

< 논문 >

# 내부 비정상 유동을 갖는 파이프계의 스펙트럼요소해석

박 중 환\* · 이 우 식†

(2005년 3월 29일 접수, 2005년 10월 28일 심사완료)

## Spectral Element Analysis of the Pipeline Conveying Internal Unsteady Fluid

Jonghwan Park and Usik Lee

**Key Words :** Pipe-dynamics(파이프 동역학), Internal Unsteady Flow(내부 비정상 유동), Spectral Element Method(스펙트럼요소해석)

### Abstract

In this paper, a spectral element model is developed for the uniform straight pipelines conveying internal unsteady fluid. Four coupled pipe-dynamics equations are derived first by using the Hamilton's principle and the principles of fluid mechanics. The transverse displacement, the axial displacement, the fluid pressure and the fluid velocity are all considered as the dependent variables. The coupled pipe-dynamics equations are then linearized about the steady state values of the fluid pressure and velocity. As the final step, the spectral element model represented by the exact dynamic stiffness matrix, which is often called spectral element matrix, is formulated by using the frequency-domain solutions of the linearized pipe-dynamics equations. The FFT-based spectral dynamic analyses are conducted to evaluate the accuracy of the present spectral element model and also to investigate the structural dynamic characteristics and the internal fluid transients of an example pipeline system.

### 1. 서 론

유체를 전송하는 데 사용하는 파이프계(piping system)에는 화학 공장의 파이프, 증기 터빈의 파이프, 송유관, 펌프 유출관, 액체추진 로켓의 파이프 그리고 일상 생활에서 사용하는 파이프 등이 있다. 이러한 파이프는 펌프와 밸브의 작동으로 시간에 따라 변하는 조건 속에서 고속으로 압축된 유체를 이송하는데 사용한다. 일반적으로 유체를 전송하는 파이프가 진동을 하면 파이프 내부 유동장은 파이프 구조진동의 영향을 받아 유동특성이 변화하게 된다. 변화된 내부 유동장은 파이프의 벽과 상호 연계되어 파이프의 동특성을 다시 변화시키는 과정을 반복하게 되고 경우에 따라서는 파

이프 구조의 파괴를 초래할 수 있다. 그러므로, 설계 단계에서 파이프의 구조 진동과 내부 유체의 유동특성을 보다 정확하게 예측하기 위해서 파이프 구조와 유체 사이의 연성(coupling)이 보다 엄밀하게 고려된 파이프 동역학(pipe-dynamics)이론이 사용되어야 한다.

지난 반세기 동안 파이프계의 유체유발 진동의 모델링과 해석에 관한 연구가 많은 연구자들에 의해 이루어졌다.<sup>(1)</sup> 내부 유동에 의한 파이프계의 횡방향 진동을 처음으로 다룬 연구자는 Ashley와 Haviland<sup>(2)</sup>이다. Housner<sup>(3)</sup>가 Ashley와 Haviland<sup>(2)</sup>가 유도한 초기 파이프동역학 방정식을 내부 유동에 코리올리(Coriolis)력의 영향을 포함시켜 수정한 이후 다양한 파이프 동역학 이론이 문헌에 발표되었다. 여기에는 Stein과 Tobriner,<sup>(4)</sup> Chen,<sup>(5)</sup> Païdoussis 등,<sup>(6)</sup> Lesmez 등<sup>(7)</sup>에 의한 선형 이론과 Semler와 Païdoussis,<sup>(8)</sup> Zhang 등,<sup>(9)</sup> Öz<sup>(10)</sup>에 의한 비선형 이론이 포함된다. 현재까지 문헌에 발표된 파이프 동역학 이론을 살펴보면 대부분의 연구에서 단지 파

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학과  
E-mail : Usiklee@inha.ac.kr  
TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

\* 인하대학교 대학원 기계공학과

이프 자체의 구조 진동만을 다루었을 뿐 파이프 진동과 연성된 내부 유동의 동특성은 고려하지 않았다. 단지 파이프 동역학 방정식에서 내부 유체의 속도나 압력을 파이프 진동에 미치는 영향을 고려하기 위한 매개변수로만 사용하였다.

파이프 진동과 내부 비정상유동 사이의 연성을 고려하기 위해 Lee 등<sup>(11)</sup>은 파이프계의 축방향, 반경방향, 횡방향의 진동뿐만 아니라 내부 비정상유동의 압력과 속도까지 모두 변수로 고려한 상호연성된 파이프동역학 운동방정식을 유도하였다. 이후에 내부유동압력으로 인해 발생하는 변형률<sup>(17)</sup>과 반경방향의 셀 진동과 축방향의 장력<sup>(18)</sup>을 고려하기 위한 연구가 이루어졌다.

파이프 동역학 문제에 사용된 해석기법에는 모드해석법(modal analysis method),<sup>(3,11)</sup> Galerkin방법,<sup>(5,6)</sup> 푸리에(Fourier) 및 라플라스(Laplace) 변환법,<sup>(4)</sup> 전달행렬법,<sup>(7)</sup> 유한요소법,<sup>(9)</sup> 유한차분법,<sup>(13)</sup> 특성법(method of characteristics),<sup>(13)</sup> 다중 척도법,<sup>(10)</sup> 파동법(wave approach)<sup>(14)</sup> 등이 있다.

구조의 진동형상은 진동주파수에 따라 변화한다. 따라서, 일반 다항함수를 사용하여 유도하는 일반 유한요소모델의 경우 고 주파수에서 만족할 만한 해석 결과를 얻기 위해서는 미세한 요소분할이 불가피하다. 그러나 유한요소를 구성하는데 있어 주파수의 함수인 동적 형상함수를 사용한다면 미세한 요소분할이 필요 없게 된다. 이것이 동강성법(dynamic stiffness method)의 착안이다.<sup>(15)</sup> 동강성법에서 사용되는 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)은 주파수 영역에서 유도된다는 차이점 이외에는 유한요소법에서 사용하는 유한요소 강성행렬이나 질량행렬을 다루는 동일한 방법으로 다룰 수 있다.

FFT(fast Fourier transforms)기술을 활용하는 동강성법을 특별히 스펙트럼요소법(SEM, spectral element method)이라고도 한다.<sup>(16,17)</sup> 동강성법에서 사용되는 동강성행렬은 주파수 영역에서 구조동역학 방정식을 만족하는 해를 동적 형상함수로 사용하여 엄밀하게 유도되기 때문에 구조요소의 거동을 정확하게 나타낸다. 이러한 이유에서 SEM은 엄밀해법의 하나로 구분되고 있다.<sup>(15-17)</sup> 따라서 유한요소법과 달리 SEM에서는 균일한 구조요소의 경우 요소분할 없이 하나의 유한요소만을 사용하여 엄밀해를 제공한다. 이것은 요소분할을 최소화하여 전체 구조시스템의 총 자유도 수를 크게 줄일 수 있으므로 연산시간을 크게 줄일 수 있다. 이러한 SEM의 장점을 이용하기 위해서 Lee와 Oh<sup>(18)</sup>가 정상유동을 갖는 파이프계에 대한 스펙트럼요소를 유도하고 진동해석과 안정성해석을 수행하였다. 그러나 비정상유동을 갖는 파이프계에 SEM을 적

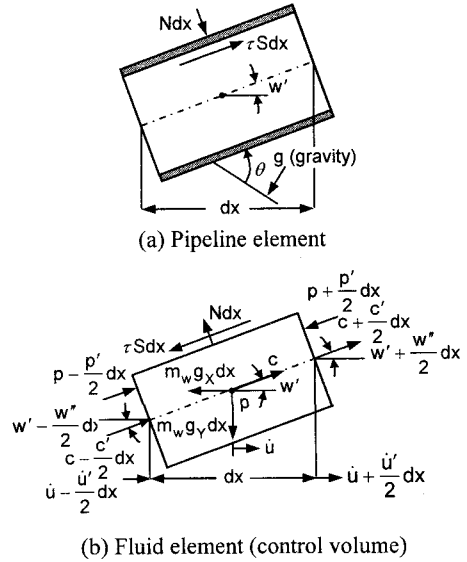


Fig. 1 Free body diagrams for the pipeline and fluid elements

용한 사례는 아직까지 문헌에 발표된 바 없다.

