33}K_{12}^2 - K_{22}K_{13}^2} \tag{27a}$$

$$Q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2} \tag{27b}$$

$$K_{11} = A_{55} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + A_{44} \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \quad (27c)$$

$$K_{12} = A_{55} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \quad (27d)$$

$$K_{13} = A_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \quad (27e)$$

$$K_{22} = D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + A_{55} \quad (27f)$$

$$K_{23} = (D_{12} + D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \quad (27g)$$

$$K_{33} = D_{66} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + A_{44} \quad (27h)$$

4. 유한요소 해석모델

이 전장에서 제시한 Navier's 방법은 네 변 모두 단순지지 조건이어야 하는 제한을 두고 있다. 따라서 일반적으로 서로 다른 지지조건하의 지배 방정식을 풀기 위해 본 연구에서는 FSDT 이론을 기반으로 해석모델을 개발하였다. 유한요소 해석 모델은 FSDT이론을 기본으로 평판 유한요소 해석법에 의해 모델화 할 수 있으며, 일반화된 변위는 일차원 라그랑지안(Lagrange) 보간함수 ϕ_j^e 로 표현할 수 있다⁹⁾.

$$u = \sum_{j=1}^m u_j \phi_j^e \quad v = \sum_{j=1}^m v_j \phi_j^e \quad w = \sum_{j=1}^n w_j \phi_j^e \quad (28)$$

$$\phi_x = \sum_{j=0}^b S_j^1 \phi_j^e \quad \phi_y = \sum_{j=0}^b S_j^2 \phi_j^e$$

위 식은 지배방정식을 변분의 원리로부터 유도한 식에 대입하여 다음과 같이 유한요소 모델로 나타낼 수 있다.

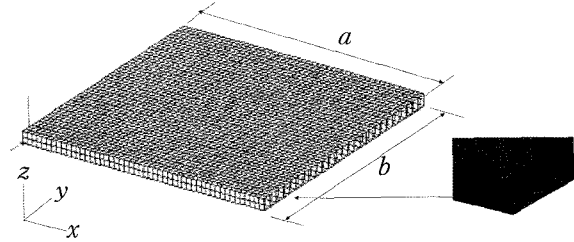
$$[K] \{A\} = \{f\} \quad (29)$$

여기서, $[K]$ 는 요소 강성 매트릭스(elements stiffness matrix)이며, $\{f\}$ 는 요소 벡터이다.

5. 수치해석 결과

본 연구에서 개발한 해석 모델을 검증하기 위해 네 변이 단순 지지된 FRP 바닥판에 등분포 하중을 재하

하여 Navier's 방법과 범용 유한 요소 프래그램인 ABAQUS를 이용하여 중앙에서의 처짐을 비교 분석하였다. ABAQUS 해석⁷⁾에 있어서 FRP 바닥판은 <그림 6>에서 볼 수 있듯이 적층된 복합재료의 플레이트를 쉘 요소로 적용하고, 9-절점(S9R5)으로 사용하였다.

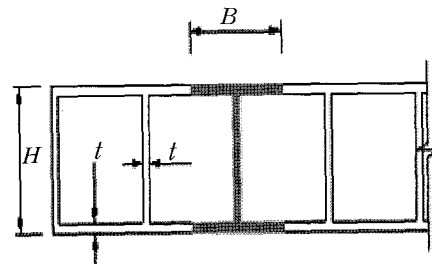


<그림 6> FRP 바닥판의 ABAQUS 유한 요소 모델

FRP 바닥판의 단면 형상은 그림 7과 같으며, 바닥판의 크기 및 높이, 그리고 바닥판의 두께, 웹의 간격은 $a/b = 1$; $B/h = 1$; $t/a = 0.25 \times 10^{-2}$ 로 설정하였다. 그리고 해석을 위한 재료의 물성치는 아래와 같이 가정하였다.

$$E_1 / E_2 = 26, \quad \nu_{12} = 0.3$$

$$G_{12} / E_2 = 0.5, \quad G_{13} / E_2 = 0.5, \quad G_{23} / E_2 = 0.5$$



<그림 7> FRP 바닥판의 단면 형상

편의상, FRP 바닥판의 최대 처짐은 다음과 같이 무차원화하였다.

