Commun. Korean Math. Soc. **20** (2005), No. 4, pp. 623–640

초청논문

특수함수의 q-유사에 관한 소고

손진우

ABSTRACT. 본 논문에서는 양정수 n의 q-유사를 이용한 q-이항정리, q-차례곱, q-차분 연산자, q-적분에 관한 최근의 기본개념을 정리하고, 이를 적용하여 q-베타함수와 q-감마함수의 새로운 q-유사에 대한 특징을 간략하게 논한다.

1. 머리말

이 논문의 논거를 확립하기 위하여 먼저 실수체와 복소수체 위에서 q-유사의 의미를 생각하자. $q \neq 1$인 복소수에 대하여 양정수 n의 q-유사는

$$[n]_q = [n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

로 정의한다. $q \to 1$이면 $[n]_q \to n$이고, 이것이 q-유사의 징표이다. 즉 $q \to 1$일 때의 극한이 고전적인 내용들을 포괄한다. 고전적인 해석학에서의 많은 함수들에 q-유사가 있다([1–13],[15],[17],[18]). 예를 들면 기하급수

$$(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1$$

과 복소수 $a \in \mathbb{C}$에 대해

$$1 + \frac{q^a - 1}{q - 1} z + \frac{(q^a - 1)(q^{a+1} - 1)}{(q-1)(q^2-1)} z^2 + \cdots = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{a+n} z}{1 - q^n z}$$

는 q-유사이다. 위 식에서 무한곱에 의미를 부여하기 위해 $|q| < 1$, $q \in (0,1)$로 가정한다. 그러나 형식적으로 q를 확정하지 않기도 한다. q-유사는 분할문제, 보형함수, 양자군 등의 분야와 관련이 깊다. 특히 양자군의 이론에서는 양자화나 변형을 통하여 보다 다양하게 연구할 수 있

Received September 7, 2005.
2000 Mathematics Subject Classification: 05A30.
Key words and phrases: q-유사, q-차분 연산자, q-베타함수, q-감마함수.

다. q-유사는 q-확장 또는 q-일반화라고 부르기도 하는데, 이미 알려진 q에 의한 매개식의 수학적 표현이라고 볼 수도 있다. 차례곱, 이항계수, 미분, 적분, 피보나치 수열 등에 q-유사가 있음을 알 수 있다. q-유사는 영어로 q-analogue 또는 q-analog로 쓴다([2],[18,p.7],[19,p.26]). 이런 혼동을 피하기 위해 앤드류즈[2]는 q-확장으로도 썼다.

2절은 이미 알려진 사실들과 기호의 소개이고, q-유사의 "q"는 편의상 부정원으로 취급한다. 3절에서는 뉴우턴의 전차보간공식의 q-유사를 다루고, 4절에서는 q-로그함수와 q-적분에 대하여 언급한다. 5절에서는 3절에서의 개념을 확장한 q-차례곱에 의한 q-베타와 q-감마함수의 새로운 q-유사를 논한다. 마지막 6절에서는 본 논문에서 요약한 참고문헌과 앞으로 연구에 대한 참고문헌을 간단히 언급한다.

2. q-유사 공식의 재론

먼저 이 논문에서 많이 사용하게 될 q-유사 성질에 대하여 논의하고, q-이항 계수와 q-이항정리에 대하여 알아본다([6]). 이 정리는 꼬오시[5,p.46]로 거슬러 올라간다. 정수 n과 부정원 q에 대하여 n의 q-유사는 $[n]_q = (q^n-1)/(q-1)$로 정의된다. 예를들면 $[0]_q = 0, [1]_q = 1, [2]_q = 1+q, [-1]_q = -\frac{1}{q}$ 이다. $n \geq 1$이면 $[n]_q = 1+q+\cdots+q^{n-1}$로 부정원 q에 대해 정수계수 다항식환 $\mathbb{Z}[q]$에 속하는 $(n-1)$-차 다항식이다. 또한 정수 m, n에 대하여

$$[-n]_q = -\frac{1}{q^n}[n]_q, \quad [n]_{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{n-1}}[n]_q, \quad [mn]_q = [m]_q[n]_{q^m}$$

이고, 특히 $q=1$이면 $[n]_q = n$이다. q-차례곱은 다음과 같이 정의된다.

$$[n]_q! := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q, & n \geq 1. \end{cases}$$

예를 들면, $[1]_q! = 1$, $[2]_q! = 1+q$, $[3]_q! = 1+2q+2q^2+q^3$ 이고

$$[n]_{1/q}! = \frac{1}{q^{n(n-1)/2}}[n]_q!$$

이다. 음이 아닌 정수 m, n $(m \geq n)$에 대해 q-이항계수는

$$\binom{m}{n}_q = \frac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q^{m-n+1}-1)}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)}$$

이고, 다음 관계식을 만족한다.