따라서 본 논문에서는 (1) 파이프계의 구조진동뿐만 아니라 내부 비정상 유동의 압력과 속도에 대한 스펙트럼요소 모델을 유도하고, (2) 스펙트럼요소해석을 통하여 예제로 선택한 파이프계의 동특성과 내부 유체의 거동을 고찰하고자 한다.

## 2. 파이프 동역학 방정식

본 연구에서 다루고자 하는 파이프계는 직선 파이프계이며 진폭이 작다고 가정한다. Fig. 1은 미소 파이프계의 구조 요소와 유체 요소를 나타낸다.  $w(x, t)$ 와  $u(x, t)$ 는 파이프의 횡방향과 축방향 변위를 나타내고  $p(x, t)$ 와  $c(x, t)$ 는 유체의 압력과 속도이다.  $N$ 과  $rS$ 는 유체에 의해 파이프 벽에 작용하는 수직방향과 접선방향의 힘을 나타낸다. 여기서  $r$ 는 유체 마찰에 의한 전단응력이고  $S$ 는 파이프의 내부 둘레 길이이다. Fig. 1에서 보이는 바와 같이 직선 파이프는 지면에 대해  $\theta$ 의 각도로 기울어져 있다고 가정하였다. 중력 가속도는 지면에 수직방향으로 작용하고  $g$ 로 나타내었다.

파이프 동역학 방정식과 상응하는 경계조건은 다음의 Hamilton 원리로부터 유도할 수 있다.

$$\int_0^t (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (1)$$

운동에너지  $T$ 와 포텐셜 에너지  $U$ 는 다음과 같다.

$$T = \frac{m_p}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (2)$$

$$U = \frac{EA_p}{2} \int_0^L \left\{ \frac{T_0}{EA_p} + \left( u' + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}w^2 \right) \right\}^2 dx + \frac{EI_p}{2} \int_0^L w''^2 dx$$

여기서, (·)와 (·')은 각각 시간  $t$ 와 공간좌표  $x$ 에 대한 미분을 나타낸다.  $L, E, A_p, I_p, m_p, T_0$ 는 각각 파이프의 길이, 탄성계수, 파이프의 단면적, 파이프의 관성모멘트, 파이프의 단위 길이당 질량, 축 방향으로 작용하는 장력을 나타낸다.

파이프 벽에 작용하는 유체 유발력과 파이프 양단 경계에 작용하는 힘과 모멘트에 의한 가상일  $\delta W$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta W = \int_0^L \{ (\tau S + Nw')\delta u + (\tau Sw' - N)\delta w \} dx + (T_1 - T_0)\delta u(0) + (T_2 + T_0)\delta u(L) + M_1\delta w'(0) + M_2\delta w'(L) + V_1\delta w(0) + V_2\delta w(L) \quad (3)$$

여기서, ( $M_1, V_1, T_1$ )와 ( $M_2, V_2, T_2$ )는 파이프 요소의 입구단과 출구단에 작용하는 모멘트, 횡 방향 전단력, 축 방향 장력을 각각 나타낸다.

식 (2)~(3)을 Hamilton원리 식 (1)에 적용하고 부분적분을 수행하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^L \int_0^t \left\{ \begin{aligned} &(-EI_p w'''' + T_0 w'' - m_p \ddot{w} + \tau Sw' - N) \delta w \\ &+ \{ (EA_p + T_0)u'' - m_p \ddot{u} + \tau S + Nw' \} \delta u \end{aligned} \right\} dx dt + \int_0^t \left\{ \begin{aligned} &-M(x)\delta w'|_0^L + M_1\delta w'(0) + M_2\delta w'(L) \\ &-V(x)\delta w|_0^L + V_1\delta w(0) + V_2\delta w(L) \\ &-T(x)\delta u|_0^L + (T_1 - T_0)\delta u(0) + (T_2 + T_0)\delta u(L) \end{aligned} \right\} dt = 0 \quad (4)$$

여기서,

$$M(x) = EI_p w''(x) \\ V(x) = -EI_p w'''(x) + T_0 w'(x) \\ T(x) = (EA_p + T_0)u'(x) \quad (5)$$

식 (4)로부터 파이프계 횡 방향 및 종 방향의 구조진동에 대한 운동방정식

$$EI_p w'''' - T_0 w'' + m_p \ddot{w} - \tau Sw' + N = 0 \\ (EA_p + T_0)u'' - m_p \ddot{u} + \tau S + Nw' = 0 \quad (6)$$

과 경계조건을 다음과 같이 유도할 수 있다

$$M(0) = M_1 \text{ 또는 } w'(0) = 0 \\ V(0) = V_1 \text{ 또는 } w(0) = 0 \quad (x=0 \text{ 일 때}) \\ T(0) = T_1 \text{ 또는 } u(0) = 0 \quad (7)$$

$$M(L) = M_2 \text{ 또는 } w'(L) = 0 \\ V(L) = V_2 \text{ 또는 } w(L) = 0 \quad (x=L \text{ 일 때}) \\ T(L) = T_2 \text{ 또는 } u(L) = 0$$

Fig. 1(b)의 유체 요소에 뉴턴의 운동법칙을 적용하여 유체의 운동량 방정식(momentum equations)을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$(pA)' + Nw' + \tau S + m_w(g_x + \ddot{u} + \dot{c} + cc' + c\dot{u}') = 0 \quad (8) \\ (pAw')' - N + \tau Sw' + m_w(g_y + \ddot{w} + 2c\dot{w}' + c\dot{w} + c^2 w'' + cc'w') = 0$$

여기서,  $m_w$ 는 유체의 단위 길이당 질량이고  $g_x = g \sin \theta, g_y = g \cos \theta$ 이다. 유체의 연속방정식(continuity equation)은 유체 요소에 질량 보존법칙을 적용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{p}A + a^2 m_w (c' - 2v\dot{u}') = 0 \quad (9)$$

여기서  $a$ 는 유체의 파동속도(wave speed)이다.<sup>(11)</sup>

식 (6)과 식 (8)을 결합하여 유체와 구조의 상호작용력  $N$ 을 소거하고 다음의 관계식<sup>(19)</sup>을 적용한다.

$$\tau S = m_w f c^2 / 2D \quad (10)$$

여기서  $f$ 는 Darcy-Weisbach마찰계수이다. 또한 유체의 전달 효과(convective effect)를 나타내는 항과 크기가 작은 비선형 항, 유체의 중력에 의한 정적 횡 방향 변위를 무시하면 파이프계의 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$EI_p w'''' + (pA - T_0 + m_w c^2)w'' + p'Aw' + m_w(2c\dot{w}' + c\dot{w} + cc'w') + m\ddot{w} = 0 \quad (11) \\ (EA_p + T_0)u'' - m_p \ddot{u} + m_w g_y w' + m_w \frac{f}{2D} c^2 = 0$$

