韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2005. 11. 제 44권, 제 4호, 535-546.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2005, Vol. 44, No. 4, 535-546.

한국과 러시아의 7~8학년 수학교과서 도형영역에 나타난 직관적 정당화와 엄밀한 증명

한 인 기 (경상대학교)

1. 서 론

수학교과서는 수학교과의 교육목표를 교사와 학생의 교수-학습 과정으로 구체화시키는 주요한 매체이다. Gnedenko(1985, p.43)는 '학생들이 수학 교육과정에 제시된 학습내용을 터득하는 수준, 실제 문제의 해결에서 이론적인 지식을 활용하는 능력은 수학교과서가 얼만큼 잘 되었는가에 의존한다'고 주장하면서, 수학 교수-학습 과정에서 수학교과서의 중요성을 강조했다. 수학교과서는 학문적인 수학 지식을 가르칠 지식으로 변형하는 교수학적 변환의 전형적인 모범이라 할 수 있다. 우정호(2000, p.454)는 '가르친 내용이 목표로 하는 지식을 알게 하는데 실패하는 것은 가르치고자 하는 지식의 적절한 교수학적 변환에 실패했기 때문'이라고 주장하면서, 수학적 지식의 교수학적 변환의 중요성을 역설하였다. 살펴본 바와 같이, 수학교과서에 제시된 수학적 지식의 교수학적 변환, 수학적 지식의 기술 방법, 체계성은 성공적인 수학교육의 중요한 요인이라 할 수 있다.

수학교과서에 관련된 최근의 국내 연구들을 크게 세 가지 방향으로 나눌 수 있는데, 첫째 수학교과서의 문제점, 구성 방향, 교과서 체계에 관련된 연구들(김홍기, 2001; 황혜정, 2000; 한인기, 2004), 둘째 수학교과서의 국제 비교 연구들(최택영·김인영, 1998; 박문환, 2002; 박경미·임재훈, 2002; 이용곤·신현용·서보억, 1995; 한인기·신현용·서보억, 1995; 한인기, 2005), 셋째 수학교과서에서 교과 내용의 연계성, 사용되는 정의 및 정리들, 교과 내용의 분석 연구들(송순희·김윤영, 1998; 박경미, 2000; 조영미, 2002; 장혜원, 1997) 등으로 나눌 수 있다.

기술한 연구들은 수학교과서의 문제점, 구성 및 체계, 연계성, 교과내용 등을 분석하고, 국제비교를 통해 다양한 교수학적 변환의 관점을 소개하여 수학 교수-학습의 실질적인 개선 방안을 모색하려 시도하였다는 점에서 교육적 가치를 부여할 수 있을 것이다. 특히, 세 번째 연구 방향에서는 수학적 지식의 구체적인 변환에 관련된 다양한 관점을 분석, 고찰하여, 수학교육의 질적 향상을 위한 의미로운 시사점을 도출할 수 있을 것으로 기대되며, 수학교과서에 제시된 다양한 내용에 대해 좀더 폭넓은 연구가 필요하다.

도형영역의 학습은 수학교육의 중요한 목표인 논리적 사고력의 계발에서 중요하기 때문에, 수학교과서에서 도형영역의 취급에 대한 다양한 분석과 개선점의 모색이 필요하다.

한국의 중학교 수학교과서의 도형영역을 살펴보면, 일부 내용은 엄밀한 증명과 함께 제시되지만, 일부는 엄밀한 증명 대신에 직관적인 정당화의 수준에서 기술되기도 한다. 이것은 수학교과서의 도형영역에 나타난 수학 지식의 교수학적 변환의 한 예로, 학문으로서의 엄밀한 지식이 중등학교에서의 효율적인 교수-학습을 위해 가르칠 지식으로 변형된 결과를 보여주는 흥미로운 사례라 할 수 있다.

사회적으로 공유되는 수학문화, 교육환경, 사회적 요구 등으로 인하여, 각 국가마다 수학교과서에 나타나는 수학 지식의 교수학적 변환은 다양한 형태를 띠게 된다. 그 결과, 국가에 따라 어떤 명제를 직관적인 정당화와 함께 제시하는 경우도 있고, 엄밀한 증명과 함께 제시하는 경우도 있다. 특히, 러시아는 중등학교 도형영역의 교수-학습에서 유클리드적인 엄밀한 논증을 강조하는 대

* 2005년 9월 투고, 2005년 11월 심사 완료.
* ZDM분류: U23
* MSC2000분류: 97U20
* 주제어: 수학교과서, 기하학, 직관적 정당화, 엄밀한 증명

표적인 사례라 할 수 있으며, 중학교 과정에서는 평면기하학을, 고등학교 과정에서는 공간기하학을 엄밀한 증명을 통해 지도하고 있다. 그러므로, 한국과 러시아의 수학교과서 도형영역에 제시된 교수학적 변환의 구체적인 사례를 비교하는 것은 수학교과서 내용 기술에 대한 다양한 관점을 제공할 수 있으며, 수학교과서 및 수학교육의 질적 수준 향상을 위한 기초 자료를 제공할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 7~8학년 도형영역에서 한국 수학교과서에는 직관적인 정당화 방법으로 제시되지만 러시아의 수학교과서에서는 엄밀하게 증명되고 있는 명제들을 조사하여, 이들에 대한 교수학적 변환의 구체적인 사례를 제시하고 비교할 것이다. 이를 위해, 첫째 한국과 러시아의 7~8학년 수학교과서의 도형영역을 분석하여, 한국의 교과서에서는 직관적인 정당화를 통해 제시되지만 러시아에서는 엄밀한 증명을 통해 제시된 명제들을 조사하고, 둘째 수학과 교육과정, 교육과정 해설, 2종 교과용 도서 집필상의 유의점을 분석하여 이들 명제의 직관적 정당화에 대한 근거를 밝히고, 셋째 한국의 수학교과서에 제시된 기술 방법을 조사하고, 넷째 러시아의 수학교과서에 나타난 이들 명제에 대한 교수학적 변환의 사례를 제시할 것이다.

2. 한국의 수학교과서에서 직관적 정당화의 근거

학문으로서의 수학에서 요구하는 내용의 엄밀성과 교과로서의 수학에서 염두에 두는 엄밀성 수준은 다를 것이다. 만약, 학문으로서의 엄밀성 수준으로 수학교과서를 분석한다면, 중학교 수학교과서의 기하영역에서 다루는 많은 학습내용이 직관적인 정당화를 통해 제시되고 있다고 할 수 있다. 예를 들어, Atayasyan, Denisova & Silaev(1997)의 기하학기초론을 보면, '임의의 선분에 적어도 한 점에 존재한다' 또는 '임의의 선분은 오직 하나의 중점을 가진다'와 같은 정리가 증명과 함께 제시되어 있다. 그러나, 중학교 수학교과서에서 이들 내용은 증명 없이 직관적으로 받아들이며, 이것은 일반적으로 타당한 접근으로 인정되고 있다.