$$\binom{m}{n}_q = \binom{m-1}{n-1}_q + q^n\binom{m-1}{n}_q = \binom{m-1}{n}_q + q^{m-n}\binom{m-1}{n-1}_q.$$

또한

$$\binom{m+n+1}{n+1}_q = \binom{m+n}{n+1}_q + q^m \binom{m+n}{n}_q = \sum_{k=0}^{m} q^k \binom{k+n}{n}_q$$

임을 알 수 있다. 다음 식은 원래 가우스에 의해 알려진 것이다. 고정된 두 정수 $m \ge n \ge 0$에 대하여 $\binom{m}{n}_q \in \mathbb{Z}[q]$ 이고 차수는 $n(m-n)$이다. n이 자연수이고 $q \in (0,1)$라 하면 가우스 계수의 수열 $\{\binom{n}{k}_q \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$은

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q, \ k = 0, 1, \ldots, n, \\
&\binom{n}{0}_q < \binom{n}{1}_q < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}}_q > \binom{n}{\frac{n}{2}+1}_q > \cdots > \binom{n}{n}_q, \ n\text{: 짝수}, \\
&\binom{n}{0}_q < \binom{n}{1}_q < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}}_q = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}_q > \cdots > \binom{n}{n}_q, \ n\text{: 홀수}
\end{aligned}$$

을 만족한다. 그러므로 수열 $\{\binom{n}{k}_q \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$의 반 부분들은 각각 단조적이다. 더구나 모든 정수 $m \in \mathbb{Z}$ $(k \ge j \ge 0)$에 대해 다음 항등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\binom{m}{n}_q = \frac{[m]_q}{[n]_q}\binom{m-1}{n-1}_q, \quad \binom{m}{n}_{1/q} = \frac{1}{q^{n(m-n)}}\binom{m}{n}_q, \\
&\binom{m}{k}_q \binom{k}{j}_q = \binom{m}{j}_q \binom{m-j}{k-j}_q, \\
&\binom{-m}{n}_q = (-1)^n q^{\frac{-n(n-1)}{2} - mn} \binom{m+n-1}{n}_q \\
&\qquad = (-1)^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}} \binom{m+n-1}{n}_{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

부정원 q에 대해 꼬오시에 의한 이항정리의 q-유사는 $m \ge 1$일 때

$$(1+T)(1+qT)\cdots(1+q^{m-1}T) = \prod_{i=0}^{m-1}(1+q^iT) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}_q q^{k(k-1)/2} T^k$$

임을 알 수 있다. 동치적으로 가환적인 두 변수 X, Y에 대해

$$\prod_{i=0}^{m-1}(X + q^iY) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}_q q^{k(k-1)/2} X^{m-k} Y^k$$

임을 알 수 있다. 특히 $Y = -1$이면

$$(X-1)(X-q)\cdots(X-q^{m-1}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}_q (-1)^k q^{k(k-1)/2} X^{m-k}$$

임도 알 수 있다. $\binom{m_1+m_2}{k}_q$에 대한 q-반더몽드 공식은 통상의 이항계수에 대한 식으로 증명된다. 다음 식의 양변에서 T^k의 계수를 비교하면

$$\prod_{i=0}^{m_1+m_2-1} (1+q^iT) = \prod_{i=0}^{m_2-1} (1+q^iT) \prod_{i=0}^{m_1-1} (1+q^iq^{m_2}T)$$

이고, $m_1, m_2 \geq 0$에 대해

$$\binom{m_1+m_2}{k}_q = \sum_{j=0}^{k} \binom{m_1}{j}_q \binom{m_2}{k-j}_q q^{j(m_2-(k-j))}$$

이다. 사실 위 정리는 모든 정수 m_1, m_2에 대하여도 성립한다. 또한

$$\binom{m}{n}_{q_1} - \binom{m}{n}_{q_2} \in (q_1 - q_2)\mathbb{Z}[q_1, q_2], \quad m, n \geq 0$$

인 사실도 쉽게 얻을 수 있다.

3. q-차분 연산자

이 절에서는 q-차분 연산자에 대하여 논한다. 차분연산자 $\triangle$의 n-거듭제곱 $\triangle^n$은 $(\triangle h)(x) = h(x+1) - h(x)$, x는 정수변수로 정의되고, 이 차분 연산자는 잭슨(Jackson, [13])에 의해 소개된 q-유사 차분 연산자 $\triangle_q^n$로 확장된다. 연속적인 변수의 차가 일정하게 h라면 임의의 정수 변수 x는 $x_k = x_0 + kh, k \in \mathbb{Z}$로 나타낼 수 있고 이에 대응하는 함수값은

$$f(x_k) = f(x_0 + kh) = f_k$$

로 나타내자. 변이연산자 E_h는 $E_h(f_k) = f(x_k + h) = f(x_{k+1})$와 같이 정의된다. 변이연산자 E_h를 한번 더 적용하면

$$E_h^2 f(x_k) = E_h(E_h f(x_k)) = f(x_k + 2h) = f(x_{k+2}) = f_{k+2}$$

이고 거듭 E_h를 적용하면 일반적으로

$$E_h^r f(x_k) = f_{k+r}, \quad r \in \mathbb{N}$$

임을 알 수 있다.