마찬가지로, 내부 유체에 대한 유체동역학 방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{p}A + a^2 m_w (c' - 2v\dot{u}') = 0 \quad (12) \\ p'A + m_w g_y w' + m_w \frac{f}{2D} c^2 + m_w (g_x + \ddot{u} + \dot{c} + cc' + c\dot{u}') = 0$$

여기서,  $m = m_w + m_p$ 이다. 식 (12)의 유체동역학 방정식은 유속  $c$ 에 관한 파동식(wave equation)으로 결합할 수 있으며, 결국 식 (12)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$c'' - \frac{1}{a^2} c\dot{c}' - \frac{1}{a^2} c\dot{c}' - \frac{1}{a^2} \ddot{c} - \frac{f}{a^2 D} c\dot{c} - \frac{g_y}{a^2} \dot{w}' - 2v\dot{u}'' - \frac{1}{a^2} \dot{c}u'' - \frac{1}{a^2} c\dot{u}'' = 0 \quad (13) \\ \dot{p}A + a^2 m_w (c' - 2v\dot{u}') = 0$$

식 (11)과 식 (13)은 상호 연성된 비선형 파이프

동역학 방정식을 나타낸다.

파이프 동역학 방정식을 선형화하기 위해 유속과 압력을 다음과 같이 가정한다.

$$c(x, t) = c_o + c_d(x, t), \quad p(x, t) = p_o + p_d(x, t) \quad (14)$$

여기서,  $c_d(x, t)$ 와  $p_d(x, t)$ 는 정상 상태(steady-state)에서의 값  $c_o$ 와  $p_o$ 에 대한 섭동(small perturbation) 량이며,  $c_d < c_o$  이고  $p_d < p_o$  이라고 가정한다. 식 (14)를 식 (11)과 식 (13)에 대입하고 크기가 작은 비선형 항을 무시하면 다음과 같이 선형화된 파이프 동역학 방정식을 얻을 수 있다.

$$EI_p w'''' + (p_o A - T_o + m_w c_o^2) w'' + 2m_w c_o \dot{w}' + m \dot{w} = 0 \quad (15)$$

$$(EA_p + T_o) u'' - m_p \ddot{u} + m_w g_f w' + m_w \frac{f}{D} c_o c_d + m_w \frac{f}{2D} c_o^2 = 0$$

$$c_d'' - \frac{c_o}{a^2} c_d' - \frac{f}{a^2 D} c_o c_d - \frac{\ddot{c}}{a^2} - \frac{g_f}{a^2} \dot{w}' - 2v \dot{u}' - \frac{c_o}{a^2} \ddot{u}' = 0$$

$$\dot{p}_d A + a^2 m_w (c_d' - 2v \dot{u}') = 0$$

식 (15)와 같이 선형화 된 파이프 동역학 방정식에서는 횡 방향 변위  $w(x, t)$ 가 종 방향 변위  $u(x, t)$ 와 유체유속의 섭동인  $c_d(x, t)$ 에 대해 독립적임을 알 수 있다. 따라서 식 (15a)로부터 횡 방향 변위  $w(x, t)$ 를 구하면 연성된 식 (15b)와 식 (15c)로부터 종 방향 변위  $u(x, t)$ 와 유속의 섭동인  $c_d(x, t)$ 를 구할 수 있고 식 (15d)로부터 유체 압력의 섭동인  $p_d(x, t)$ 를 구할 수 있다.

### 3. 스펙트럼요소 모델의 유도

내부 비정상유동을 갖는 파이프에 대한 스펙트럼요소 행렬을 유도하기 위해 식 (15)의 일반해를 다음과 같이 스펙트럼 형태(spectral form)로 가정한다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^N U_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (16)$$

$$c_d(x, t) = \sum_{n=1}^N C_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad p_d(x, t) = \sum_{n=1}^N P_n(x) e^{i\omega_n t}$$

여기서,  $i = \sqrt{-1}$  이고  $\omega_n = 2\pi n/T$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )는 이산 주파수이고,  $T$ 는 주기,  $N$ 은 스펙트럼 변위성분의 수이다.  $W_n(x)$ ,  $U_n(x)$ ,  $C_n(x)$ ,  $P_n(x)$ 은 각각 동적응답  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $c_d(x, t)$ ,  $p_d(x, t)$ 의 공간에 대한 함수인 스펙트럼 변위성분이다. 스펙트럼 변위성분  $W_n(x)$ ,  $U_n(x)$ ,  $C_n(x)$ ,  $P_n(x)$ 가 계산되면 식 (16)의 시간 영역에서의 진동응답  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $c_d(x, t)$ ,  $p_d(x, t)$ 는 스펙트럼 변위성분에 역 고속 푸리에 변환(inverse FFT) 알고리즘을 적용하여 효율적으로 계산할 수 있다. 식 (16)에서 사용된 합산기호와 아래첨자  $n$ 은 포

현의 간편화를 위하여 이후부터는 생략하였다.

식 (16)을 식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$a_1 W'''' + a_2 W'' + a_3 i\omega W' - a_4 \omega^2 W = 0$$

$$b_1 U'' - b_2 \omega^2 U + b_3 W' + b_4 C + b_5 = 0 \quad (17)$$

$$C'' + c_1 i\omega C' + (c_2 i\omega - c_3 \omega^2) C + c_4 i\omega W' + c_5 i\omega U'' - c_1 \omega^2 U' = 0$$

$$i\omega P + d_1 (C' + c_5 i\omega U') = 0$$

여기서,

$$a_1 = EI_p, a_2 = p_o A - T_o + m_w c_o^2, a_3 = 2m_w c_o, a_4 = m$$

$$b_1 = EA_p + T_o, b_2 = -m_p, b_3 = m_w g_f, b_4 = m_w \frac{f}{D} c_o$$

$$b_5 = m_w \frac{f}{2D} c_o^2, c_1 = -\frac{c_o}{a^2}, c_2 = -\frac{f}{a^2 D} c_o, c_3 = -\frac{1}{a^2}$$

$$c_4 = -\frac{g_f}{a^2}, c_5 = -2v, d_1 = \rho_w a^2$$

스펙트럼요소는 지배방정식의 동차식(homogeneous equation)으로부터 유도한다.<sup>(16-17)</sup> 따라서 식 (17)에서 종 방향 운동방정식의 비동차(nonhomogeneous) 항을 소거하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$a_1 W'''' + a_2 W'' + a_3 i\omega W' - a_4 \omega^2 W = 0$$

$$b_1 U'' - b_2 \omega^2 U + b_3 W' + b_4 C = 0$$

$$C'' + c_1 i\omega C' + (c_2 i\omega - c_3 \omega^2) C \quad (19)$$

$$+ c_4 i\omega W' + c_5 i\omega U'' - c_1 \omega^2 U' = 0$$

$$i\omega P + d_1 (C' + c_5 i\omega U') = 0$$

식 (19)의 일반해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$W(x) = \bar{W} e^{ikx}, \quad U(x) = \bar{U} e^{ikx}, \quad C(x) = \bar{C} e^{ikx}, \quad P(x) = \bar{P} e^{ikx} \quad (20)$$

여기서,  $k$ 는 파수(wavenumber)이다. 식 (20)을 식 (19)에 대입하면 다음의 고유치 문제(eigenvalue problem)를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{W} \\ \bar{U} \\ \bar{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

