

다공성 매질의 내부유동에 관한 섭동해석

성관제^{*}

동국대학교 기계공학과

Perturbation Analysis of Stokes Flow in Porous Medium

Kwanjae Seong^{*}

Dept. of Mechanical Engineering, Dong Guk University

(Received 4 April 2005, Accepted 20 April 2005)

Abstract

In this study, flow in a porous medium is analyzed using a computer-extended perturbation series solution. The flow is modelled as a creeping flow in a periodically constricted channel. The channel walls have a sinusoidally varying width and the flow is analyzed in terms of its vorticity and stream functions in the Stokes flow regime. The perturbation series in terms of a small parameter, average width to length ratio, is extended with a computer resulting in purely asymptotic series and Pade summation is used to obtain final results. Resulting flow shows flow separations in the widening section and immobile zones in the widest section of the flow regime with reattachment in the narrowing section. Analysis of the flow separation phenomena resulted in a correlation between the two geometric parameters of the channel walls to predict the onset of flow separation in the Stokes flow regime.

keywords : Immobile zone, Perturbation analysis, Pade summation, Porous medium, Slow-variations, Stokes flow

1. 서론

UN보고에 따르면 2025년경에는 약 25억 명의 인구가 물 부족을 겪게 될 것이라고 경고하고 있으며 우리나라도 현재 물 부족 국가로 분류되어 있는 실정이다. 따라서 용수원의 다변화가 필요하며 특히 체계적인 개발 및 관리가 뒷받침될 경우 계절에 상관없이 양질의 수원확보가 가능한 지하수의 사용을 적극 검토하고 있다. 현재 우리나라의 연간 개발 가능한 지하수량은 연간 약 117억 m³이고 이용량은 연간 약 34억 m³으로 파악하고 있다(건설교통부 등, 2003).

지하수는 그 특성상 고갈되면 주변 지역의 지반침하를 일으킬 수도 있고 일단 오염되면 원상회복에 장기간의 기간과 막대한 비용이 소요되며, 특히 층적층은 지표수의 영향을 받는 등 그 유동특성을 파악하는 것이 쉽지는 않다. 한편 지하수를 연구하는 수리학자나 환경화학자들은 일반적으로 그 영역이 광역에 걸쳐있는 지하수유동계에 관점을 맞추고 있다. 즉, 유동이 실제로 일어나는 매질의 간극용적보다 수백만 배 큰 공간에 더 관심이 많을 수밖에 없다. 하지만 지하수유동계를 보다 정확히 파악하기 위해서는 실제 유동장을 형성하는 간극용적에서 일어나는 유동 및 전달현상을 정확히 이해하는 것이 큰 도움이 된다. 특히 열하수나 dead end pore와 같은 곳에서의 확산 및 혼합현상

(Dykaar et al., 1996) 등을 이해하는 데에는 필수적이라고 하겠다.

물론 다공성 매질의 공극공간은 확정형태가 아니고 매우 복잡하고 다양한 형태로 이루어져 있지만 유동의 중요한 현상의 물리적 특성을 정확히 파악하기 위해서는 보다 간단한 형상의 유동장을 해석하는 것이 훨씬 유리하다. Petersen(1958)이 다공성 매질 내부유동의 유효확산계수를 구함에 있어 PCT(periodically constricted tube) 모델을 활용하기 시작한 이후 많은 연구자들이 이와 유사한 연구를 수행하였으나 대부분은 Pozrikidis(1987)나 Hemmat 등(1995)과 같이 수치해석 방법을 사용하였고, 해석적 방법을 사용한 경우는 대부분 점근 급수해를 일부 고차원까지만 사용하여 엄밀하게 수렴범위나 해석적속 등을 고려하지 않았다(Sisavath et al., 2001). 본 연구에서는 지하대수층을 이루는 다공성매질을 통과하는 유동의 특성을 파악하기 위하여 벽의 형상이 사인파형을 이루는 대칭 채널 내부의 스토크스 유동을 섭동해법을 사용하여 해석하였다. 이와 유사한 형상은 암반의 틈새 유동을 해석하는데 사용하기도 한다(Ge et al., 1997). 섭동해는 초기항들로부터 일반항을 유도하여 이를 고차원까지 확장한 후 해석적속을 통해 점근 급수해의 수렴범위를 확대하여 실제와 유사한 형상에 관한 결과를 구했으며 이로부터 유동장의 특성과 특히 벽면에서 전단응력을 통하여 박리현상에 관하여 해석하였다.