칼리츠(Carlitz)에 의한 뉴우턴 전진차분보간공식의 q-유사식을 아래와 같이 생각하자([6],[15]).

$$(3.1)\qquad \triangle_{q,h}^{n}=\begin{cases} I, & n=0,\\ (E_h-q^{n-1})\cdots(E_h-q)(E_h-I), & n\geq 1.\end{cases}$$

양정수 n에 대하여

$$\triangle_{q,h}^{n}f_k=(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}_q f_{k+i}q^{i(i-2n+1)/2}$$

를 얻을 수 있고, 특히 $k=0$이면

$$(3.2)\qquad \triangle_{q,h}^{n}f_0=(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}_q f_i q^{i(i-2n+1)/2}$$

이다. 이항전개를 사용하면

$$(3.3)\qquad f_k=f_0+\binom{k}{1}_q\triangle_{q,h}f_0+\binom{k}{2}_q\triangle_{q,h}^{2}f_0+\cdots+\triangle_{q,h}^{k}f_0$$

이다. 따라서 $f_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}_q\triangle_{q,h}^{i}f_0$이다. 이제 실수 $\mathbb{R}$에서 함수 $f(x)$의 n-차 q-차분에 대한 q-유사정리를 생각하자. (3.2),(3.3)에 의해 다음 정리를 얻는다.

정리 3.1. [15] 다항식 환 $\mathbb{R}[q]$에서 값을 갖는 모든 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}[q]$에 대응하는 모든 $n\geq 1$에 대한 $\triangle_{q,h}^{n}$을 (3.1)에서의 차분연산자라 하면 다음을 얻을 수 있다.

(1) $\triangle_{q,h}^{n}f(x)=(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}_q f(x+ih)q^{i(i-2n+1)/2}$.
(2) $f(x+nh)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}_q\triangle_{q,h}^{i}f(x)$.

만약 $f_q(x)=q^{2x}$라 두면 $\triangle_q^3 q^{2x}=0$이다. 그리고 여기서 3차 q-차분은 0임을 알 수 있다. 일반적으로 $f_q(x)$가 다항식 q^{nx}의 q-수치함수라면 이의 $(n+1)$차분은 0이다.

정의 3.2. $\triangle_q^{n+1}f_q(x)=0$을 만족하는 최소의 양정수 n을 $f_q(x)$의 차수라고 한다.

q에 관한 q-차례곱 다항식은

$$(3.4)\qquad [x]_q^{(m)}=\begin{cases} 1, & m=0,\\ [x]_q[x-1]_q\cdots[x-m+1]_q, & m\geq 1\end{cases}$$

이다([3–4],[13]). (3.1)에서 $h = 1$로 하고 $\triangle_q^n = \triangle_{q,1}^n$이라 두면, 각각의 정수 m에 대해

$$\triangle_q [x]_q^{(m)} = -q^{x+1}[-m]_q[x]_q^{(m-1)}$$

이다. 같은 방법으로

$$\triangle_q^n [x]_q^{(m)} = (-1)^n q^{n(x+(n+1)/2)}[-m]_q[-m+1]_q \cdots [-m+n-1]_q[x]_q^{(m-n)}$$

임을 알 수 있다. 그러므로 $\triangle_q^{m+1}[x]_q^{(m)} = 0$이다. 즉 m은 q-차례곱 다항식의 차수이다. 식(3.4)의 관점에서 q-차례곱 다항식인 임의의 m-차 다항식 $f_q(x)$를 표현해 보는 것은 의미있다. 즉

$$f_q(x) = a_0 + a_1[x]_q^{(1)} + a_2[x]_q^{(2)} + \cdots + a_m[x]_q^{(m)}$$

이면 $a_0 = f_q(0)$이므로 식 (3.4)에 의해

$$\triangle_q f_q(x) = -q^{x+1}([-1]_q a_1 + [-2]_q a_2 [x]_q^{(1)} + \cdots + [-m]_q a_m [x]_q^{(m-1)})$$

임을 알 수 있다. 만약 위 식에 $x = 0$라 두면

$$[1]_q a_1 = -q[-1]_q a_1 = \triangle_q f_q(0)$$

이다. 같은 방법으로

$$a_2 = \frac{\triangle_q^2 f_q(0)}{[2]_q!}$$

이고 귀납적으로

$$a_j = \frac{\triangle_q^j f_q(0)}{[j]_q!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

임을 알 수 있다. 그러므로 다음 정리를 얻는다.