본 연구에서는 한국의 7~8학년의 모든 수학교과서를 분석하여, 한국의 수학교과서에서는 엄밀하게 증명하지 않고 직관적인 정당화의 방법으로 제시되지만, 러시아의 수학교과서에서는 엄밀한 증명과 함께 제시되는 명제들을 추출하였다. 이러한 명제들은 다음과 같다.

- o 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 서로 같다와 그 역
- o 삼각형의 세 가지 합동조건
- o 삼각형의 세 가지 닮음조건
- o 닮은 평면도형의 넓이

이들 중에서 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 서로 같다와 그 역, 삼각형의 세 가지 합동조건은 7학년 수학교과서에서 다루며, 삼각형의 세 가지 닮음조건과 닮은 평면도형의 넓이는 8학년 수학교과서에서 다룬다. 이들 내용의 직관적 정당화의 근거를 수학과 교육과정, 교육과정 해설, 2종 교과용 도서 집필상의 유의점을 중심으로 살펴보자.

(1) 7학년 수학교과서에서 직관적 정당화

수학과 교육과정(교육부, 1998, p.70)에는 도형 영역의 학습 지도상 유의점으로 '직관적인 탐구 활동을 통해, 점, 선, 면, 각, 원에 대한 성질을 알게 한다'고 기술되어 있으며, 2종 교과용 도서 집필상의 유의점(교육부, 1999b, p.22)에는 '내용의 수준과 범위는 교육과정에 따르도록 하되, 다음에 제시한 각 단계별의 사항을 참고로 하고, 여기에 제시되지 않은 부분은 현행 교과서의 수준을 넘지 않도록 한다'고 기술하면서, 도형영역은 '도형의 기본적인 성질들을 직관적으로 이해하게 하는데 중점을 두고, 용어의 정의와 도형의 성질 등을 필요이상으로 엄밀하게 다루지 않도록 한다'고 규정하였다.

수학과 교육과정과 2종 교과용 도서 집필상의 유의점을 종합해 보면, 수학 7-나 교과서의 도형영역에서는 직관적인 정당화를 바탕으로 하며, 필요이상으로 엄밀하게 다루지 않는다는 것을 알 수 있다. 이때, '필요이상의 엄밀성'이라는 개념에 대해서는 좀더 구체적이고 다양한 연구가 필요할 것이다. 실제로, 7학년 수학교과서의 어떤 내용은 엄밀한 증명을 통해 지도되며(교육과정 해설에 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°라는 것은 연역적인 증

명을 통해 지도하도록 규정함), 어떤 내용은 직관적인 정당화를 통해 지도된다. 그렇지만, 엄밀한 증명을 통해 지도되는 내용과 직관적인 정당화를 통해 지도되는 내용의 경계선에 대한 객관적인 기준은 제시되지 못하고 있다.

이제, 도형영역에서 직관적 정당화에 관련하여 교육과정 해설(교육부, 1999a)에 기술된 내용을 살펴보자. 교육과정 해설에서는 첫째, 평행선의 성질은 한 쌍의 평행선과 다른 한 직선이 만나서 생기는 동위각은 크기가 서로 같고, 엇각의 크기도 서로 같으며, 그 역도 각각 성립한다는 것이다. 이러한 평행선의 성질을 엄밀하게 증명하기보다는 관찰을 통해 직관적으로 이해하게 하고...(p.72); 둘째 삼각형의 결정조건에 대한 학습을 바탕으로 삼각형의 합동조건을 이해하게...(p.72) 등을 들 수 있다.

수학과 교육과정 해설에 의하면, 수학교과서에서 평행선의 동위각 및 엇각의 성질은 직관적인 정당화 수준에서 기술되어야 한다. 그러나, 평행선에서 엇각의 성질과 그 역은 대부분 엄밀한 증명과 함께 제시하고 있다. 예를 들어, 이준열 외 4인(2000)의 교과서에서는 엇각의 성질을 투명종이에서의 작도활동을 통해 제시하였지만, 다른 수학교과서들(배종수 외 7인, 2000; 이영하 외 3인, 2000; 강옥기 · 정순영 · 이환철, 2000; 신항균, 2000; 금종해 외 3인, 2000; 양승갑 외 6인, 2000; 박규홍 외 7인, 2000; 황석근 · 이재돈, 2000; 고성은 외 5인, 2000; 박윤범 외 3인, 2000; 조태근 외 4인, 2000; 강행고 외 9인, 2000)에서는 엄밀한 증명이 제시되어 있다. 한편, 러시아의 수학교과서에서는 엇각의 성질을 엄밀한 증명의 수준에서 취급하고 있다. 결국, 엇각의 성질에 대해 한국의 수학교과서와 러시아의 수학교과서에서 엄밀한 증명이 제시되었다고 할 수 있으므로, 본 연구에서는 엇각의 성질에 대해서는 구체적으로 러시아의 수학교과서와 비교하지 않을 것이다.

(2) 8학년 수학교과서에서 직관적 정당화

2종 교과용 도서 집필상의 유의점(교육부, 1999b, p.23)에는 '도형의 성질은 삼각형의 합동조건이나 닮음조건을 이용하여 증명 과정의 논리성을 파악하는 정도로 하고, 무리하게 심화되지 않도록 한다'고 규정하였다.

한편, 교육과정 해설(교육부, 1999a)에는 첫째, 삼각형의 닮음조건을 연역적으로 증명하는 것은 중학교 수준에서는 무리이므로 직관적으로 이해하게...(p.75), 둘째 닮은 도형에서 닮음비가 $1:k$일 때, 넓이의 비가 $1:k^2$이 된다는 것을 알게 하고...(p.76) 등이 제시되어 있다.