$$\bar{w} = w \frac{E_2 H^3}{q_0 b^4} \times 10^2 \quad (30)$$

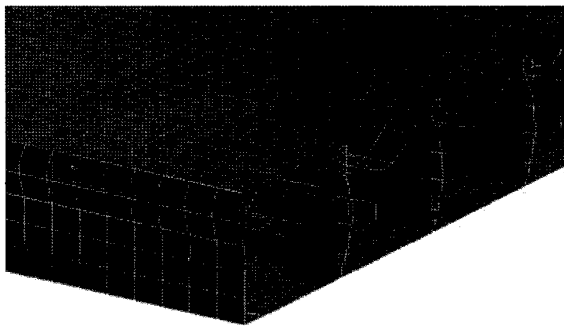
FRP 바닥판의 최대 무차원 처짐은 바닥판 길이-

바닥판 높이의 비(a/H)에 따라 세 가지 경우에 대해 ABAQUS 해석과 본 연구에서 제안한 해석 모델의 결과 값을 비교하여 <표 1>에 나타내었다.

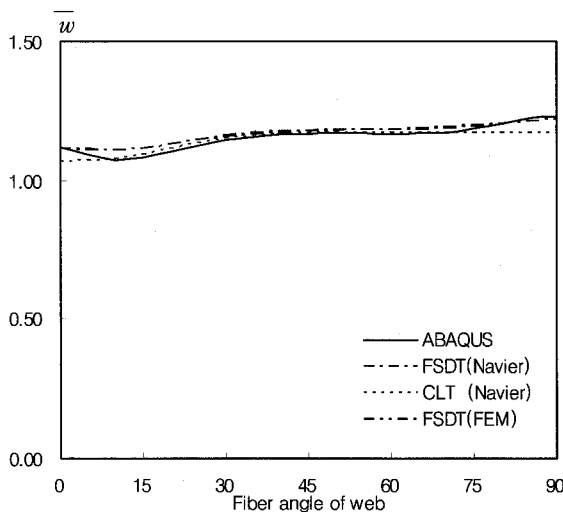
<표 1> 본 연구와 ABAQUS 해석값 비교

a / H	본 연구		ABAQUS
	CLT	FSDT	
50	1.07	1.11	1.12
25	1.76	2.07	2.64
10	3.91	8.05	18.24

해석 결과를 보면 $a/H=50$ 인 경우와 $a/H=25$ 인 경우 즉, 바닥판의 높이가 작을수록 결과 값은 세 경우 모두 거의 유사한 것을 볼 수 있었으며, ABAQUS 해석과 비교하였을 때 CLT 보다 FSDT가



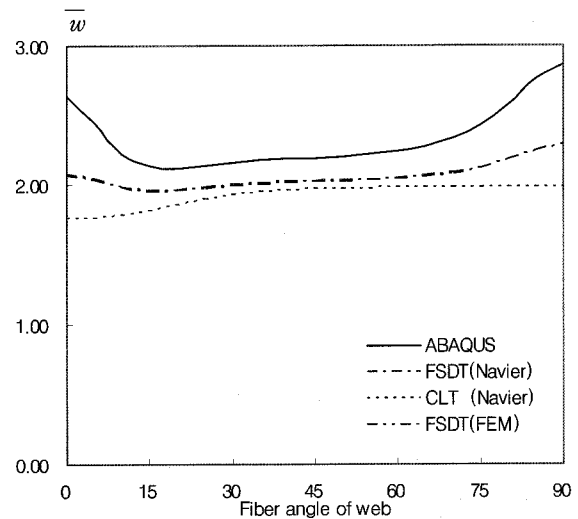
<그림 8> FRP 바닥판의 처짐 형상($a/H=10$ 일 경우)



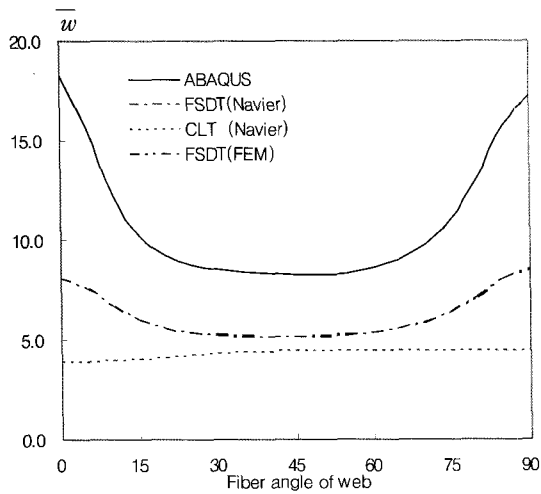
<그림 9> web 적층각을 역대칭 앵글플라이 ($\theta/\theta/-\theta/-\theta$)로 변화할 때의 무차원 처짐($a/H=50$)