정리 3.3. [15] *$f_q(x)$가 q-차례곱 다항식인 m차의 다항식이라 하면*

$$f_q(x) = f_q(0) + \triangle_q f_q(0)[x]_q^{(1)} + \frac{\triangle_q^2 f_q(0)}{[2]_q!}[x]_q^{(2)} + \cdots + \frac{\triangle_q^m f_q(0)}{[m]_q!}[x]_q^{(m)}$$

이다.

$f_q(x)$가 q-차례곱 다항식인 m-차 다항식이라 하자. 즉

(3.5) $f_q(x) = a_0 + a_1[x-x_0]_q + \cdots + a_m[x-x_0]_q[x-x_1]_q \cdots [x-x_{m-1}]_q$

이고 $f_q(x_0) = f_{0,q}, f_q(x_1) = f_{1,q}, \cdots, f_q(x_m) = f_{m,q}$라 하면

$$f_q(x_i) = f_{i,q} = a_0 + a_1[ih]_q + a_2[ih]_q[(i-1)h]_q + \cdots + a_i[ih]_q \cdots [h]_q$$

이다. 단, $0 \le i \le m$이고 $x_k = x_0 + kh, k \in \mathbb{Z}$이다. 그러므로

$$a_i = \frac{1}{[ih]_q \cdots [h]_q} \triangle_{q^h,h}^i f_{0,q}, \quad 0 \le i \le m$$

임을 알 수 있다. 따라서 위 식을 (3.5)에 대입하면 다음과 같다.

$$f_q(x)=f_{0,q}+\frac{\triangle_{q^h,h}f_{0,q}}{[h]_q}[x-x_0]_q+\cdots+\frac{\triangle_{q^h,h}^m f_{0,q}}{[mh]_q\cdots[h]_q}[x-x_0]_q\cdots[x-x_{m-1}]_q.$$

이 식에 $h=1$이라 두면 $x_k=x_0+k, k\in\mathbb{Z}$이고, 또 $[x-x_0]_q=[u]_q$라 두면 다음 정리를 얻는다.

정리 3.4. [15] (뉴우턴의 전진차분 보간공식의 q-유사) *$f_q(x)$가 q-차례곱 다항식으로 m차 다항식이라 하면*

$$f_q(x)=f_{0,q}+\frac{\triangle_{q^h,h}f_{0,q}}{[h]_q}[u]_q+\cdots+\frac{\triangle_{q^h,h}^m f_{0,q}}{[mh]_q\cdots[h]_q}[u]_q[u-1]_q\cdots[u-m+1]_q$$

이다. 특히 $x_0=0$라 두면 정리 3.3이 된다. 즉

$$f_q(x)=f_q(0)+\triangle_q f_q(0)[x]_q^{(1)}+\frac{\triangle_q^2 f_q(0)}{[2]_q!}[x]_q^{(2)}+\cdots+\frac{\triangle_q^m f_q(0)}{[m]_q!}[x]_q^{(m)}$$

임을 알 수 있다.

4. q-로그와 q-적분의 몇가지 성질

이 절에서는 참고문헌 [12]에 있는 기호와 정의를 사용하기로 한다. k-차 다중로그의 q-유사는 다음으로 정의한다.

$$\mathrm{Li}_k(z:q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(1-q^n)^{k-1}}, \tag{4.1}$$

여기서 $|z|<1$이고 $0<q<1$이다. 형식적으로 항별 극한을 생각하면

$$\lim_{q\to 1^-}(1-q)^{k-1}\mathrm{Li}_k(z:q)=\mathrm{Li}_k(z)$$

이므로, 다중로그는

$$\mathrm{Li}_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}=\int_0^z \mathrm{Li}_{k-1}(t)\frac{dt}{t},\quad |z|\le 1$$

이 된다. $k=1$인 경우 쿠른윈더(T.H.Koornwinder, [12, pp.131–166])는 로그함수의 q-유사를 다음과 같이 정의했다. $-\log(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $|z|<1$ 이므로 로그함수의 q-유사는

$$\log_q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-q^n}$$

로 정의된다. 형식적으로 항별극한을 취하면 $\lim_{q\to 1^-}(1-q)\log_q(z)=-\log(1-z)$ 이므로, $|z|<1$에서 수렴하는 거듭제곱 급수이거나 형태상

거듭제곱급수로 볼 수 있다. 이제 k-차 q-유사 로그함수를 다음 식으로 정의하자.

$$\log_q^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-q^n)^k}, \quad k \geq 1. \tag{4.2}$$

위 식에서 $\log_q^{(k)}(z) = z\mathrm{Li}'_{k+1}(z:q)$, $\log_q^{(1)}(z) = \log_q(z)$ 이다. 또 다른 흥미있는 식은 $\mathrm{Li}_k(z:q) = \sum_{n=2}^{k} \mathrm{Li}_n(zq:q) - \log(1-z)$ 와 $\log_q^{(k)}(z) = \sum_{n=2}^{k} \log_q^{(n)}(zq) + \log_q^{(1)}(z)$이다. q-밀림 차례곱 $(a:q)_k$ 와 q-지수급수 $e_q(z)$을 다음과 같이 나타내자. 즉 $(a:q)_0 = 1$이고 $(a:q)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a), a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}_+$에 대하여

$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q:q)_n} = \frac{1}{(z:q)_\infty}$$

라 두면 q-지수급수 $e_q(z)$은 형식적인 변수 z에 대해 형태상 거듭제곱급수로 볼 수 있다.