여기서,

$$K_{11} = a_1 k^4 - a_2 k^2 - a_3 \omega k - a_4 \omega^2$$

$$K_{21} = b_3 i k, \quad K_{22} = -b_2 k^2 - b_2 \omega^2, \quad K_{23} = b_4 \quad (22)$$

$$K_{31} = -c_4 \omega k, \quad K_{32} = -(c_3 i\omega k^2 + c_1 \omega^2 i k)$$

$$K_{33} = -k^2 - c_1 \omega k + c_2 i\omega - c_3 \omega^2$$

식 (21)이 정상해(nontrivial solution)를 갖기 위한 조건으로부터 다음의 분산식(dispersion equation)을 얻을 수 있다.

$$a_1 k^4 - a_2 k^2 - a_3 \omega k - a_4 \omega^2 = 0$$

$$b_1 k^4 + b_1 c_1 \omega k^3 + \{(b_2 + b_1 c_3) \omega^2 - i(b_1 c_2 - b_4 c_5) \omega\} k^2 \quad (23)$$

$$+ (b_2 c_1 \omega^3 + i b_4 c_1 \omega^2) k + b_2 (c_3 \omega - i c_2) \omega^3 = 0$$

식 (23)의 첫 번째 식으로부터 횡 방향 진동모드에 대한 파수( $k_1, k_2, k_3, k_4$ )를 얻을 수 있고, 두 번째 식으로부터 종 방향 진동과 유체 유속이 연성된 모드에 대한 파수( $k_5, k_6, k_7, k_8$ )를 얻을 수 있다.

식 (23)로 구한 8개의 파수를 이용해 식 (19)의 일반해를 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} W(x) &= \sum_{j=1}^4 \bar{W}_j e^{ik_j x} = [e_w(x)] \{ \varphi_w \} \\ U(x) &= \sum_{j=1}^4 \bar{U}_j e^{ik_j x} = [e_{uc}(x)] \{ \varphi_{uc} \} \\ C(x) &= \sum_{j=1}^4 \alpha_j \bar{U}_j e^{ik_j x} = [e_w(x)] [D_{uc}] \{ \varphi_{uc} \} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [e_w(x)] &= [e^{ik_1 x} \ e^{ik_2 x} \ e^{ik_3 x} \ e^{ik_4 x}] \\ [e_{uc}(x)] &= [e^{ik_5 x} \ e^{ik_6 x} \ e^{ik_7 x} \ e^{ik_8 x}] \\ [D_{uc}] &= [diag(\alpha_j)] \quad (j=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (25)$$

식 (24)에서  $\varphi_w$ 와  $\varphi_{uc}$ 는 이후에 소거될 상수 벡터이다. 식 (25)에서  $[diag(\alpha_j)]$ 는 대각 행렬(diagonal matrix)을 나타내며 이 행렬의  $j$ 번째 요소는 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_j = -\frac{K_{22}(k=k_{j+4})}{K_{23}(k=k_{j+4})} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (26)$$

Fig. 2에 나타낸 길이가  $l$ 인 파이프 유한요소를 생각한다. 절점 변위성분에 대한 스펙트럼 자유도(spectral DOF)는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} W(0) &= W_1, \theta(0) = \theta_1, U(0) = U_1, C(0) = C_1, P(0) = P_1 \\ W(l) &= W_2, \theta(l) = \theta_2, U(l) = U_2, C(l) = C_2, P(l) = P_2 \end{aligned} \quad (27)$$

여기서,  $\Theta(x) = W'(x)$ 는 기울기를 나타낸다. 식 (24)를 식(27)에 대입하면 다음과 같은 스펙트럼 자유도 벡터와 상수 벡터 사이의 관계가 주어진다.

$$\{d_w\} = [H_w(\omega)] \{ \varphi_w \}, \quad \{d_{uc}\} = [H_{uc}(\omega)] \{ \varphi_{uc} \} \quad (28)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{d_w\} &= \{W_1 \ \theta_1 \ W_2 \ \theta_2\}^T, \quad \{d_{uc}\} = \{U_1 \ U_2 \ C_1 \ C_2\}^T \\ [H_w(\omega)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_1 & ik_2 & ik_3 & ik_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ ik_1 e_1 & ik_2 e_2 & ik_3 e_3 & ik_4 e_4 \end{bmatrix} \\ [H_{uc}(\omega)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 e_5 & \alpha_2 e_6 & \alpha_3 e_7 & \alpha_4 e_8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

위에서 다음의 정의가 사용되었다.

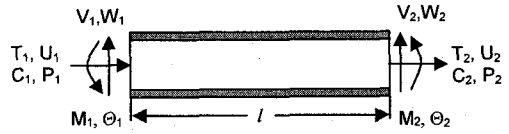


Fig. 2 Sign convention for the pipeline element

$$e_j = e^{ik_j l} \quad (j=1, 2, 3, \dots, 8) \quad (30)$$

식 (28)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{ \varphi_w \} = [H_w(\omega)]^{-1} \{d_w\}, \quad \{ \varphi_{uc} \} = [H_{uc}(\omega)]^{-1} \{d_{uc}\} \quad (31)$$

식 (31)를 식 (24)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(x) &= [N_w(x; \omega)] \{d_w\} \\ U(x) &= [N_u(x; \omega)] \{d_{uc}\} \\ C(x) &= [N_c(x; \omega)] \{d_{uc}\} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서  $[N_w]$ ,  $[N_u]$ ,  $[N_c]$ 는 다음과 같이 정의된 주파수의 함수인 동적 형상함수이다.

$$\begin{aligned} [N_w(x; \omega)] &= [e_w(x)] [H_w(\omega)]^{-1} \\ [N_u(x; \omega)] &= [e_{uc}(x)] [H_{uc}(\omega)]^{-1} \\ [N_c(x; \omega)] &= [e_w(x)] [D_{uc}(\omega)] [H_{uc}(\omega)]^{-1} \end{aligned} \quad (33)$$

스펙트럼요소 행렬은 식 (33)의 동적 형상함수를 이용해 변분법(variational approach)으로부터 유도할 수 있다. 식 (17)에 대한 weak form은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ a_1 W'' \delta W'' + (a_2 + T_0) W'' \delta W \right. \\ \left. + T_0 W' \delta W' + a_1 i \omega W' \delta W - a_1 \omega^2 W \delta W \right\} dx \\ - V_2 \delta W_2 - V_1 \delta W_1 - M_2 \delta \theta_2 - M_1 \delta \theta_1 = 0 \\ \int_0^l \left\{ b_1 U' \delta U' + b_2 \omega^2 U \delta U - b_3 W' \delta U \right\} dx \\ - b_3 C \delta U - b_3 \delta U \\ - T_2 \delta U_2 - T_1 \delta U_1 = 0 \\ \int_0^l \left\{ -C' \delta C' + c_1 i \omega C' \delta C + (c_2 i \omega - c_3 \omega^2) C \right\} dx \\ + c_1 i \omega W' \delta C - c_3 i \omega U' \delta C - c_3 \omega^2 U' \delta C \\ + (i \omega P_2 / d_1) \delta C_2 - (i \omega P_1 / d_1) \delta C_1 = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

여기서,  $M_i, V_i, T_i (i=1, 2)$ 는 식 (5)에서 정의된 것처럼  $x=0, x=l$ 의 두 절점에서의 모멘트, 전단력, 장력의 스펙트럼 성분을 나타낸다. 마찬가지로  $W_i, \theta_i, U_i, C_i, P_i (i=1, 2)$ 는  $x=0, x=l$ 의 두 절점에서 스펙트럼 자유도를 나타낸다. 그리고 식 (17d)를 이용해 식 (34c)를 유도하였다. 식 (33)를 식 (34)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[S(\omega)] \{d\} = \{f\} \quad (35)$$