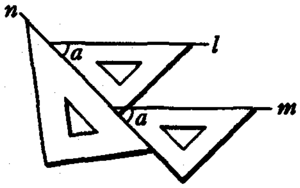
한편, 교육과정 해설에는 닮은 도형에서 넓이의 비가 닮은비의 제곱에 비례한다는 것을 알게 한다고 기술되어 있다. 이때, 몇몇 수학교과서에서는 특정한 비율에 대한 문제해결로부터 곧바로 일반화를 시도하였으며(고성은 외 5인, 2002; 최용준, 2001; 배종수 외 7인, 2001; 박윤범 외 3인, 2002; 강행고 외 8인, 2002; 박규홍 외 7인, 2001; 이준열 외 4인, 2001; 금종해 외 3인, 2002), 몇몇 수학교과서에서는 일반적인 경우에 대해 다루기도 하였다(황석근 · 이재돈, 2001; 신항균, 2002; 전평국 외 4인, 2001; 강옥기 · 정순영 · 이환철, 2001; 양승갑 외 6인, 2001; 조태근 외 4인, 2001).

3. 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 직관적 정당화와 엄밀한 증명의 사례 비교

(1) 평행선에서 동위각의 성질

한국의 모든 수학교과서에서 '평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 서로 같다'는 명제가 증명없이 제시되어 있다. 배종수 외 7인(2000)에서는 각도기를 사용한 각의 측정활동을 통해, 이준열 외 4인(2000), 박규홍 외 7인(2000), 박윤범 외 3인(2000)에서는 투명종이를 이용한 작도활동을 통해, 강행고 외 9인(2000), 황석근 · 이재돈(2000), 강옥기 · 정순영 · 이환철(2000), 조태근 외 4인(2000), 신항균(2000), 이영하 외 3인(2000), 양승갑 외 6인(2000), 고성은 외 5인(2000), 금종해 외 3인(2000)에서는 삼각자를 이용한 작도활동을 통해, 이 성질에 대한 직관적인 정당화를 시도하였다. 예를 들어, 황석근 · 이재돈(2000, p.48)의 교과서를 살펴보자.

삼각자 두 개를 이용하여 평행선을 그려보면, 평행선 l, m과 다른 한 직선 n이 만나서 생기는 동위각의 크기는 서로 같음을 알 수 있다.



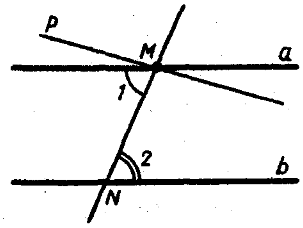
<그림 1>

그리고, 이 명제의 역인 '두 직선이 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기가 서로 같으면, 두 직선은 서로 평행하다'는 것도 증명없이 제시되어 있다.

한국의 수학교과서에서 평행선에서 동위각의 성질에 대한 설명의 특징으로 측정활동을 바탕으로 하는 직관적 정당화를 들 수 있다. 이 방법은 수학과 교육과정(교육부, 1998, p.70)에 기술된 '직관적인 탐구 활동을 통해 점, 선, 면, 각, 원에 대한 성질을 알게 한다'는 것에 상응되는 것으로, 수학교과서에 요구되는 특성인 일치성[1]의 측면에서 바람직하다고 할 수 있다.

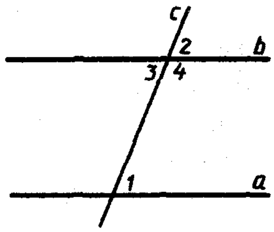
이제, 러시아 교과서에 제시된 방법을 살펴보자. 러시아 교과서에서는 평행선에서 엇각의 성질을 먼저 제시하고, 동위각의 성질을 제시한다. 이때, 평행선에서 엇각과 동위각의 성질 모두에 대해 엄밀하게 증명한다. Atanasyan 외 4인(1996, pp.59-61)의 기술된 엇각과 동위각의 성질에 대한 증명을 살펴보자. 우선, 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 엇각의 크기는 서로 같다는 것의 증명을 살펴보자.

평행한 직선 a, b와 MN이 교차한다고 하자. 이제, 엇각, 예를 들어 각 1과 2가 같다는 것을 증명하자(그림 2). 가령, 각 1과 2가 같지 않다고 가정하자. 직선 MP와 b가 MN과 교차하여 생긴 엇각이 $\angle$PMN과 $\angle 2$가 되도록, 반직선 MN으로부터 각 2와 같은 각 PMN을 작도하자. 작도에 의해, 이들 엇각은 같고, 그러므로 MP// b이다. 이로부터, 점 M을 지나며 직선 b에 평행한 두 직선 a와 MP를 얻게 된다. 이것은 평행선 공리에 모순된다. 결국, 각 1과 2가 같지 않다는 가정은 거짓이며, $\angle 1=\angle 2$가 성립한다.



<그림 2>

한편, 평행한 직선 a, b와 c가 교차한다고 하자. 이제, 동위각, 예를 들어 각 1과 2가 같다는 것을 증명하자(그림 3). $a//b$이므로, 엇각 1과 3은 같다. 그리고, 각 2와 3은 맞꼭지각으로 같다. 등식 $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 3$으로부터 $\angle 1=\angle 3$이 유도된다.



<그림 3>

러시아의 수학교과서는 평행선에서 동위각의 성질에 대해 한국의 수학교과서에 비해 엄밀한 증명을 제시하고 있다. 이러한 접근은 수학교과서에 요구되는 특성인 학술성, 이해가능성[2], 논리적 사고력의 측면[3]에서 긍정적으로 논의할 수도 있을 것이다.

1) Kolyagin(2003)은 수학교과서를 특징짓는 변인으로, 교육과정과의 일치성, 학술성과 이해가능성, 인지적인 자발성의 계발, 평가와 학습자의 자기평가, 서술에 사용된 언어와 기법을 들었다. 수학교과서의 내용과 수준이 교육과정의 그것들과 일치해야 한다는 것은 수학교과서에 대한 가치 판단의 중요한 기준이라 할 수 있다.

2) 이해가능성과 관련하여, Krupich(1985, p.31)는 '이해가능성을 어려움없는 학습으로 생각해서는 안된다. 이해가능성에는 학습활동에서 학생들이 어려움을 극복하는 것을 포함된다'고 했다.

3) Tereshin(1985)은 수학교과서에 요구되는 특징들로, 학생들이 가치관을 형성하고 논리적인 사고를 계발할 수 있도록 해야 하며, 수학분야의 이론적인 기초 지식들을 체계적으로, 학술적으로 근거있게, 해당 연령의 학생들이 이해할 수 있도록 기술되어야 하며, 교수학적으로 의미롭게 배열된 충분한 양의 다양한 연습문제를 포함해야 한다고 하였다.