보기 4.1. (1) $k=2$이면 $\mathrm{Li}_2(z:q) = \mathrm{Li}_2(zq:q) - \log(1-z)$임을 알 수 있다. 이 관계식을 이용하여 키리로브[16]는 다음의 유의할 만한 식을 찾았다.

$$\mathrm{Li}_2(z:q) = \log(e_q(z)), \quad |z| < 1. \tag{4.3}$$

(2) $k=3$이면 다음을 알 수 있다.

$$\mathrm{Li}_3(z:q) = \log(e_q(z)\prod_{n=0}^{\infty}(z:q)_n) = \log(e_q(z)) + \sum_{n=0}^{\infty}\log(z:q)_n.$$

명제 4.2. $1 < |q|$이면 다음을 얻을 수 있다.

(1) $e_q(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{q^n}\right), \quad x \in \mathbb{C}.$

(2) $\log_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x-q^n}, \quad |x| < |q|.$

(3) $\log_q(x) = \frac{xe_q(x)}{e_q(x)}, \quad |x| < |q|.$

증명. 이 명제의 증명은 간단하므로 생략한다.

이제 q-적분에 대하여 논하기로 한다([21–22]). $q \in (0,1)$를 고정하자. 실수함수 f의 q-미분 $D_q f$는 다음과 같이 정의된다.

$$(D_q f)(t) = \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t}. \tag{4.4}$$

만약 $f(t) = t^n$이면 $(D_q f)(t) = [n]_q t^{n-1}$이다. 여기서 $[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}$이다. 실수함수 f에 대해 잭슨적분은 다음과 같이 정의한다.

$$\int_0^x f(t)\,d_q t = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} f(q^k x)q^k x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

여기서 위 식의 오른쪽의 합은 절대수렴한다고 본다. 예를 들어 f가 영의 근방에서 유계이면 $f(t) = t^n$의 잭슨적분은 이미 페르마에 의해 다음과 같이 계산되었다.

$$\int_0^x t^n\,d_q t = \frac{1}{[n+1]_q}x^{n+1}. \tag{4.6}$$

양수 a, b에 대해

$$\int_a^b f(t)\,d_q t = \int_0^b f(t)\,d_q t - \int_0^a f(t)\,d_q t$$

로 두고, $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$을 형식적 변수 t에 대해 형태상의 거듭제곱급수라 하면, 이의 잭슨적분

$$\int_0^x f(t) d_q t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{[n+1]_q}x^{n+1} \tag{4.7}$$

을 얻고, 이 또한 형태상의 거듭제곱급수로 표현된다. (4.2)와 (4.7)을 직접 적용하면

$$(1-q)\log_q(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}d_q t$$

와

$$\int_0^x (D_q \log_q)(t) d_q t = \log_q(x)$$

가 됨을 알 수 있다. 또 두 함수의 곱 $f(t)g(t)$에 대해

$$D_q(f(t)g(t)) = \frac{f(t)g(t) - f(qt)g(qt)}{t(1-q)} \tag{4.8}$$

이므로 미분공식의 q-유사는 다음과 같다.

$$D_q(f(t)g(t)) = g(t)(D_q f)(t) + f(qt)(D_q g)(t). \tag{4.9}$$

위 (4.9)식의 양변에 q-적분을 하면 q-적분에 대한 다음의 부분적분식이 유도된다.

$$\int g(t)(D_q f(t))\,d_q t = f(t)g(t) - \int f(qt)(D_q g(t))\,d_q t. \tag{4.10}$$

다음으로 p-진체 상의 적분과 잭슨적분과의 관계를 살펴보자. 먼저 $\mathbb{Q}_p$를 p-진 유리수의 체라 하자. 체 $\mathbb{Q}_p$는 다음 절대값의 관점에서 유리수체 $\mathbb{Q}$의 완비이다. 즉

$$|x|_p = \left|p^n \frac{a}{b}\right|_p = p^{-n} = p^{-v_p(x)}$$

이다. 여기서 a, b는 p와 서로 소이고, v_p는 $v_p(p) = 1$로 정규화된 $\mathbb{Q}_p$의 부치(valuation)이다. 중심 $a \in \mathbb{Q}_p$이고 반경 p^γ인 닫힌 공은

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a|_p \leq p^\gamma\}$$

이고, 이의 경계는 원이다. 즉

$$S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a|_p = p^\gamma\} = B_\gamma \setminus B_{\gamma-1}$$

임을 알 수 있다. $a = 0$이면 $B_\gamma(0) = B_\gamma$, $S_\gamma(0) = S_\gamma$로 쓰기도 한다. 참고문헌 [22]에 p-진 해석학과 q-해석학, 양자군, 비가환 기하학 등과의 관련에 대하여 논하고 있다. 양자군 $SU_q(2)$는 생성원이 a와 c이고 이차 관계를 만족하는 호프대수이다. 보르노빅은 $SU_q(2)$에 하르측도가 있음을 보였다.