여기서,  $\{d\}$ 와  $\{f\}$ 는 절점에서의 스펙트럼 자유도 벡터와 힘 벡터이고 다음과 같이 정의된다.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \\ U_1 \\ U_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}, \{f\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ -i\omega P_1/d_1 \\ i\omega P_2/d_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_0^l b_3 N_u^T dx \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \quad (36)$$

식 (35)의 행렬  $[S(\omega)]$ 가 유도하고자 하는 스펙트럼요소 행렬이며 다음과 같이 유도된다.

$$[S(\omega)] = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기서,

$$s_{11} = \int_0^l \left\{ a_1 N_w^{*T} N_w^* + (a_2 + T_0) N_w^T N_w^* + T_0 N_w^{*T} N_w^* \right. \\ \left. + a_3 i\omega N_w^{*T} N_w^* - a_4 \omega^2 N_w^{*T} N_w^* \right\} dx$$

$$s_{21} = \int_0^l \left\{ -b_3 N_u^T N_w^* - c_1 i\omega N_c^T N_w^* \right\} dx \quad (38)$$

$$s_{22} = \int_0^l \left\{ b_1 N_u^{*T} N_u^* + b_2 \omega^2 N_u^T N_u^* - b_1 N_u^T N_{cc} \right. \\ \left. + N_c^{*T} N_c^* - c_1 i\omega N_c^T N_c^* \right. \\ \left. - (c_2 i\omega - c_3 \omega^2) N_c^T N_c^* \right. \\ \left. + c_3 i\omega N_c^{*T} N_c^* + c_1 \omega^2 N_c^T N_c^* \right\} dx$$

식 (37)에서  $s_{12} = 0$  이다. 이는 선형과 과정을 통해 횡 방향 변위가 종 방향 변위와 유속의 섭동으로부터 연계 되어 있지 않음을 의미한다.

스펙트럼요소 모델의 중요한 장점의 하나는 앞서도 언급했듯이 파이프가 구조적으로 균일한 경우 그 길이에 상관없이 단 한 개의 유한요소만으로도 내부 비정상유동을 갖는 파이프의 정확한 동특성을 얻을 수 있다는 곳이다. 물론, 파이프가 기하학적으로 또는 물성적으로 균일하지 않다면 해당 파이프를 몇 개의 유한요소로 분할하는 것이 필요하다. 이러한 경우 스펙트럼요소 행렬을 FEM에서 사용하는 유한요소 결합 방법을 동일하게 활용할 수 있다. FEM과의 주요한 차이점은 Do-loop 방식으로 모든 주파수 성분에 대해 계산을 반복해야 한다는 점이다. 따라서 식 (16)에 보인 스펙트럼 해석에서  $N$ 개의 스펙트럼 성분을 고려한 경우  $N$ 개의 준 정적 문제를 다루는 것으로 생각할 수 있다.

스펙트럼요소식 (35)를 결합하고 경계조건을 적용하면 주파수 영역에서 전체 파이프계에 대한 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[S_g(\omega)]\{d_g(\omega)\} = \{f_g(\omega)\} \quad (39)$$

여기서  $\{f_g\}$ 와  $\{d_g\}$ 는 전체 파이프계의 질점력 벡터와 질점 자유도 벡터이고,  $[S_g(\omega)]$ 는 전체 파이프계에 대한 스펙트럼 행렬이다. 전체 파이프계에 대한 고유진동수는  $[S_g(\omega)]$ 의 행렬식(determinant)이 영이 되는 다음 조건으로부터 구할 수 있다.

$$\det[S_{MAT}(\omega)] = 0 \quad (40)$$

#### 4. 수치 예제 및 고찰

본 연구에서 수치해석 예제로서 다른 파이프계는 Fig. 3에서 보인 양단이 단순지지된 균일한 파이프로서 지표면과 평행을 이루고 있다. 파이프의 길이는  $L = 6000 \text{ mm}$ , 내경  $D = 32.12 \text{ mm}$ , 두께  $t = 1.4 \text{ mm}$ , 탄성계수  $E = 117 \text{ GPa}$ 이다. 파이프와 유체의 단위 길이당 질량은 각각  $m_p = 1.318 \text{ kg/m}$ ,  $m_w = 0.81 \text{ kg/m}$ 이고, 장력은  $T_0 = 82 \text{ N}$ 이다.

본 연구에서 유도된 스펙트럼요소 모델의 정확성은 FEM, 엄밀해<sup>(20)</sup>로부터 얻은 고유진동수를 본 연구의 SEM 결과와 상호 비교하여 증명하였다.

Table 1은 SEM과 엄밀해<sup>(20)</sup> 그리고 FEM으로 구한 처음 3개의 횡 방향 변위 모드에 대한 고유진동수, 첫 번째 종 방향 변위 모드에 대한 고유진동수, 첫 번째 유체 모드에 대한 고유진동수를 비교하고 있다. Table 1에서 FEM해석의 결과는 유한요소의 개수를 10개에서부터 100개까지 증가시키면서 구하였다. 유속  $c_0 = 0 \text{ m/s}$  일 때 본 연구의 SEM으로 구한 고유진동수가 엄밀해<sup>(20)</sup>로 구한 고유진동수와 일치한다. 그리고 Table 1에서 FEM해석의 결과가 모든 유속의 경우에 대해 유한요소의 개수를 증가시키기에 따라 SEM해석의 결과에 점차 수렴해감을 알 수 있다. 본 예제의 경우 SEM해석으로 구한 다섯 번째의 고유진동수와 같은 정확도를 같도록 하기 위해 FEM 해석에서는 적어도 50개 이상의 유한요소를 사용해야 함을 알 수 있다.

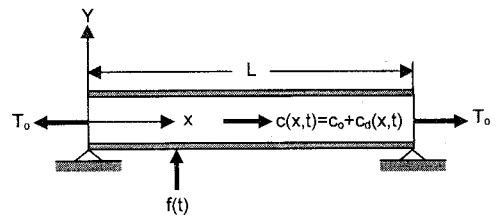


Fig. 3 Example problem: a simply-supported pipeline conveying internal unsteady fluid, subjected to an axial tension  $T_0 = 82 \text{ N}$ .

Table 1로부터 유속이 증가함에 따라 고유진동수가 점차 감소하는 것을 알 수 있다. 유속  $c_0 = 28.65 \text{ m/s}$  일 때 첫 번째 고유진동수가 영이 되는데 이때 정적 불안정 현상인 다이버전스(divergence)가 발생한다.

Fig. 4는 SEM해석과 FEM해석으로 구한 주파수 및 시간 영역에서의 횡 방향 진동변위에 대한 동적응답을 비교하고 있다. 여기서 유속  $c_0 = 10 \text{ m/s}$  이고 파이프를 가진하기 위해 크기가  $1 \text{ kN}$  인 점

(point)하중을  $0.001$ 초 동안  $x = L/5$  지점에서 가하였으며, 동적응답은 가진점에서 측정하였다. Fig. 4에서 FEM해석으로 구한 동적응답이 유한요소의 개수를 증가시키기에 따라 SEM해석의 결과에 수렴해가는 것을 알 수 있다. 따라서 Table 1과 Fig. 4의 결과는 SEM해석의 정확성을 증명하고 있다.