현재, 우리나라에서는 수학교육학 분야에서 수준별 교육에 대한 논의가 다양한 수준에서 활발하게 진행되고 있다. 어떤 명제를 직관적인 정당화를 통해 도입할 것인지, 아니면 엄밀한 증명을 통해 제시할 것인지는 수준별 교육의 구체화를 위한 연구에서 중요한 주제라 할 수 있다. 그러므로, 학생들의 이해가능성을 고려하여 평행선에서 동위각의 성질을 직관적인 정당화를 통해 제시할 것인지, 엄밀한 증명을 통해 제시할 것인지에 대한 실증적인 연구가 필요하다.

(2) 삼각형의 합동조건

한국의 모든 교과서에서 삼각형의 세 가지 합동조건은 증명없이 삼각형의 결정조건을 이용하여 설명하고 있다. 예를 들어, 강옥기 · 정순영 · 이환철(2000, p.72)에 제시된 내용을 살펴보자.

두 삼각형에서 대응하는 세 변의 길이가 모두 같고, 대응하는 세 각의 크기가 모두 같다는 조건 중 일부만 있어도 두 삼각형이 합동이 되는 경우가 있다. 예를 들면, $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에서 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\angle B=\angle B'$이면, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$이다. 그 이유는 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어지면 삼각형이 하나로 결정된다는 삼각형의 결정조건 때문이다. 이와 같이 생각하면, 나머지 삼각형의 결정조건도 두 삼각형이 서로 합동이 될 수 있는 조건이 됨을 알 수 있다.

기술한 것과 같이, 한국의 모든 수학교과서에서는 삼각형의 합동조건을 삼각형의 결정조건(삼각형의 작도)을 통해 직관적인 수준에서 정당화를 시도하였다. 이것은 교육과정과의 일치성이라는 측면에서 긍정적으로 평가할 수 있다.

그런데, 한국의 수학교과서에는 작도문제의 해결을 위한 일반적인 방법은 제시되지 않고, 각각의 경우에 대한 작도 순서만이 기술되어 있다. 그 결과, 학생들은 수학교과서에 제시된 작도 순서를 수동적으로 반복할 가능성이 있으며, 이것은 수학교과서에 요구되는 특성인 '인지적 자발성'의 계발에 긍정적인 영향을 미치기 어려울 것이다. 한편, 한국의 수학교과서에는 기술된 작도 순서의 타당성, 작도에 의한 삼각형의 유일한 결정에 대한 어떠한 수학적인 정당화도 제시되어 있지 않다.

한편, 러시아의 수학교과서에서는 삼각형의 합동조건을 엄밀한 수준에서 증명하고 있다. Pogorelov(1996, pp.32-33, p.35, p.40)의 교과서에 제시된 삼각형의 세 가지 합동조건의 증명방법은 한인기(2005)의 연구에 제시되어 있다. 이때, SAS합동조건과 ASA합동조건은 선분과 각의 포갬을 이용하여 증명하였고, SSS합동조건은 이등변삼각형의 중선, 높이의 성질을 이용하여 증명하였다. 특히, Pogorelov의 교과서에서는 SAS합동조건, ASA합동조건, SSS합동조건의 순서로 기술되어 있다.

(3) 삼각형의 닮음조건

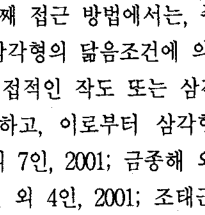
한국의 수학교과서에서 삼각형의 닮음조건에 관련하여 첫째, 삼각형의 작도 또는 삼각형의 결정조건을 이용한 접근, 둘째 삼각형의 합동조건을 이용한 접근을 살펴볼 수 있다. 첫 번째 접근 방법에서는, 주어진 삼각형과 닮음인 삼각형을 삼각형의 닮음조건에 의해 유일하게 작도할 수 있음을 직접적인 작도 또는 삼각형의 결정조건을 이용하여 제시하고, 이로부터 삼각형의 닮음조건을 유도한다(박규홍 외 7인, 2001; 금종해 외 3인, 2002; 최용준, 2001; 이준열 외 4인, 2001; 조태근 외 4인, 2001; 전평국 외 4인, 2001). 예를 들어, 박규홍 외 7인(2001, p.81)의 수학교과서를 살펴보자.

주어진 $\triangle ABC$와 닮음비가 1:2인 $\triangle A'B'C'$을 작도하여 보자. $\triangle A'B'C'$의 작도는 다음과 같은 세 가지 방법으로 할 수 있다.

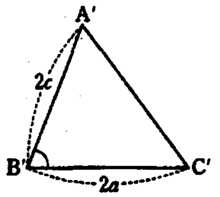
① 세 변의 길이를 2배로 작도한다.

② 두 변의 길이를 2배로 하고, 그 끼인각의 크기를 같도록 작도한다.

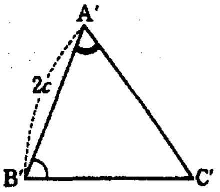
③ 한 변의 길이를 2배로 하고, 그 양 끝각의 크기를 각각 같도록 작도한다.



<그림 4a>



<그림 4b>



<그림 4c>

이로부터 두 삼각형은 다음의 어느 한 조건을 만족하면 서로 닮음이 됨을 알 수 있다. 이것을 삼각형의 닮음조건이라고 한다.

기술한 직관적 정당화의 방법은 교육과정과의 일치성이라는 측면에서는 바람직한 접근이라 할 수 있다. 그러나, 삼각형의 합동조건에서 기술했듯이 우리나라의 수학 교과서에서 작도문제의 일반적인 해결 방법의 기술이 빈약함을 고려하면, 이 방법은 학생들의 논리적 사고력과 인지적 자발성의 계발에서 한계를 가질 것이다.

두 번째 접근 방법에서는 삼각형의 합동조건을 이용하여 구체적인 예 또는 일반적인 경우에 대해 삼각형의 닮음조건을 증명하였다. 강행고 외 8인(2002), 황석근·이재돈(2001), 신항균(2002), 고성은 외 5인(2002), 배종수 외 7인(2001), 양승갑 외 6인(2001), 박윤범 외 3인(2002), 강행고 외 8인(2002)의 교과서에서는 '△ABC와 △DEF에서 $\overline{AB}:\overline{DE} = \overline{BC}:\overline{EF} = \overline{CA}:\overline{FD} = 1:2$이면, △ABC∽△DEF임을 보여라'와 같이 변들의 비가 특정한 값인 경우에 대해 이들의 닮음을 증명하였고, 강옥기·정순영·이환철(2001)의 교과서에서는 일반적인 경우에 대한 삼각형의 닮음조건을 증명하였다. 강옥기·정순영·이환철(2001, p.93)의 교과서에 제시된 두 삼각형 ABC와 A′B′C′에서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ 이면 △ABC∽△A′B′C′임을 증명하는 방법을 살펴보자.