^{*} To whom correspondence should be addressed.

seongkj@dongguk.edu

2. 지배방정식과 섭동 해석방법

2.1. 스토크스 유동

Fig. 1은 중심축에 대해 대칭이고 주기가 L , 진폭이 h , 평균폭이 $2H$ 인 사인파형 벽을 가지는 2차원 채널을 나타내며 이를 길이 H 로 무차원하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(x) = 1 + \alpha \sin(\epsilon x) \tag{1}$$

따라서 본 연구에서 사용하는 사인파형의 벽에는 α 와 ϵ , 두 가지 형상계수가 있다. 여기서 α 는 h/H 로 정의되며 채널벽의 변형정도를 나타내는 변수로 $\alpha \ll 1$ 인 경우 평행벽에 비해 slight-variation이 되고, ϵ 은 $2\pi H/L$ 로 정의되며 채널벽의 변형률을 나타내는 변수로 $\epsilon \ll 1$ 인 경우 slow-variation이 된다(Van Dyke, 1987).

본 연구에서는 유동의 박리에 따른 사구역에 대해 알아보기 위하여 충분히 변형된 경우, 즉 $\alpha = O(1)$ 인 경우를 고려할 것이므로 채널벽을 평행벽의 slow-variation으로 취급하여 ϵ 을 확장변수로 하는 섭동해를 구할 것이다. 한편 지하대수층 유동과 같이 $Re \ll 1$ 인 경우 유동 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식에서 관성력 항이 무시된 다음과 같은 스토크스 방정식으로 단순화되며,

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \tag{2}$$

이를 유량 Q 와 폭 H 로 무차원화한 와도 $\omega = \Omega/(Q/H^2)$ 와 유선함수 $\psi = \Psi/Q$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega &= 0 \\ \nabla^2 \psi &= -\omega \end{aligned} \tag{3}$$

지배방정식을 일반적인 스토크스 유동을 나타내는 유선함수의 점조화식, $\nabla^4 \psi = 0$,으로 변환하지 않은 이유는 와도가 벽면에서 전단응력과 비례하므로 박리현상을 관찰하

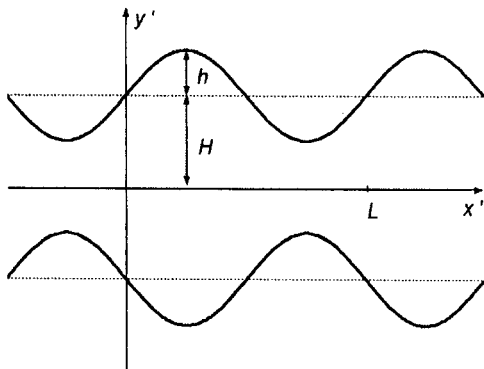


Fig. 1. Shape of sinusoidal channel walls in physical dimensions (x', y') .

는데 유리하기 때문이다. 한편 본 문제의 경계조건인 점착 조건, 대칭조건 및 일정유량조건을 유선함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi(x, Y(x)) &= 1, \quad \psi(x, 0) = 0 \\ \psi_{,y}(x, Y(x)) &= 0, \quad \psi_{,yy}(x, 0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

본 연구에서는 식 (3)과 (4)를 벽의 형상계수 α 를 매개변수로, ϵ 을 섭동해의 확장변수로 택하였다.