명제 4.3. [22] *$q = \frac{1}{p}$이면 양자군 $SU_q(2)$에서의 하르측도와 p-진체 $\mathbb{Q}_p$에서의 하르측도가 일치한다. 양자군 $SU_q(2)$에서의 하르측도는 q-적분으로 표현된다.*

식 (4.5)에 의해

$$\int_0^1 f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n)q^n \tag{4.11}$$

이다. 여기서 $0 < q < 1$이고 $f(x)$는 실함수이다. 한편 $\mathbb{Q}_p$에서의 하르측도는 다음 형태이다. 즉

$$\int_{B_0} f(|x|_p)dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{n=0}^{\infty} f(p^{-n})p^{-n} \tag{4.12}$$

임을 알 수 있다. 여기서 $B_0 = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$이다. 만약 $q = \frac{1}{p}$이면 식 (4.11)과 (4.12)에서의 표현은 일치한다. 식 (4.11)으로부터 $q = \frac{1}{p}$에

대해

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)d_qt &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n x)q^n \\ &= \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{n=0}^{\infty} f(xp^{-n})p^{-n} \\ &= \int_{B_0} f(x|t|_p)dt\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

보기 4.4. $f(t) = t^n$이고 $q = \frac{1}{p}$이라 하자. 그러면

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)d_qt = \frac{1}{[n+1]_q}x^n = \int_{B_0} f(x|t|_p)dt$$

이다. 또한 $f \in L^1_{\text{loc}}(G)$와 $G = \cup_{\gamma\in B} S_\gamma$에 대해 멜린 연산자는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}M[f](|x|_p) &= \frac{1}{(1-p^{-1})|x|_p}\int_{|y|_p=|x|_p} f(y)dy \\ &= \int_{|u|_p=1} f\left(\frac{u}{|x|_p}\right)\frac{du}{1-p^{-1}}, \quad x \in G.\end{aligned}$$

즉,

$$\int_G f(x)dx = \int_B M[f](r)d_{\frac{1}{p}}r = (1-1/p)\sum_{\gamma\in B} p^{-\gamma}M[f](p^{-\gamma})$$

임을 알 수 있다.

5. q-베타와 q-감마 함수

2,3,4절의 내용을 염두에 두고, q-베타 함수와 q-감마함수의 새로운 q-유사를 연구해 본다. q에 대한 q-차례곱 다항식을 앞에서와 같이

$$[x]_q^{(m)} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ [x]_q[x-1]_q\cdots[x-m+1]_q, & m \geq 1 \end{cases}$$

라 두자. 위 식의 q-유사는 다수의 수학자들([3–4],[6],[8–9],[10],[12])에 의해 소개되었다. 다음 식은 쉽게 알 수 있다.

$$[x+1]_q^{(m)} = [x]_q^{(m)} + [m]_q q^{x-m+1}[x]_q^{(m-1)}.$$

이 식에서 다음 식들이 유도된다.

$$\begin{aligned}[x+2]_q^{(m)} &= [x]_q^{(m)} + [2]_q[m]_q q^{x-m+1}[x]_q^{(m-1)} \\ &\quad + [m]_q[m-1]_q q^{2(x-m+2)}[x]_q^{(m-2)}, \\ [x+3]_q^{(m)} &= [x]_q^{(m)} + [3]_q[m]_q q^{x-m+1}[x]_q^{(m-1)} \\ &\quad + [3]_q[m]_q[m-1]_q q^{2(x-m+2)}[x]_q^{(m-2)} \\ &\quad + [m]_q[m-1]_q[m-2]_q q^{3(x-m+3)}[x]_q^{(m-3)}.\end{aligned}$$

따라서

$$[x+k]_q^{(m)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}_q q^{i(x-m+i)}[k]_q^{(i)}[x]_q^{(m-i)} \tag{5.1}$$

이다. 한편 $[x]_q^{(m)} = [x]_q^{(l)}[x-l]_q^{(m-l)}$에 유의하자. 만약 $m=0$이면

$$1 = [x]_q^{(l)}[x-l]_q^{(-l)} \tag{5.2}$$

이고, 이 식에 l을 $-l$로 바꾸면

$$[x]_q^{(-l)} = \frac{1}{[x+l]_q^{(l)}} = \frac{1}{[x+1]_q\cdots[x+l]_q} \tag{5.3}$$

임을 알 수 있다. 식 (5.1)로부터

$$[x+k+m]_q^{(m)}[x]_q^{(-m)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}_q q^{i(x+i)}[k]_q^{(i)}[x]_q^{(-i)} \tag{5.4}$$

임을 알 수 있다.