좀 더 정확하다는 것을 알 수 있었다. 첫 번째의 경우, 바닥판 길이-바닥판 높이의 비($a/H=50$)가 클수록 FSDT에 의한 결과 값이 ABAQUS의 결과 값에 정확히 일치하는 것을 볼 수 있으며, CLT에 의한 결과 값은 10%의 이내의 오차를 보이고 있다. 반면에, 두 번째 $a/H=25$ 인 경우에는 CLT의 결과 값이 ABAQUS 해석 값보다 현저히 과소평가됨을 알 수 있다. 마지막으로 $a/H=10$ 인 경우에는 Navier's 해석 값이 상당히 작게 나타나는 것을 볼 수 있다. 이것은 그림 8에서 볼 수 있듯이 바닥판 높이가 클수록 웹에서의 처짐 형상이 일차 변형보다는 고차 변형으로 발생되기 때문에 판 요소에서 대한 전단 변형에 의한 처짐이 수직에 의한 처짐에 많은 영향을 끼치므로 처짐이 증가된다. 따라서 바닥판 높이가 높을 경우에는 전단변형을 고려한 고차전단변형 평판이론(higher order shear deformable plate theory)등의 정제된 평판이론(refined plate theory) 적용으로 더욱 정확한 바닥판 해석모델의 개발이 필요한 것이다.

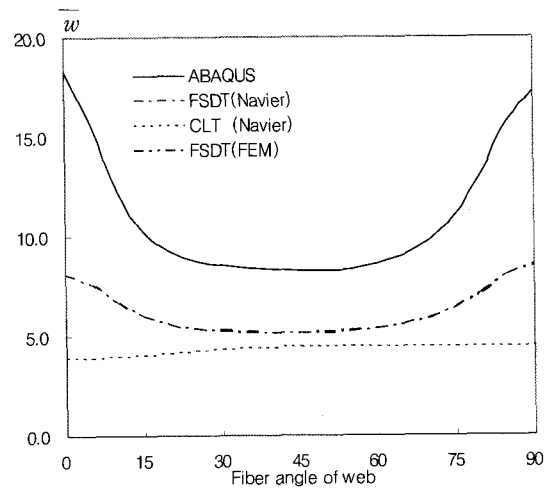
다음 예제에서는 바닥판 화이버 적층각이 변화할 때 휨 거동에 대한 효과를 알아보기 위해 수행하였다. 먼저, 바닥판에서 상·하부 플랜지의 적층각은 고정시키고, 웹의 적층각은 역대칭 앵글 플라이 (antisymmetric angle ply) $[\theta/\theta/-\theta/-\theta]$ 형태로 0



<그림 10> web 적층각을 역대칭 앵글플라이 ($\theta/\theta/-\theta/-\theta$)로 변화할 때의 무차원 처짐($a/H=25$)



〈그림 11〉 web 적층각을 역대칭 앵글플라이 (0/0/-θ/-θ)로 변화할 때의 무차원 처짐(a/H=10)



〈그림 12〉 web과 하부 flange의 적층각을 역대칭 앵글 플라이(0/0/-θ/-θ)로 변화할 때의 무차원 처짐(a/H=25)

도에서 90까지 변화하였다. 그림 9~11은 화이버 각도 변화에 따른 최대 무차원 처짐에 대한 결과를 비교한 것이다. 해석 결과, 바닥판 길이-바닥판 높이의 비가 클수록 세 가지 경우의 해석 값이 거의 일치하였다. 또한, 웨브의 적층각 변화에 따른 처짐의 변화는 별로 없는데 이는 FRP 바닥판 웨브의 적층각 변화에 따른 강성 변화가 바닥판 전체의 처짐에 미치는 영향이 플랜지에 비해 적기 때문이다. 반면에 바닥판 길이-바닥판 높이의 비가 작아질수록 적층각이 0°와 90°일 때 최대 처짐 값을 나타냈고, 적층각이 45°일 때 최소의 결과를 나타내었다. 이것은 웨브의 적층각이 0°와 90°일 때 전단변형이 가장 크게 발생하며, 45°일 때 가장 작게 발생함을 의미한다.