2.2. Slow-Variations의 섭동해

채널벽의 사인파형이 축방향으로 변화율이 작다는 가정 ($H \ll L$ 또는 $\epsilon \ll 1$) 아래 x 를 $1/\epsilon$ 만큼 수축한 새로운 변수 $X = \epsilon x$ 로 지배방정식과 경계조건을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \omega_{xx} + \omega_{yy} &= 0 \\ \epsilon^2 \psi_{xx} + \psi_{yy} &= -\omega \\ \psi(X, Y(X)) &= 1, \quad \psi(X, 0) = 0 \\ \psi_{,y}(X, Y(X)) &= 0, \quad \psi_{,yy}(X, 0) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 벽의 형상은

$$Y(X) = 1 + \alpha \sin X \tag{6}$$

이며, 지배방정식 (5)에 ϵ^2 항만 나타나므로 유선함수와 와도를 다음과 같이 ϵ^2 으로 전개하여,

$$\begin{aligned} \omega(X, y, \alpha) &= \omega_0(X, y, \alpha) + \epsilon^2 \omega_1(X, y, \alpha) + \dots \\ \psi(X, y, \alpha) &= \psi_0(X, y, \alpha) + \epsilon^2 \psi_1(X, y, \alpha) + \dots \end{aligned} \tag{7}$$

이를 식 (5)에 대입한 후, ϵ^2 의 동차항끼리 정리하면 $O(1)$ 항의 지배방정식과 경계조건은 다음과 같고,

$$\begin{aligned} \omega_{0,yy} &= 0 \\ \psi_{0,yy} &= -\omega_0 \\ \psi_0(X, Y(X)) &= 1, \quad \psi_0(X, 0) = 0 \\ \psi_{0,y}(X, Y(X)) &= 0, \quad \psi_{0,yy}(X, 0) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$O(\epsilon^{2n})$ 항은 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \omega_{n,yy} &= -\omega_{n-1,XX} \\ \psi_{n,yy} &= -\omega_n - \psi_{n-1,XX} \\ \psi_n(X, Y(X)) &= 0, \quad \psi_n(X, 0) = 0 \\ \psi_{n,y}(X, Y(X)) &= 0, \quad \psi_{n,yy}(X, 0) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

식 (8)에서 $O(1)$ 의 해는 다음과 같다.

$$\omega_0 = 3 \frac{\eta}{Y^2}, \psi_0 = \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3 \quad (10)$$

여기서 $\eta = y/Y(X)$ 로 각 x 지점에서 채널 폭으로 무차원화한 y 변수를 뜻한다. 따라서 $O(1)$ 의 해는 채널의 폭을 기준으로 한 Poiseuille 유동과 동일한 형태가 됨을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 Chow 등(1972)과 Sisavath 등(2001)에서도 확인되었다. 본 연구에서는 고차항까지 체계적으로 전개하기 위하여 $O(\epsilon^6)$ 까지 해를 구하고 이로부터 ω_n 과 ψ_n 을 일반항형태로 표현한 후 이를 지배방정식에 대입하여 와도와 유선함수를 $O(\epsilon^{80})$ 까지 구하였다. 이 급수해의 수렴범위를 분석하기 위해 비울판정법을 적용한 결과 수렴반지름이 영이었으며 이 결과는 Domb-Sykes plot(Van Dyke, 1984)으로도 확인되었다. 즉, 사인파형 벽을 가지는 채널내부의 스토크스 유동의 섭동해는 엄밀한 점근 급수해(purely asymptotic series)로서 ϵ 이 매우 작지 않은 경우에는 각 항을 단순히 합산하는 것은 당연히 발산하게 되며 보다 정확한 결과를 얻기 위해서 해석적 접속 효과가 있는 Pade Summation (Van Dyke, 1984)을 사용해야 한다. 본 연구에서는 Pade Summation을 통해 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

2.3. 벽면전단응력 및 사구역의 크기

Poiseuille 유동의 전단응력인 $\tau_{w,(Pois)} = 3\mu(Q/H^2)$ 로 무차원화한 사인파형 벽면에서 전단응력은 뉴턴유체의 전단응력 텐서 $T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$ 와 단위벡터 \hat{s} 와 \hat{n} 을 사용하면 다음과 같다.