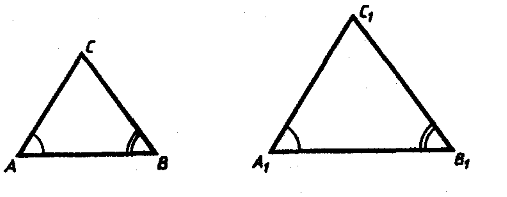
$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{1}{k}$ (k는 0이 아닌 상수)라고 하면, $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$, $\overline{B'C'} = k\overline{BC}$, $\overline{C'A'} = k\overline{CA}$ --- ㉠. △ABC를 k배 확대한 삼각형을 △DEF라고 하면, △ABC∽△DEF이고, 그 닮음비가 1:k이므로, $\overline{DE} = k\overline{AB}$, $\overline{EF} = k\overline{BC}$, $\overline{FD} = k\overline{CA}$ --- ㉡. ㉠, ㉡에서 $\overline{A'B'} = k\overline{DE}$, $\overline{B'C'} = k\overline{EF}$, $\overline{C'A'} = k\overline{FD}$이므로, △A′B′C′≡△DEF. 따라서, △ABC∽△A′B′C′.

기술한 것과 같이, 강옥기·정순영·이환철의 교과서에서는 일반적인 경우에 대해 삼각형의 닮음조건을 증명하였다. 이러한 엄밀한 증명은 수학교과서에 요구되는 특성인 교육과정과의 '일치성'에 부합되지 않는다. 그러나, 현행 수학 교육과정의 수준과 내용에 대해 다양한 비판적인 견해들(신현용, 2005; 박경미, 2003; 박한식, 2001; 김홍기, 2001 등등)이 제기되고 있다는 것을 감안하면, 엄밀한 증명이 교육과정과 일치되지 않기 때문에 생략해야 한다고 결론짓기보다는, 학생의 이해가능성의 측면에서 좀더 진지한 연구가 진행되어야 할 것이다.

한편, 러시아의 수학교과서에서는 삼각형의 닮음조건에 대한 엄밀한 증명을 제시하고 있다. 예를 들어, Atanasyan 외 4인(1996, pp.137-139)에 제시된 증명을 살펴보자.

첫 번째 닮음조건. 한 삼각형의 두 각이 다른 삼각형의 두 각과 각각 같으면, 이들 삼각형은 닮음이다.

증명. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$이 주어졌고, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$이라 하자(그림 5). 이제, △ABC∽△ $A_1B_1C_1$을 증명하자.



<그림 5>

삼각형의 각들의 합에 대한 정리에 의해, $\angle C =$

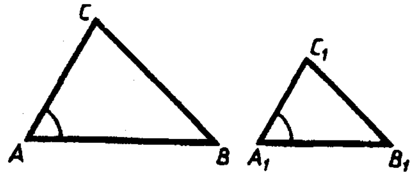
$180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$이다. 이로부터, $\angle C = \angle C_1$이 성립한다. 그러므로, 삼각형 ABC의 각들은 삼각형 $A_1B_1C_1$의 각들과 각각 같다.

이제, 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$의 대응하는 변들이 비례한다는 것을 증명하자. $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$이므로,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1},$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$$ [4].

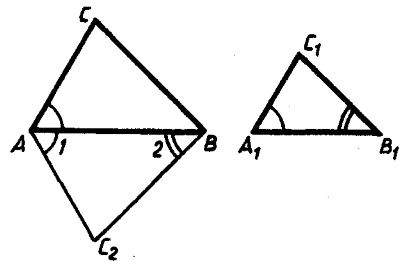
이들 등식으로부터, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$이 성립한다. 유사한 방법으로, 등식 $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$을 이용하면, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$를 얻을 수 있다. 결국, 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$의 상응하는 변들은 서로 비례한다.



<그림 6>

두 번째 닮음조건. 한 삼각형의 두 변이 다른 삼각형의 두 변과 각각 비례하고, 이들 변사이의 끼인각이 같으면, 이들 삼각형은 닮음이다.

증명. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$이 주어졌고, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$이라 하자(그림 6). 이제, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$을 증명하자. 이를 위해, 삼각형의 첫 번째 닮음조건으로부터 $\angle B = \angle B_1$를 증명하면 된다는 것을 알 수 있다.



<그림 7>

이제, $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$인 삼각형 ABC_2를 생각하자(그림 7). 삼각형 ABC_2와 $A_1B_1C_1$은 첫 번째 닮음조건에 의해 닮음이므로, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$이 성립한다. 한편, 조건에 의해, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$이다. 이들 두 등식으로부터, $AC = AC_2$를 얻을 수 있다. 그리고, 삼각형 ABC와 ABC_2는 합동이다(AB는 공통변이고, $AC = AC_2$, $\angle A = \angle A_1$이므로). 이로부터, $\angle B = \angle 2$이 유도되고, $\angle 2 = \angle B_1$이므로 $\angle B = \angle B_1$가 증명된다.

세 번째 닮음조건. 한 삼각형의 세 변이 다른 삼각형의 세 변과 각각 비례하면, 이들 삼각형은 닮음이다.

증명. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$이 주어졌고, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$이라 하자. 이제, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$을 증명하자. 삼각형의 두 번째 닮음조건에 의해, $\angle A = \angle A_1$만 증명하면 두 삼각형의 닮음이 증명된다.

이제, $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$인 삼각형 ABC_2를 생각하자(그림 7). 삼각형 ABC_2와 $A_1B_1C_1$은 첫 번째 닮음조건에 의해 닮음이므로,

4) 두 삼각형이 같은 각을 가지면, 두 삼각형의 넓이는 같은 각의 변인 삼각형의 두 변의 곱에 비례한다는 것이 교과서의 앞에서 미리 증명되어 있음.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}.$$

이들 등식을 등식 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ 과 비교하면, $BC = BC_2$, $CA = C_2A$를 얻을 수 있다. 그리고, 삼각형 ABC와 ABC_2는 세 변의 길이가 같으므로 합동이다. 이로부터, $\angle A = \angle 1$이 유도되고, $\angle 1 = \angle A_1$이므로, $\angle A = \angle A_1$이 증명된다.