Fig. 5는 유속에 따라 변하는 처음 3개의 고유진동수의 실수 값과 허수 값을 보이고 있다. 고유진동수의 허수 부가 음의 값을 갖고 실수 부가 영인

Table 1 Eigenfrequencies(Hz) of the pipeline obtained by the present SEM, FEM and the exact theory<sup>(20)</sup>

Fluid Velocity (m/s)	Method	N	$\omega_1^{(w)}$	$\omega_2^{(w)}$	$\omega_3^{(w)}$	$\omega_4^{(w)}$	$\omega_6^{(c)}$	$\omega_{12}^{(u)}$
0	Exact[25]	-	1.47	5.89	13.26	23.57	51.98	150.73
	SEM	1	1.47	5.89	13.26	23.57	51.98	150.73
		10	1.47	5.89	13.27	23.61	52.03	157.39
		20	1.47	5.89	13.26	23.58	51.99	150.77
		50	1.47	5.89	13.26	23.58	51.98	150.74
100	1.47	5.89	13.26	23.57	51.98	150.74		
10	SEM	1	1.37	5.81	13.18	23.50	52.00+0.47i	150.74+0.02i
		10	1.37	5.81	13.19	23.54	52.03+0.47i	150.89+0.02i
		20	1.37	5.81	13.18	23.50	51.99+0.47i	150.77+0.02i
		50	1.37	5.81	13.18	23.50	51.98+0.47i	150.74+0.02i
	100	1.37	5.81	13.18	23.50	51.98+0.47i	150.74+0.02i	
20	SEM	1	1.03	5.55	12.94	23.26	51.97+0.86i	150.74+0.03i
		10	1.03	5.55	12.95	23.30	52.03+0.86i	150.89+0.03i
		20	1.03	5.55	12.94	23.26	51.99+0.86i	150.77+0.03i
		50	1.03	5.55	12.94	23.26	51.98+0.86i	150.74+0.03i
	100	1.03	5.55	12.94	23.26	51.97+0.86i	150.74+0.03i	
28.65	SEM	1	0.00	5.18	12.59	22.93	52.00+1.18i	150.74+0.04i
		10	0.00	5.18	12.60	22.97	52.02+1.18i	150.89+0.04i
		20	0.00	5.18	12.59	22.93	51.98+1.18i	150.77+0.04i
		50	0.00	5.18	12.59	22.93	51.97+1.18i	150.74+0.04i
	100	0.00	5.18	12.59	22.93	51.97+1.18i	150.74+0.04i	

Note : N = number of finite elements; (w) = transverse displacement (bending) mode; (u) = axial displacement mode; (c) = fluid mode

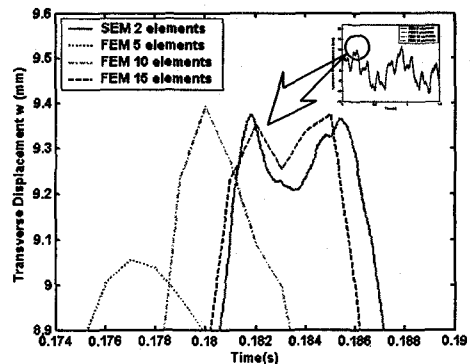
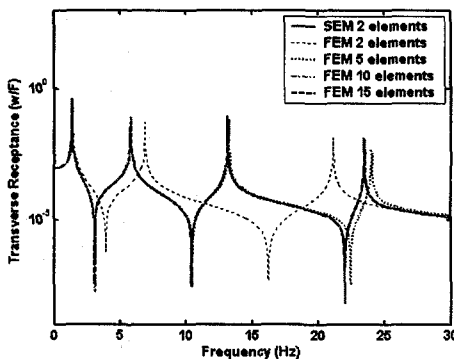
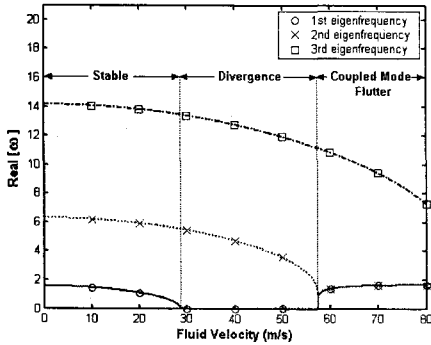
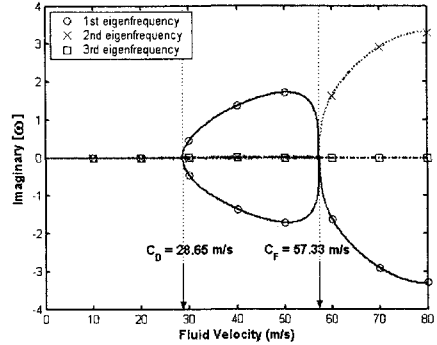


Fig. 4 Comparisons of the transverse displacements at  $x = L/5$  in the frequency and time domains obtained by the present SEM and FEM

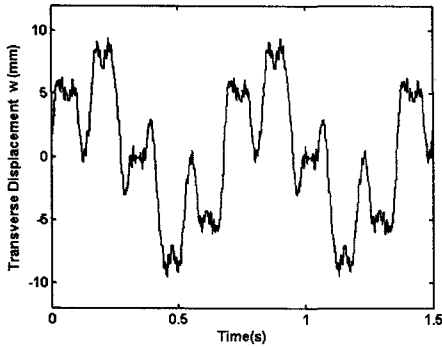


(a) Real part of the eigenfrequency  $\omega$

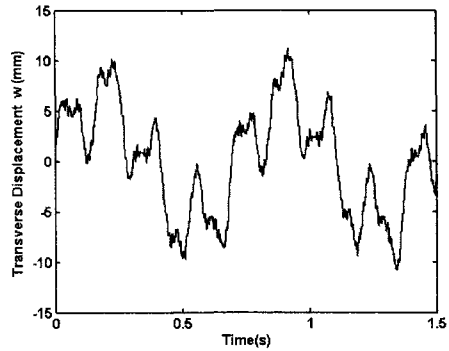


(b) Imaginary part of the eigenfrequency  $\omega$

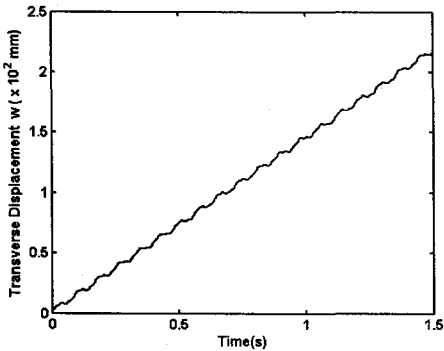
Fig. 5 Fluid velocity dependence of the lowest three eigenfrequencies of pipeline



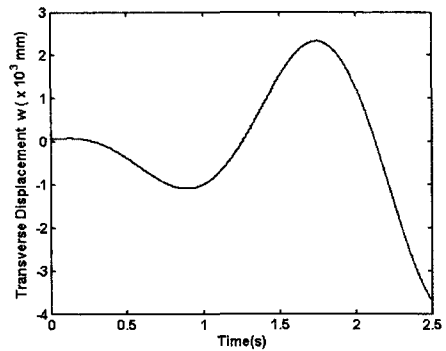
(a)  $c_0 = 0 \text{ m/s}$



(b)  $c_0 = 10 \text{ m/s}$



(c)  $c_0 = 28.65 \text{ m/s}$  ( $C_D$ )



(d)  $c_0 = 57.33 \text{ m/s}$  ( $C_F$ )

Fig. 6 The transverse displacement of the pipeline at  $x = L/5$  vs. the fluid velocity  $c_0$

경우 발산 불안정 상태가 일어나고, 반면에 허수 부가 음의 값을 갖고 실수 부가 영이 아닌 경우에는 플러터(flutter) 현상이 발생한다. 본 예제의 경우, Fig. 5에서  $c_0 = 28.65 \text{ m/s}$  (즉, 발산속도  $C_D$ )일 때 첫 번째 횡 방향 모드가 발산으로 불안정 상태가

되고,  $c_0 = 57.33 \text{ m/s}$  (즉, 플러터 속도  $C_F$ )일 때 플러터가 된다. Fig. 6은 발산 속도와 플러터 속도를 포함한 네 개의 다른 유속에 대해  $x = L/5$  지점에서 측정된 횡 방향 변위의 시간응답이다. 이 때 하중 조건은 Fig. 4에서 파이프를 가진할 때의 하중 조



건을 사용하였다.