$$\tau_w = (\hat{s} \cdot \mathbf{T} \hat{n})_{y=Y} = \frac{1}{3} \omega(X, Y(X)) \quad (11)$$

벽면에서 박리가 일어나면 전단응력이 영이 될 것이며 이후 재부착이 되기까지 사구역에서는 음의 값이 될 것이다. 따라서 본 연구에서는 벽면에서 와도 값을 분석하여 사구역의 생성 및 그 크기를 연구하였다.

본 연구에서는 벽면의 진폭이 작은 경우 ($\alpha < 1$)부터 비교적 큰 경우 ($\alpha \sim 1$)까지 여러 α 값에 대해 벽면에서 전단응력이 양에서 음으로, 그리고 다시 음에서 양으로 부호가 변하는 구역을 집중적으로 관찰하였다. 전단응력이 음이 되어 사구역이 존재하는 경우에는 사구역의 크기를 박리점에서 재부착점까지 유동방향의 길이와 채널의 폭이 가장 큰 곳에서 벽면에서부터 사구역과 주 유동을 분리하는 유선까지의 길이를 조사하여 사구역의 크기를 연구하였다. 이 결과는 앞에서 언급한대로 벽면에서 일어나는 물질전달 현상과 관련하여 큰 영향을 미치는 한 인자로 작용할 것이다.

3. 결과 및 고찰

본 연구는 벽면이 사인파형인 2차원 채널 내부의 스토크스 유동에 대한 섭동급수해를 구한 후 유선함수와 와도를 해석하여 벽면전단응력과 사구역의 생성 및 그 크기에 대해 $-\pi/2 \leq X \leq 3\pi/2$ 구역에서 그 특성을 파악하였다. 유동장은 스토크스 유동의 특성에 따라 $X = \pi/2$ 를 기준으로 상·하류에서 대칭인 결과를 보였다. 따라서 본 연구에서는 대칭점 ($X = \pi/2$)의 상류유역 ($-\pi/2 < X < \pi/2$)에 대해 해석하고 하류유역에 대해서는 대칭인 결과를 제시하였다.

3.1. 벽면 전단응력과 박리현상

Fig. 2(a)에 채널의 형상계수가 각각 $\alpha = 0.5, \epsilon = 1.0$ 인 경우 채널 폭이 최소인 목부분 ($X = -\pi/2$), 최대인 곳 ($X = \pi/2$)과 벽면기울기가 최대인 중간위치 ($X = 0$)에서 축방향 속도성분 분포를 나타내었고, Fig. 2(b)에 $-\pi/2 < X < \pi/2$ 구간에서 벽면 전단응력 분포를 나타내었다. 각 위치에서의 평행판 사이의 스토크스 유동과 비교하기 위하여 Poiseuille 유동을 점선으로 표시하였다.

Fig. 2(a)에서 볼 수 있듯이 목부분에서는 중심축에서 사인파형을 가지는 채널의 유속이 Poiseuille 유동보다 작은 반면 나머지 위치에서는 속도가 증가하였다. 한편, 중심축에서 최고속도는 거의 채널폭에 반비례하는 것을 볼 수 있다. Fig. 2(b)로부터 벽면 전단응력은 사인파형 채널의 경우 폭이 좁은 곳에서는 Poiseuille 유동보다 크지만 폭이 넓어짐에 따라 급격히 감소하여 Poiseuille 유동보다 작게 나타남을 볼 수 있다. 즉, 채널 폭이 넓어짐에 따라 박리현상이