보조정리 5.1. $0<|q|<1$이면

$$\begin{aligned}[y]_q^{(m)}[x]_q^{(-m)} &= \sum_{i=0}^{y-x-m} \binom{m}{i}_q q^{i(x+i)}[y-x-m]_q^{(i)}[x]_q^{(-i)} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-q^{x+m+i})(1-q^{y-m+i})}{(1-q^{x+i})(1-q^{y+i})}\end{aligned}$$

이다.

증명. 식 (5.4)에서 $x+k+m=y$라 두면

$$[y]_q^{(m)}[x]_q^{(-m)} = \sum_{i=0}^{y-x-m} \binom{m}{i}_q q^{i(x+i)}[y-x-m]_q^{(i)}[x]_q^{(-i)}$$

임을 알 수 있다. 식 (5.2)와 (5.3)으로 주어진 q-차례곱에서 $[y]_q^{(m)} = [y+\nu]_q^{(m)} \frac{[y]_q^{(-\nu)}}{[y-m]_q^{(-\nu)}}$ 과 $[x]_q^{(-m)} = [x+\nu]_q^{(-m)} \frac{[x]_q^{(-\nu)}}{[x+m]_q^{(-\nu)}}$ 임을 알 수 있다. 그러므로

$$\begin{aligned}[y]_q^{(m)}[x]_q^{(-m)} &= [y+\nu]_q^{(m)}[x+\nu]_q^{(-m)} \frac{[y]_q^{(-\nu)}}{[y-m]_q^{(-\nu)}} \frac{[x]_q^{(-\nu)}}{[x+m]_q^{(-\nu)}} \\ &= \prod_{i=1}^{m} \frac{[y+\nu-i+1]_q}{[x+\nu+i]_q} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{[x+m+i]_q[y-m+i]_q}{[x+i]_q[y+i]_q}\end{aligned}$$

이고, 만약 $0<|q|<1$이면

$$\lim_{\nu\to\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{[y+\nu-i+1]_q}{[x+\nu+i]_q} = 1$$

이다. 그러므로 보조정리는 증명되었다.

정리 5.2. $0<|q|<1$이면

$$[x]_q^{(x)}[y]_q^{(-x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i q^{i(i+1)/2} \binom{y}{i}_q [x]_q}{[x+i]_q}$$

이다.

증명. 보조정리 5.1에서 $m=-x$라 두면

$$[x]_q^{(x)}[y]_q^{(-x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-x}{i}_q q^{i(x+i)} [y]_q^{(i)} [x]_q^{(-i)}$$

이고, 또한

$$\begin{aligned}&\binom{-x}{i}_q q^{i(x+i)} [y]_q^{(i)} [x]_q^{(-i)} \\ &= \binom{y}{i}_q q^{i(x+i)} \frac{q^{-x}(q^x-1)\cdots q^{-x-i+1}(q^{x+i-1}-1)}{(1-q^{x+1})\cdots(1-q^{x+i})}\end{aligned}$$

이므로 결과를 얻을 수 있다.

n을 자연수라 하면 이항공식의 q-유사는 다음의 식과 같다.

$$(1-t)_q^n = \prod_{i=1}^{n}(1-q^i t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-q^i t)}{(1-q^{i+n}t)}.$$

그러므로

$$(5.5) \qquad (1-t)_q^y = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k}_q (-1)^k t^k q^{k(k+1)/2}$$

임을 알 수 있다. $0 < |q| < 1$인 q를 고정하면 실수함수 f에 대한 잭슨적분([2],[21])은

$$\int_0^x f(t)\, d_q t = (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f(q^k x) q^k x$$

이다. 여기서 $x \in \mathbb{R}$이고 위 식의 오른쪽 합은 예를 들어 만약 f가 0의 근처에서 유계이면 절대수렴하는 것으로 본다. 잭슨적분의 정의에 따라

$$(5.6) \qquad \int_0^1 t^{m-1} d_q t = \frac{1}{[m]_q}, \quad m \in \mathbb{N}$$

임을 알 수 있다. 잭슨적분으로 q-함수 $J_q(x,y)$를 다음과 같이 정의하자.

$$(5.7) \qquad J_q(x,y) = [x]_q \int_0^1 t^{x-1}(1-t)_q^y d_q t.$$

위의 두 식 (5.5)와 (5.6)으로 부터 q-함수 $J_q(x,y)$를 q차례곱으로 표현되는 다음 보조정리를 쉽게 얻을 수 있다.

보조정리 5.3. $0 < |q| < 1$이면

$$J_q(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i q^{i(i+1)/2} \binom{y}{i}_q [x]_q}{[x+i]_q}$$

이다.

정리 5.4. $0 < |q| < 1$이면

$$J_q(x,y) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-q^i)(1-q^{y+x+i})}{(1-q^{x+i})(1-q^{y+i})} = [x]_q^{(x)} [y]_q^{(-x)}$$

이다.