식 (15)는 파이프의 종 방향 진동 변위가 유속의 섭동과 연성되어 있음을 의미하는데 이 때는 외력의 가진 없이 정상 상태의 유속 자체만으로도 가진이 됨을 알 수 있다. 또한 종 방향 진동 변위와 유속의 섭동은 식 (15)의 마지막 식에서 유체 압력의 섭동을 발생시킨다. Fig. 7은 파이프 입구에서의 네 가지의 다른 입력 유속(즉,  $c_0 = 10 \text{ m/s}$ ,  $c_0 = 25 \text{ m/s}$ ,  $c_0 = 28.65 \text{ m/s}$ ,  $c_0 = 57.33 \text{ m/s}$ )에 의해 가진되는 파이프의 종 방향 진동 변위를  $x = L/2$  지점에 측정된 것이고 Fig. 8와 Fig. 9는 Fig. 7에 상응하는 유속의 섭동과 유체 압력의 섭동을 각각 나타내고 있다. Figs. (7)~(9)로부터 유속이 증가함에 따라 파이프의 종 방향 진동 변위, 유속의 섭동, 유체 압력의 섭동이 증가함을 알 수 있다.

Fig. 10은 파이프 입구에서의 유속을  $c_0 = 10(1+0.001\sin104\pi t) \text{ m/s}$ 로 조절할 때, 파이프의 종 방향 진동 변위와 유속 및 유압의 섭동량을 보여주고 있다. Fig. 10에서 모든 응답은 시간이 갈수록 증가함을 알 수 있다. 이는 유속  $c_0 = 10 \text{ m/s}$ 일 때 유체

의 첫 번째 고유진동수(Table 1)와 거의 같은 값인 52Hz의 주파수로 파이프 입구에서 유속을 가진하기 때문이며 이는 일종의 공진현상이 발생함을 보여주고 있다.

### 5. 결론

본 연구에서는 내부에 비정상유동을 갖는 파이프계의 스펙트럼요소 모델을 유도하였다. 이를 위해 먼저 파이프의 종 방향 변위, 횡 방향 변위 그리고 내부 유체의 유속과 압력을 모두 독립변수로 다룬 네 개의 미분방정식으로 구성된 파이프 동역학 방정식을 유도하였다. 다음으로 주파수 영역에서의 파이프 동역학 방정식으로부터 구한 과도해를 이용해 스펙트럼요소 모델을 유도하였다. 본 연구의 SEM과 기존의 FEM으로 구한 고유진동수를 상호 비교함으로써 유도된 스펙트럼요소 모델의 정확성을 확인하였고, 마지막으로 스펙트럼요소 해석을 통해 내부 비정상 유동을 갖는 파이프 예제의 동적 안정성과 진동특성을 고찰하였다.

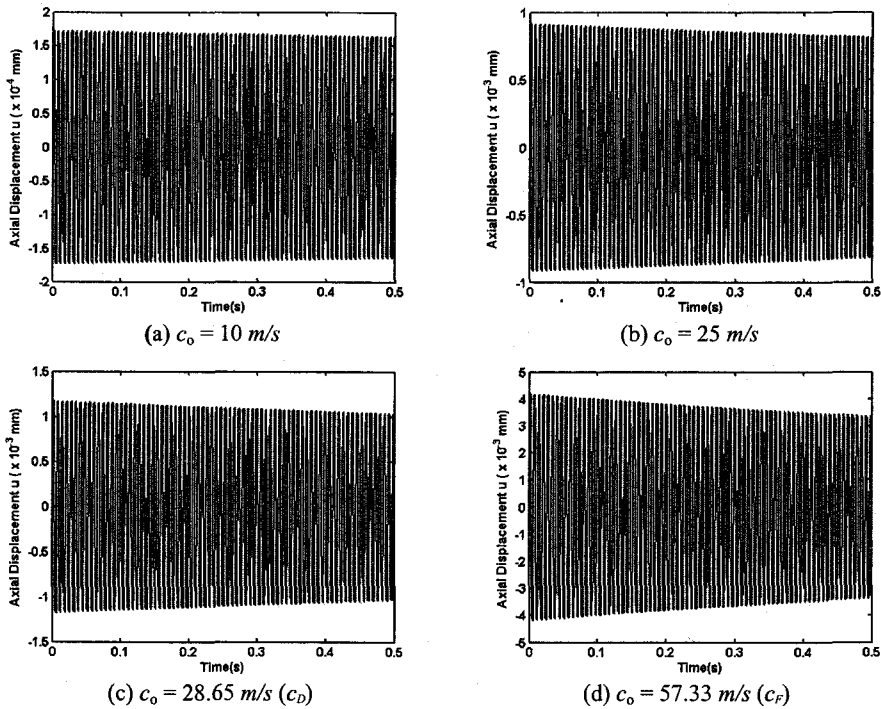


Fig. 7 The axial displacement of the pipeline at  $x = L/2$  vs. the fluid velocity  $c_0$