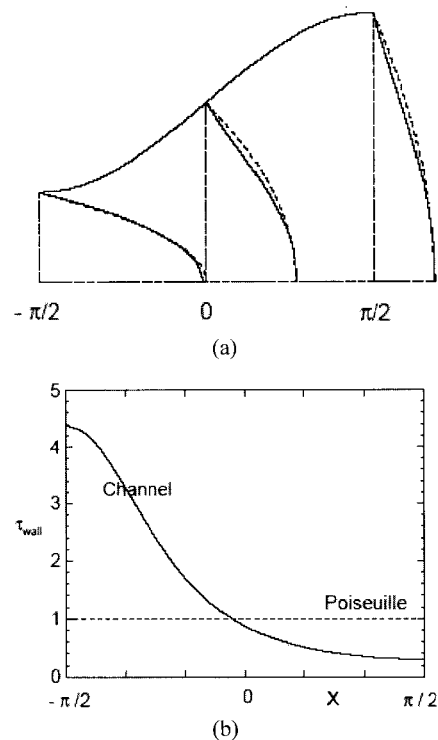


Fig. 2. Velocity profiles(a) and wall shear stress(b) for Stokes flow in sinusoidal channels.

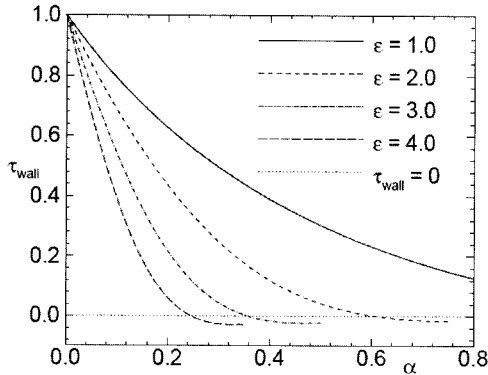


Fig. 3. Variation of wall shear stress at the widest section of the channel.

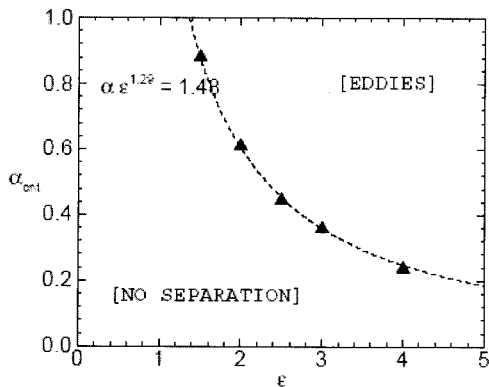


Fig. 4. Critical α for the onset of separation at the widest section of the channel.

일어나기 쉬운 조건이 조성되어가는 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 다른 형상계수 조건에서도 공통적으로 관측되었다. 전단응력은 폭이 가장 넓은 곳에서 최소가 되므로 사인파형 벽을 가지는 채널 내부유동의 박리 발생여부를 파악하기 위하여 $X=\pi/2$ 에서 벽면 전단응력을 여러 형상계수 값에 대해 Fig. 3에 나타내었다. 전단응력이 영보다 작은 구역은 박리현상에 따른 사구역이 존재하는 경우이다. 박리현상이 일어나는 임계 α 값을 ϵ 에 대해 정리한 결과를 Fig. 4에 ▲로 나타내었다. 이로부터 임계 α 값과 ϵ 의 관계를 살펴본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

$$\alpha_{crit} \epsilon^{1.29} = 1.48 \quad (12)$$

즉, 사인파형의 벽 형상을 가지는 채널 내부의 스토크스 유동에서 사구역이 발생하려면 진폭이 최소한 $1.48 \epsilon^{-1.29}$ 보다 커야한다. 여기서 흥미로운 사실은 채널의 진폭이 아무리 크더라도 ($\alpha=1$ 은 채널이 막힌 경우이다.) ϵ 이 1.38보다 작으면 사구역이 발생하지 않는다는 것이다. 이는 사인파형의 주기가 평균 채널폭의 약 2.3배 보다 짧아야지만 박리현상이 발생한다는 것을 뜻한다. Moffat(1964)이 스토크스 유동의 박리현상을 규명한 이후 스토크스 유동에 관한 여러 연구가 있었으나 (Hasimoto et al., 1980), 본 결과와 같이 특정 유동장에 대해 박리현상을 유동장의 형상계