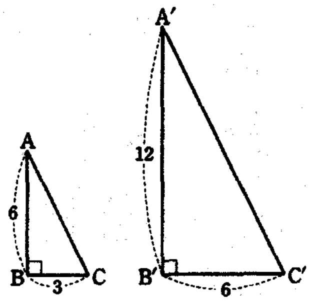
Atanasyan 외 4인의 교과서에서 삼각형의 닮음조건은 삼각형의 넓이의 비, 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명하였다. 이들 개념은 중학교 수학교육에서 충분히 다루어지는 것들로, 기술한 증명방법에 대한 학생들의 이해가능성에 대한 폭넓은 논의가 필요할 것이다. 한편, 기술한 엄밀한 증명은 수학교과서의 학술성, 논리적 사고력 등의 측면에서는 의미있는 방법이라 할 수 있다.

(4) 닮은 평면도형의 넓이의 비

닮은 평면도형의 넓이의 비에 대한 명제는 두 도형의 닮음비가 m:n이면, 이들의 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다. 이 명제의 증명과 관련하여, 한국의 수학교과서를 첫째, 닮음비가 m:n인 닮은 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$이라는 일반화된 경우(특정한 비만이 아닌)에 대한 증명이 제시되어 있는가, 둘째 일반적인 경우(삼각형만이 아닌)에 대한 증명이 제시되어 있는가의 측면에서 분석할 수 있다.

첫째, 닮음인 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$이라는 일반화된 경우에 대한 증명이 제시되어 있는가를 살펴보자. 고성은 외 5인(2002), 최용준(2001), 배종수 외 7인(2001), 박윤범 외 3인(2002), 강행고 외 8인(2002), 박규홍 외 7인(2001), 이준열 외 4인(2001), 금종해 외 3인(2002)의 교과서에서는 닮음비가 1:2, 2:3과 같은 특정한 비에 대해 이들 도형의 넓이의 비가 닮음비의 제곱이 됨을 보인 후에, 닮은 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$이 된다고 곧바로 일반화하였다. 예를 들어, 고성은 외 5인(2002, p.105)의 교과서를 살펴보자.

<그림 8>에서 $\overline{AB}:\overline{A'B'} = \overline{BC}:\overline{B'C'} = 1:2$이고, $\angle B = \angle B'$이므로, 두 삼각형 ABC와 A'B'C'은 닮음이고, 닮음비는 1:2이다. 또 $\triangle ABC = 9$, $\triangle A'B'C' = 36$이므로, 두 삼각형의 넓이의 비는 $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = 9:36 = 1:4 = 1^2:2^2$. 따라서, 닮음인 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같음을 알 수 있다.

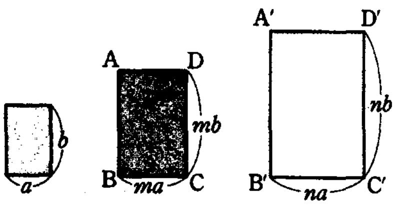


<그림 8>

기술한 것은 두 도형의 닮음비가 m:n이면, 이들의 넓이의 비가 $m^2:n^2$이라는 명제에 대한 증명이 될 수 없다. 이러한 접근은 수학교과서에 요구되는 특성인 학술성, 논리적 사고력의 측면에서는 바람직한 방법이라고 하기 어렵다.

한편, 황석근 · 이재돈(2001), 신항균(2002)의 교과서에서는 닮음비가 1:k인 닮은 도형의 넓이의 비가 $1:k^2$임을 보인 후에, 닮은 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$이 됨을 기술하였다. 전평국 외 4인(2001), 강옥기 · 정순영 · 이환철(2001), 양승갑 외 6인(2001), 조태근 외 4인(2001)의 교과서에서는 닮음비가 m:n인 닮은 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$임을 정당화하였다. 예를 들어, 양승갑 외 6인(2001, p.128)의 교과서를 살펴보자.

<그림 9>와 같이 가로, 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 변의 길이를 각각 m배, n배 늘린 두 직사각형에서 □ABCD∽□A'B'C'D'이고, □ABCD와 □A'B'C'D'의 닮음비는 m:n이다. 이때, □ABCD $= ma \times mb = m^2ab$, □A'B'C'D' $= na \times nb = n^2ab$이므로, □ABCD:□A'B'C'D' $= m^2ab : n^2ab = m^2:n^2$.



<그림 9>

위의 방법에서는 닮음비가 m:n인 두 닮은 도형의 넓이의 비에 대한 엄밀한 증명이 제시되어 있으며, 명제의 증명이 수학적으로 근거있게 기술되었다고 할 수 있다.

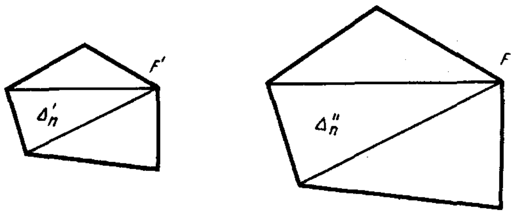
둘째, 일반적인 경우(삼각형만이 아닌)에 대한 증명이 제시되어 있는가를 살펴보자. 고성은 외 5인(2002), 최용준(2001), 배종수 외 7인(2001), 박윤범 외 3인(2002), 강행고 외 8인(2002), 박규홍 외 7인(2001), 이준열 외 4인(2001), 금종해 외 3인(2002), 신항균(2002)의 교과서에서는 삼각형의 경우만 기술하고, 곧바로 닮은 평면도형의 넓이의 비가 닮음비의 제곱이 된다는 것을 기술하였다. 그리고, 양승갑 외 6인(2001), 조태근 외 4인(2001)은 직사각형의 경우만 기술하고, 평면도형으로 일반화하였다.

한편, 전평국 외 4인(2001)의 교과서에서는 삼각형의 경우를 기술하고, 닮음인 사각형을 각각 닮음인 삼각형으로 분할하여 닮음인 삼각형의 넓이의 비를 이용하여 닮음인 사각형의 넓이의 비를 설명하였다. 그리고 나서, 닮은 평면도형의 넓이의 비를 기술하였다. 이와 유사한 접근을 황석근·이재돈(2001)의 교과서에서도 볼 수 있는데, 여기서는 닮은 삼각형, 닮은 오각형을 기술하고, 닮은 평면도형의 넓이의 비를 기술하였다. 강옥기·정순영·이환철(2001)의 교과서에는 닮은 삼각형의 경우를 기술하고, 그리고 나서 n각형을 삼각형들로 분할하여 닮은 n각형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$임을 설명하였다.

이제, 러시아의 수학교과서에 제시된 방법을 Pogorelov(1996, pp.222-223)의 교과서를 중심으로 살펴보자. F'과 F''을 닮음인 두 단순도형[5]이라 하고, 이들 도형의 넓이의 비를 구하자. 두 도형이 닮음이므로, 도형 F'을 F''으로 보내는 닮음변환이 존재한다.