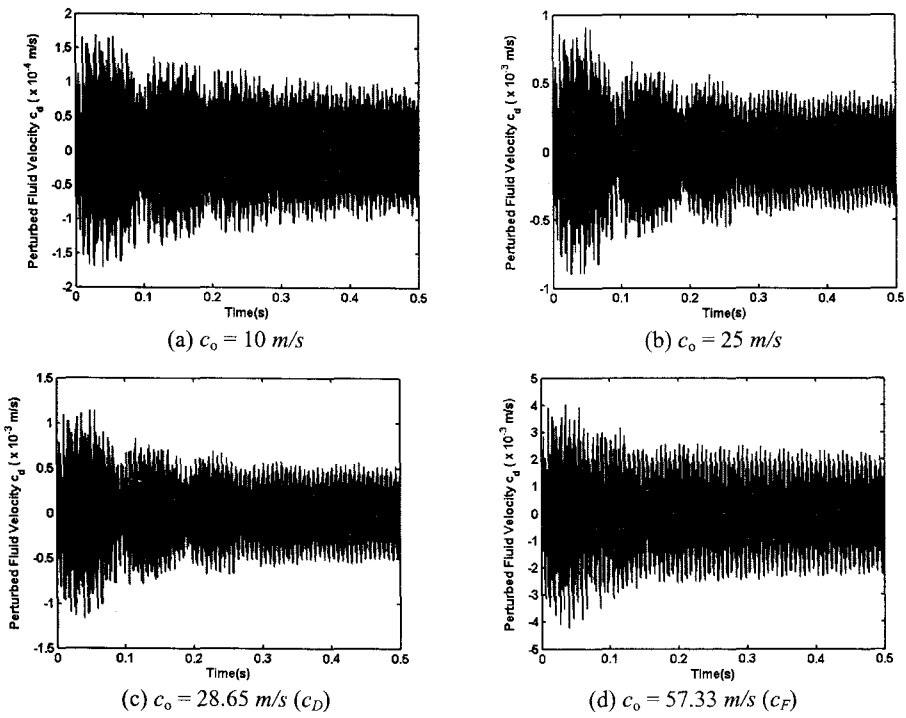


Fig. 8 The perturbed fluid velocity at  $x = L/2$  vs. the fluid velocity  $c_0$

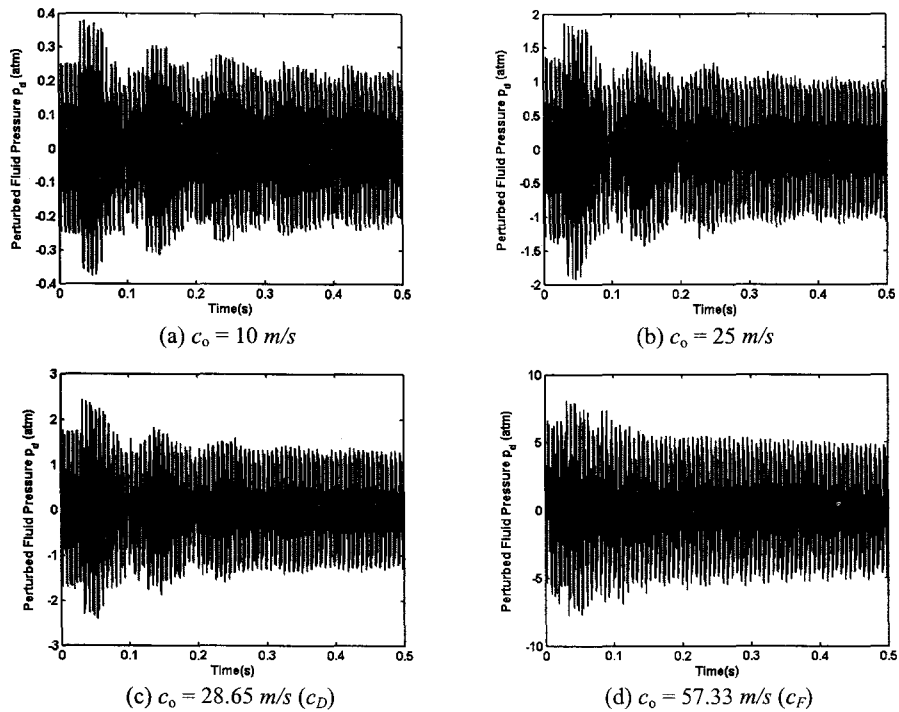


Fig. 9 The perturbed fluid pressure at  $x = L/2$  vs. the fluid velocity  $c_0$ .

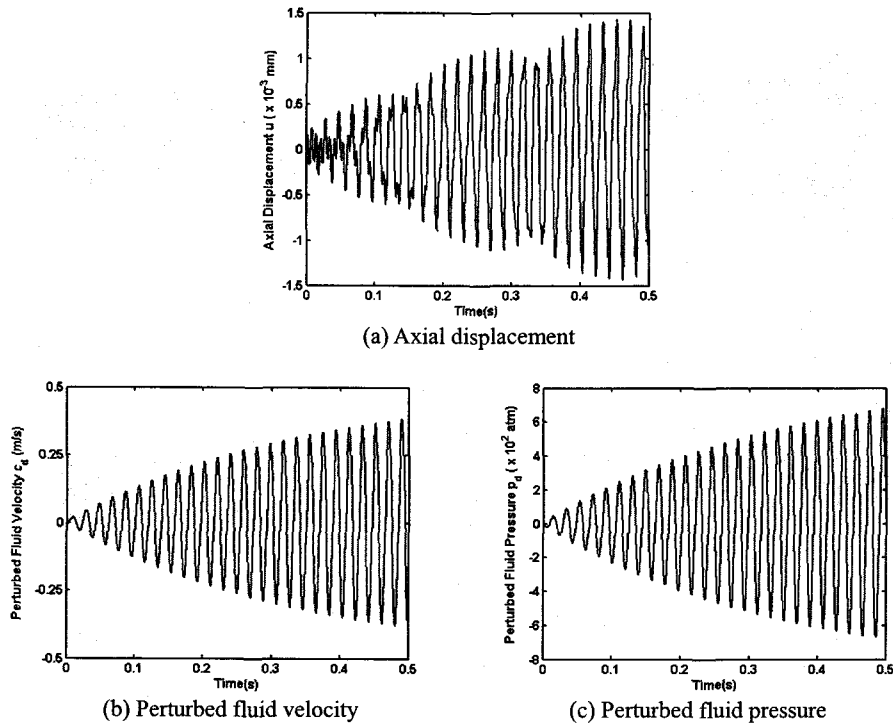


Fig. 10 The axial displacement and the perturbed fluid velocity and pressure at  $x = L/2$  when  $c_0 = 10(1+0.001\sin 102\pi t)$  m/s at the inlet of the pipeline

### 참고문헌

- (1) Païdoussis, M. P. and Li, G. X., 1993, "Pipes Conveying Fluid: A Model Dynamical Problem," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 7, pp. 137~204.
- (2) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of A Pipeline Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 72, pp. 229~232.
- (3) Housner, G.W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, pp. 205~209.
- (4) Stein, R. A. and Tobriner, December 1970, "Vibration of Pipes Containing Flowing Fluids," *Journal of Applied Mechanics*, pp. 906~916.
- (5) Chen, S. S., 1971, "Dynamic Stability of Tube Conveying Fluid," *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 97, pp. 1469~1485.
- (6) Païdoussis, M. P., Luu, T.R. and Laither, B. E., 1986, "Dynamics of Finite-Length Tabular Beams Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 106, No. 2, pp. 311~331.
- (7) Lesmez, M. W., Wiggert, D. C. and Hatfield, F. J., 1990, "Modal Analysis of Vibrations in Liquid-Filled Piping Systems," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 109, No. 3, pp. 311~318.
- (8) Semler, C., Li, G.X. and Païdoussis, M. P., 1994, "The Non-linear Equations of Motion of Pipes Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 5, pp. 577~599.
- (9) Zhang, Y. L., Gorman, D. G. and Reese, J. M., 1999, "Analysis of The Vibration of Pipes Conveying Fluid," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 213, pp. 849~860.
- (10) Öz, H. R., 2001, "Non-linear Vibrations and Stability Analysis of Tensioned Pipes Conveying Fluid with Variable Velocity," *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 36, pp. 1031~1039.
- (11) Lee, U., Pak, C. H. and Hong, S. C., 1995, "The Dynamics of a Piping System with Internal Unsteady Flow," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 2 pp. 297~311
- (12) Lee, U. and Kim, J., 1999, "Dynamics of Branched Pipeline Systems Conveying Internal Unsteady Flow," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, pp. 114~122.
- (13) Gorman, D. G., Reese, J. M. and Zhang, Y. L., 2000 "Vibration of a Flexible Pipe Conveying Viscous Pulsating Fluid Flow," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 2, pp. 379~392.
- (14) Koo, G. H. and Park, Y. S., 1998, "Vibration Reduction by Using Periodic Supports in a Piping Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, No. 1 pp. 53~68.
- (15) Banerjee, J. R., 1997, "Dynamic Stiffness Formulation for Structural elements: A General Approach," *Computers & Structures*, Vol. 63, No. 1, pp. 101~103.

- (16) Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*, 2nd ed, Springer-Verlag, New York.
- (17) Lee, U., Kim, J. and Leung, A. Y. T., 2000, "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 6, pp. 451~465.
- (18) Lee, U. and Oh, H., 2003, "The Spectral Element Model for Pipelines Conveying Internal Steady Flow," *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 1045~1055.
- (19) Hansen, A. G., 1967, *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
- (20) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.