수로 예측한 결과는 없었다. 특히 흥미로운 사실은 아무리 채널 벽의 변형도가 심하더라도 ($\alpha \approx 1$) 변형율이 특정값보다 작으면 박리현상이 발생하지 않는다는 사실이다. 참고로 2차원 파이프의 내부유동인 경우 Ralph(1987)는 Re 수가 작을 때 $\epsilon \approx \pi$ 에서 α_{crit} 를 0.31로 예측하였고(본 연구에서는 $\alpha_{crit} = 0.338$) Hahbabi 등(1986)은 $\epsilon = 2.4$ 일 때 α_{crit} 를 0.688로 예측하였다(본 연구에서는 $\alpha_{crit} = 0.478$).

3.2. 박리현상과 사구역의 발달

Fig. 4에서 예측한 결과에 따라 박리현상이 일어나고 그에 따른 사구역이 존재하면 그 영역이 얼마나 큰지를 알아보기 위해 여러 ϵ 값에 대해 박리점과 재부착점의 위치를 Fig. 5에 나타내었다. 여기서 아래에 실선으로 표시된 것은 본 연구에서 유동장 대상이 된 사인파형 채널 벽의 형상이다. 이 결과에 따르면 ▲으로 표시된 박리현상의 시작부터 α 값이 증가함에 따라 박리점이 매우 급격히 상류쪽으로 이동함을 볼 수 있다. 이러한 현상을 ϵ 이 상대적으로 큰 형상에서 더욱 심하게 나타났다. 이는 곧 사구역으로 덮힌 벽면의 길이가 일반적으로 매우 크다는 것이며 예를 들어 $\epsilon=4$ 인 경우 $\alpha=0.5$ 만 되어도 전구간의 약 절반정도가 사구역으로 덮여있는 것을 알 수 있다. 또, 이와 같이 발생한 사구역이 벽면에서 채널의 중심부로 얼마나 크게 발달해 있는지를 살펴보기 위해 채널 폭이 가장 넓은 곳 ($X = \pi/2$)에서 사구역의 높이를 채널의 진폭과 비교하여 그 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 여기서 h_E 는 사구역을 구

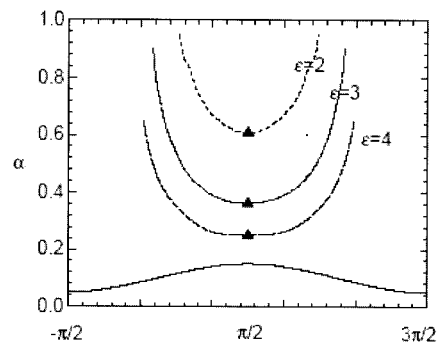


Fig. 5. Positions of the separation and reattachment points. ▲ indicates the critical amplitude for onset of separation. Solid line denotes channel upper wall.

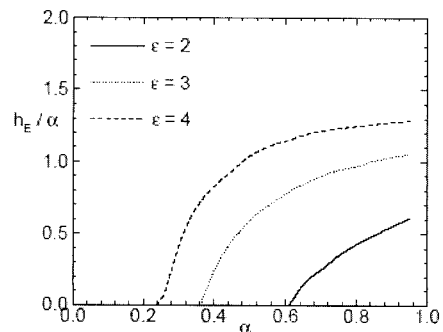


Fig. 6. Size of the eddies defined by the distance from the wall to the streamline enclosing the eddy.

분하는 유선과 벽면과의 거리이다. Fig. 6에 따르면 사구역은 일단 발생한 후에 α 값이 증가함에 따라 급속이 커지고 특히 ε 이 비교적 큰 경우 진폭보다 더 멀리까지, 즉 $\alpha/h_E > 1.0$, 중심으로 발달해 있음을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구는 다공성 매질의 내부유동을 유동영역은 벽면형상이 사인파형인 2차원 채널로 가정하고 스토크스 유동을 유선함수와 와도형태로 표현한 후 섭동해석방법을 통해 확장된 급수해 형태로 구하였다. 그 결과 얻은 급수해는 엄밀한 점근급수로 나타났고 이를 해석적 집속효과가 있는 Pade Summation을 통하여 유동장의 특성을 박리현상의 존재와 이에 따른 사구역의 생성 및 그 크기 등을 중점적으로 검토하였다.