다음 예제는 FRP 바닥판의 구조적 연계(coupling)에 대한 효과와 다른 적층각의 조건에 따른 결과를 보기 위해서 바닥판의 적층각을 비대칭으로 가정하고, 바닥판의 재질 및 단면은 이전의 예제와 동일하게 하였다. 먼저 상부 플랜지의 적층각은 0°로 고정하고 하부 플랜지와 웨브의 적층각은 역대칭 앵글 플라이(antisymmetric angle ply) (0/0/-θ/-θ)로 적층하였다. 바닥판 길이-바닥판 높이의 비(a/H)가 25일 때 최대 무차원 처짐은 <그림 12>와 같으며, 전단 변형을 고려하지 않은 Navier's 방법보다는 본 연구에서 제안한 해석 모델에 대한 유한요소해석이 ABAQUS 해석에 의한 결과 값과 구조적 거동이 더 유사하게 나타나는 것을 볼 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 사각형 모듈을 기본으로 FSDT 평판이론을 도입하여 FRP 바닥판 해석을 위한 유한요소 모델을 개발하였고, 해석모델의 정확성을 입증하기 위해 범용 유한요소 프로그램인 ABAQUS와 비교하여 그 정확성을 입증하였다. 해석 결과, 본 연구에서 제안한 해석 모델은 임의 적층각을 지닌 FRP 바닥판의 처짐을 예측할 수 있을 뿐만 아니라, 화이버의 각도 변화 및 바닥판 길이-높이의 비에 따른 휨 거동에 대한 효과를 알 수 있었다.

본 연구 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 범용 유한요소 해석에 의해 소요되는 많은 시간과 노력에 비해, 개발된 해석모델을 이용한다면 적은 시간과 노력으로도 정확한 휨 해석을 수행할 수 있다.
2. FRP 바닥판의 웨브 적층각이 변화할 때 바닥판 길이-높이(a/H)의 비가 50인 경우에는 ABAQUS와 FSDT에 대한 처짐 값이 매우 정확히 일치하였다. 그리고 CLT의 처짐 값은 전단 변형을 고려하지 않음에 따라 다소 과소평가 되었다.
3. 바닥판 길이-높이의 비가 작을수록 ABAQUS와 본 연구에서 제안한 해석 모델의 처짐 값에서도 오차를 보이고 있다. 따라서 좀 더 정확한 해석을 위해서는 전단변형을 고려한 고차전단

변형 평판이론(higher order shear deformable plate theory)등의 정제된 평판이론(refined plate theory)을 적용한 바닥판 해석모델 개발이 필요하다.

4. 비대칭의 적층각을 지닌 FRP 바닥판에서는 구조적 연계(coupling)가 크게 발생 되므로 Navier 방법으로는 더 이상 해석이 불가능하며 정확한 해석을 위해서는 유한요소해석이 적용되어야 한다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 2002년 건설기술연구개발사업의 “승용차 전용 조립식 고가도로 건설기술 개발” 과제(C102A2000005-02A0200-00510)에 의해 수행되었으며 지원에 감사의 뜻을 표합니다.

참고 문헌

1. C. E. Bakis, “Fiber-Reinforced Polymer Composites for Construction-State of the Art Review.” *Journal of Composite for Construction*, ASCE, Vol. 6, No. 2, 2002
2. H. A. Salim, Julio F. Davalos, Pizhong Qiao & Sam A. Kiger, “Analysis and design of fiber reinforced plastic composite deck-and-stringer bridges.” *Composite structures*, 38, 1997, pp. 295 ~ 307
3. P. Qiao, J. F. Davalos, Brian Brown, "A systematic analysis and design approach for single-span FRP deck/stringer bridges." *Composites, part B*, 31, 2000, pp.593 ~ 609
4. A. J. Aref, I. D. Parsons, "Design optimization procedures for fiber reinforced plastic bridges." *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 125, No. 9, 1999, pp.1040 ~ 1047
5. A. J. Aref, I. D. Parsons, "Design and performance of a modular fiber reinforced plastic bridge." *Composites, part B*, 31, 2000, pp.619 ~ 628
6. A. J. Aref, Sreenivas Alampalli, Yihong He, "Ritz-Based Static Analysis Method for Fiber Reinforced Plastic Rib Core Skew Bridge Superstructure." *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 127, No. 5, 2001
7. *ABAQUS User's Manual*, version 6.3, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. Pawtucket, R.I, 2002
8. J. N. Reddy, *An Introduction to the FINITE ELEMENT METHOD*. McGRAW-Hill International Editions, 1993
9. C. T. Herakovich, *Mechanics of Fibrous Composite*. Jone Wiley & Sons, 1998
10. M. W. Hyer, *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*. McGRAW-Hill, 1998
11. J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates theory and analysis*. CRC press, 1998
12. J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. Jone Wiley & Sons, 2002