5) Pogorelov(1996, p.215)는 유한개의 평면삼각형으로 분할할 수 있는 기하학적 도형을 단순도형으로 정의하였음.

도형 F'을 삼각형 Δ_1', Δ_2', Δ_3', …으로 분할하자(그림 10). 도형 F'을 F''으로 보내는 닮음변환은 이들 삼각형을 도형 F''의 분할인 삼각형 Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', …으로 보낸다. 도형 F'의 넓이는 삼각형 Δ_1', Δ_2', Δ_3', …의 넓이의 합과 같고, 도형 F''의 넓이는 삼각형 Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', …의 넓이의 합과 같다.



<그림 10>

만약, 닮음계수가 k라면, 삼각형 Δ_n''의 치수들은 삼각형 Δ_n'의 상응하는 치수보다 k배가 크다. 특히, 삼각형 Δ_n''의 변들과 높이들은 삼각형 Δ_n'의 상응하는 변들, 높이들보다 k배가 크다. 이로부터, $S(\Delta_n'')=k^2S(\Delta_n')$이 유도된다. 이들 등식을 항끼리 더하면, $S(F'')=k^2S(F')$을 얻을 수 있다. 닮음계수 k는 도형 F''과 F'의 상응하는 선형 치수들의 비와 같다. 그러므로, 닮음인 도형들의 넓이는 이들의 상응하는 선형 치수들의 제곱에 비례한다.

러시아의 수학교과서에서는 한국의 수학교과서보다 훨씬 일반적인 경우를 증명하고 있다. 이것은 수학교과서에 요구되는 특성인 학술성에는 잘 부합된다. 이러한 방법은 학생들의 이해가능성에 대한 신중한 연구가 선행된 다음에 비로소 의미있는 결론을 도출할 수 있을 것이다.

4. 결론

본 연구에서는 7~8학년 도형영역에서 한국 수학교과서에는 직관적인 정당화 방법으로 제시되지만 러시아의 수학교과서에서는 엄밀하게 증명되고 있는 명제들을 조

사하여, 이들에 대한 교수학적 변환의 구체적인 사례를 제시하고 비교하였다. 이를 위해, 한국과 러시아의 7~8학년 수학교과서의 도형영역을 분석하여, 한국의 교과서에서는 직관적인 정당화를 통해 제시되지만 러시아에서는 엄밀한 증명을 통해 제시된 명제들을 조사하고, 수학과 교육과정, 교육과정 해설, 2종 교과용 도서 집필상의 유의점을 분석하여 이들 명제의 직관적 정당화에 대한 근거를 밝히고, 한국의 수학교과서에 제시된 기술 방법을 조사하고, 러시아의 수학교과서에 나타난 이들 명제에 대한 교수학적 변환의 사례를 제시하였다.

러시아의 수학교과서에서는 엄밀한 증명과 함께 제시되지만 한국의 수학교과서에서는 직관적 정당화의 방법으로 다루는 명제들로는, 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 서로 같다와 그 역; 삼각형의 세 가지 합동조건; 삼각형의 세 가지 닮음조건; 닮은 평면도형의 넓이 등이 있다.

첫째, 평행선에서 동위각의 성질에 관련하여, 교육과정 해설에서는 엄밀하게 증명하기보다는 관찰을 통해 직관적으로 이해하도록 기술되어 있다. 이것은 수학교과서에 요구되는 특성인 일치성 측면에서 바람직한 접근이라 할 수 있다. 한편, 러시아 교과서에서는 평행선에서 엇각의 성질을 먼저 제시하고, 동위각의 성질을 제시하는데, 이들 모두에 대해 엄밀하게 증명하였다. 이러한 방법은 수학교과서에 요구되는 특성인 학술성, 이해가능성, 논리적 사고력의 측면에서 진지한 논의의 대상이 될 수 있을 것이다.

둘째, 삼각형의 합동조건에 관련하여, 교육과정 해설에서는 삼각형의 결정조건에 대한 학습을 바탕으로 삼각형의 합동조건을 직관적으로 이해하도록 하였다. 한국의 모든 교과서에는 교육과정과 일치하는 방법으로 기술되어 있었다. 그런데, 한국의 수학교과서에서는 작도문제의 해결을 위한 일반적인 방법은 제시되지 않기 때문에, 수학교과서에 요구되는 특성인 인지적 자발성, 학술성의 측면에서 작도문제의 해결에 대한 진지한 논의가 필요할 것이다. 반면에, 러시아의 수학교과서에서는 삼각형의 합동조건을 엄밀한 수준에서 증명하고 있다.

셋째, 삼각형의 닮음조건에 관련하여, 교육과정 해설과 2종 교과용 도서 집필상의 유의점에서는 삼각형의 닮음조건을 연역적으로 증명하는 것이 중학교 수준에서는 무리이므로 직관적으로 이해하도록 하였다. 한국의 수학교과서에서 삼각형의 닮음조건을 삼각형의 작도 또는 삼각형의 결정조건을 이용하여 설명하거나 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명하였다. 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명하는 경우는 수학교과서와 교육과정의 일치성에 부합되지는 않는다. 한편, 러시아의 수학교과서에서는 삼각형의 닮음조건에 대한 엄밀한 증명을 제시하였다. 이러한 엄밀한 증명은 수학교과서의 학술성, 논리적 사고력 등의 측면에서는 의미있는 접근이라 할 수 있을 것이다.

넷째, 닮은 평면도형의 넓이의 비에 관련하여, 교육과정 해설에서는 닮은도형에서 닮음비가 $1:k$일 때, 넓이의 비가 $1:k^2$이 된다는 것을 알게 한다고 기술되어 있다. 닮은 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$이라는 일반화된 경우에 대한 증명이 제시되었는가와 관련하여, 몇몇 교과서에서는 닮음비가 1:2, 2:3과 같은 특정한 비에 대해 이들 도형의 넓이의 비가 닮음비의 제곱이 됨을 보인 후에, 닮은 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$이 된다고 일반화하였다. 그리고, 몇몇 교과서에서는 닮음비가 $m:n$인 두 닮은 도형의 넓이의 비에 대한 엄밀한 증명이 제시되어 있었다.

한편, 일반적인 경우(삼각형만이 아닌)에 대한 증명이 제시되어 있는가에 관련하여서는, 몇몇 교과서에서는 삼각형 또는 직사각형의 경우만 고찰하고, 곧바로 닮은 평면도형의 넓이의 비가 닮음비의 제곱이 된다고 일반화하였다. 한편, 몇몇 교과서에서는 닮은 삼각형의 경우를 기술하고, n각형을 삼각형들로 분할하여 닮은 n각형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$임을 설명하였다. 한편, 러시아의 수학교과서에서는 일반적인 경우에 대한 증명이 제시되어 있었다.