우선 박리현상의 존재에 대해서는 박리현상이 시작되는 채널의 형상을 벽면의 형상계수들의 상관관계로 규명할 수 있었다. 즉, 특정 주기에 대해 박리현상이 일어나는 최소의 진폭 값을 예측할 수 있게 되었다. 특히, 아무리 진폭 값이 크더라도 주기가 어느 정도 짧지 않으면 박리현상이 일어날 수 없음을 확인하였다. 또, 일단 박리가 일어나 채널의 중간 위치에 사구역이 존재하면 그 크기는 진폭 값에 매우 민감하고 사구역의 범위가 매우 광범위함을 발견하였다. 사구역의 크기는 벽면을 따라 광범위할 뿐 아니라 채널의 가운데로도 상당히 침투함을 알 수 있었다. 이러한 결과는 다공성 매질로 이루어진 지하대수층에 흐르는 지하수 유동에서 공극에 사구역이 존재하는 경우 표면에서 일어나는 물질확산 등에 관한 유효확산계수 등을 계산함에 있어 유효면적이 상당히 감소할 수밖에 없음을 뜻한다. 따라서 실제 지하대수층에서 실제 상황과 유사한 결과를 도출하기 위해서는 사구역의 존재 유무를 분명히 판단한 후 이를 반영할 필요가 있다고 판단된다.

사 사

본 연구는 2001학년도 동국대학교 연구년 지원에 의하여 이루어졌으며 관계자 분들께 감사드립니다.

참고문헌

- 건설교통부, 한국수자원공사, *지하수 조사 연보(요약)*, p. 9 (2003).
- Chow, J. C. F. and Soda, K., Laminar Flow in Tubes with Constriction, *Phys. Fluids*, **15**(10), pp. 1700-1706 (1972).
- Dykaar, B. B. and Kitanidis, P. K., Macrotransport of a Biologically Reacting Solute Through Porous Media, *Water Resour. Res.*, **32**(2), pp. 307-320 (1996).
- Ge, S., A Governing Equation for Fluid Flow in Rough Fractures, *Water Resour. Res.*, **33**(1), pp. 53-61 (1997).
- Hasimoto, H. and Sano, O., Stokeslets and Eddies in Creeping Flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **12**, pp. 335-363 (1980).
- Hemmat, M. and Borhan, A., Creeping Flow through Sinusoidally Constricted Capillaries, *Phys. Fluids*, **7**(9), pp. 2111-2121 (1995).
- Moffat, H. K., Viscous and Resistive Eddies near a Sharp Corner, *J. Fluid Mech.*, **18**, pp. 1-18 (1964).
- Petersen, E. E., Diffusion in a Pore of Varying Cross Section, *A.I.Ch.E. Journal*, **4**(3), pp. 343-345 (1958).
- Pozrikidis, C., Creeping Flow in Two-dimensional Channels, *J. Fluid Mech.*, **180**, pp. 495-514 (1987).
- Ralph, M. E., Steady Flow Structures and Pressure Drops in Wavy-Walled Tubes, *J. Fluids Engineering*, **109**, pp. 255-261 (1987).
- Sisavath, S., Xudong, J. and Zimmerman, R. W., Creeping Flow through a Pipe of Varying Radius, *Phys. Fluids*, **13**(10), pp. 2762-2772 (2001).
- Van Dyke, M., Computer Extended Series, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**, pp. 287-309 (1984).
- Van Dyke, M., Slow Variations in Continuum Mechanics, *Advances in Applied Mechanics*, **25**, pp. 1-45 (1987).