참 고 문 헌

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2000). 수학 7-나. 서울: 두산.

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2001). 수학 8-나. 서울: 두산.

강행고 외 8인 (2002). 수학 8-나. 서울: 중앙교육진흥연구소.

강행고 외 9인 (2000). 수학 7-나. 서울: 중앙교육진흥연구소.

강행고 외 9인 (2000). 수학 7-나. 서울: 중앙교육진흥연구소.

고성은 외 5인 (2000). 수학 7-나. 서울: 블랙박스.

고성은 외 5인 (2002). 수학 8-나. 서울: 블랙박스.

교육부 (1998). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (1999a). 중학교 교육과정 해설(III). 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (1999b). 2종 교과용 도서 집필상의 유의점. 서울: 교육부.

금종해 외 3인 (2000). 수학 7-나. 서울: 고려출판.

금종해 외 3인 (2002). 수학 8-나. 서울: 고려출판.

김홍기 (2001). 제 7차 교육과정과 교과서의 문제점, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 40(1), pp.139-159.

박경미 (2000). 중학교 수학 교육과정 및 교과서 내용의 양과 난이도 수준 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육학연구> 10(1), pp.35-56.

박경미 (2003). 수학과 교육과정 개정 및 총론과 관련된 쟁점 및 발전 방향, 사단법인 수학사랑 창립기념 심포지엄.

박경미・임재훈 (2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학교과서 비교, 학교수학 4(2), pp.317-331.

박규홍 외 7인 (2000). 수학 7-나. 서울: 두레교육.

박규홍 외 7인 (2001). 수학 8-나. 서울: 두레교육.

박규홍외 7인 (2000). 수학 7-나. 서울: 두레교육.

박문환 (2002). 교과서에 나타난 '수학적 귀납법'에 대한 남・북한 비교, 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육학연구>, 12(2), pp.181-192.

박윤범 외 3인 (2000). 수학 7-나. 서울: 대한교과서주식회사.

박윤범 외 3인 (2002). 수학 8-나. 서울: 대한교과서주식회사.

박한식 (2001). 수학교육의 회고와 제 7차 교육과정 및 교직수학: 제 7차 교육과정에 따른 수학교과서 검정 심의와 관련하여, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 40(1), pp.125-138.

배종수 외 7인 (2000). 수학 7-나. 서울: 한성교육연구소.

배종수 외 7인 (2001). 수학 8-나. 서울: 한성교육연구소.

송순희・김윤영 (1998). 초・중・고 수학교과서 해석 영역의 연계성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 37(2), pp.87-100.

신항균 (2000). 수학 7-나. 서울: 형설출판사.

신항균 (2002). 수학 8-나. 서울: 형설출판사.

신현용 (2005). 수학과 교육과정 개정의 방향과 절차에 관한 제언, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 44(2), pp. 169-178.

양승갑 외 6인 (2000). 수학 7-나. 서울: 금성출판사.

양승갑 외 6인 (2001). 수학 8-나. 서울: 금성출판사.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대출판부.

이영하 외 3인 (2000). 수학 7-나. 서울: 교문사.

이용곤・신현용・서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 I, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 34(1), pp.107-118.

이준열 외 4인 (2000). 수학 7-나. 서울: 디딤돌.

이준열 외 4인 (2001). 수학 8-나. 서울: 디딤돌.

장혜원 (1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰, 대한수학교육학회논문집 7(2), pp.327-336.

전평국 외 4인 (2001). 수학 8-나. 서울: 교학연구사.

조영미 (2002). 수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성 분석과 수준 탐색-기하 영역을 중심으로, 학교수학 4(1), pp.15-28.

조태근 외 4인 (2000). 수학 7-나. 서울: 금성출판사.

조태근 외 4인 (2001). 수학 8-나. 서울: 금성출판사.

최용준 (2001). 수학 8-나. 서울: 천재교육.

최택영・김인영 (1998). 남북한 수학 교과서 비교, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 37(1), pp.35-54.

한인기 (2004). 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 연구-구세프의 실험 교과서를 중심으로-, 한국학교수학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 7(1), pp.37-48.

한인기 (2005). 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습내용의 비교 연구, 한국학교수학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 8(1), pp.90-100.

한인기・신현용・서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교

과서 비교 분석 연구 II, 한국학교수학회지 시리즈 A <수학교육>, 34(1), pp. 119-130.
황석근 · 이재돈 (2000). 수학 7-나. 서울: 한서출판사.
황석근 · 이재돈(2001). 수학 8-나. 서울: 한서출판사.
황혜정 (2000). 수학과 2종 교과서 개발 및 검정 기준에 관한 소고, 한국학교수학회지 시리즈 A <수학교육> 39(1), pp.1-10.
Atanasyan L. S. 외 4인 (1996). *Geometriya: Ucheb. dlya 7-11 kl.* Moskva: Prosveshenie.
Gnedenko B. V. (1985). *Matematika i matematicheskoe obrazovanie v sovremenom mire.* Moskva: Prosveshenie.
Kokyagin Yu. M. (2003). Shkokny uchebnik matematiki: v proshlom i nastoyashem, *Matematika* 3, pp.72-76.
Krupich V. I. (1985). Printsipy sovetskoi didaktiki v obuchenii matematike. In Eds. Cherkasov R.S. & Stokyar A.A., *Metodika prepodavaniya matematiki v srednei shkole.* Moskva: Prosveshenie.
Pogorelov A. V. (1996). *Geometriya: Ucheb. dlya 7-11 kl.* Sankt-Peterburg: Hardford.
Tereshin I. A.(1985). Sredstva obucheniya matematike. In Eds. Cherkasov R.S. & Stokyar A.A., *Metodika prepodavaniya matematiki v srednei shkole.* Moskva: Prosveshenie.

A Study on Intuitive Verification and Rigor Proof in Geometry of Korean and Russian 7~8 Grade's Mathematics Textbooks

Han, Inki
Dept. of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea

We study on intuitive verification and rigor proof which are in geometry of Korean and Russian 7~8 grade's mathematics textbooks. We compare contents of mathematics textbooks of Korea and Russia laying stress on geometry. We extract 4 proposition explained in Korean mathematics textbooks by intuitive verification, analyze these verification method, and compare these with rigor proof in Russian mathematics textbooks.

* ZDM Classification: U23
* 2000 Mathematics Subject Classification: 97U20
* Key word: mathematics textbook, intuitive verification, rigor proof.