증명. 위의 보조정리 5.1, 정리 5.2, 보조정리 5.3으로부터 쉽게 증명된다.

q-함수 $J_q(x,y)$와 비슷하게 베타함수 $B_q(x,y)$를 아래로 정의하자.

$$(5.8) \qquad B_q(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)_q^{y-1} d_q t \quad x,y \in \mathbb{R},\ x,y > 0.$$

여기서 x, y는 양의 실수라고 하자. 여기서의 베타함수 $B_q(x,y)$는 빌렌킨, 크리미크(Vilenkin, Klimyk, [21])의 베타함수와 조금 다르다. 또한 감마함수 $\Gamma_q(z)$, $0 < q < 1$는 잭슨, 아스키, 앤드류즈(Jackson, Askey, Andrews [2],[13],[17])등에 의해서 연구되었다. 참고문헌 [10]과 같이 q-감마함수를

$$\Gamma_q(x) = (1-q)^{1-x}\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}{(1-q^x)(1-q^{x+1})(1-q^{x+2})\cdots}$$

로 정의하면 이는 이미 잘 알려진 고전적인 감마함수의 일반화된 감마함수로 볼 수 있다. $q \to 1^-$이면 $\Gamma_q(x) \to \Gamma(x)$이고, 또한 $n \geq 0$인 정수 n에 대해 $x = n+1$이면

$$\Gamma_q(n+1) = [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q = [n]_q!$$

이고 $q \to 1^-$이면 $[n]_q! \to n!$이다. 그러므로 다음 정리를 얻는다.

정리 5.5. *$B_q(x,y)$는 식 (5.8)에서 정의된 식이고, $0 < |q| < 1$이면*

$$B_q(x,y) = \frac{[x]_q^{(x)}[y-1]_q^{(-x)}}{[x]_q}$$

이다. 특히, m, n이 자연수이면

$$B_q(m,n) = \frac{\Gamma_q(m)\Gamma_q(n)}{\Gamma_q(m+n)}$$

이다.

유의사항 5.6. q-감마함수는 다음 함수방정식을 만족한다.

$$\Gamma_q(x+1) = [x]_q\Gamma_q(x).$$

또 $0 < |q| < 1$이면 q-감마함수는 아래의 잭슨적분으로 표현할 수 있다.

$$\Gamma_q(x) = q^{x(x-1)/2}\int_0^\infty t^{x-1}E_q(-t)\,d_qt, \quad x > 0.$$

여기서 $E_q(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{[k]_q!}$이고, 이는 통상적인 지수함수의 q-유사이다. $0 < |q| < 1$이면 $|x| < \frac{1}{1-q}$의 범위에서 $E_q(t)$는 고르게 수렴한다.

보조정리 5.7. *$c \in \mathbb{R}$이면 다음을 얻을 수 있다.*

(1) $d_q(ct) = cd_qt$.
(2) $d_q(t+c) = d_qt$.

증명. q-미분에 대한 표현

$$\frac{d_qf(t)}{d_qt} = \frac{1}{t}\frac{f(qt)-f(t)}{q-1}$$

에서 분명하다.

이제 q-감마함수를 q-차례곱으로 표현해 보자. 식 (5.7)과 정리 5.4에서

$$\int_0^1 n^{-x}u^{x-1}(1-u)_q^n d_q u = \frac{J_q(x,n)}{n^x[x]_q} = \frac{[n]_q!}{n^x[x+n]_q^{(n+1)}}$$

임을 알 수 있다. $u=\frac{t}{n}$이라 두면 보조정리 5.7에서

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)_q^n d_q t = \frac{[n]_q!}{[x+n]_q^{(n+1)}} \tag{5.9}$$

이다. 여기서 다음의 표현을 사용한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[x+n]_q^{(x)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-q}{1-q^{x+n}}\right)^{(x)} = (1-q)^{(x)}. \tag{5.10}$$

따라서 $|q|<1$에서 (5.9)는 수렴한다. 그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)_q^n d_q t &= \lim_{n\to\infty}\frac{[n]_q!}{[x+n]_q^{(n+1)}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{[x-1]_q^{(x-1)}}{[x+n]_q^{(x)}}\\ &= (1-q)^{(x)}[x-1]_q^{(x-1)}\\ &= (1-q)^{(x)}\Gamma_q(x)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 그러므로 다음 정리가 얻어진다.

정리 5.8. *$|q|<1$이면 다음을 얻을 수 있다.*

$$\Gamma_q(x) = \frac{1}{(1-q)^{(x)}}\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_q!}{[x+n]_q^{(n+1)}}.$$

6. 끝맺는 말

본 논문에서는 q-유사를 이용한 기본적인 정리와 결과들을 정리하였고([6],[15],[21–22]), q-베타함수와 q-감마함수의 새로운 q-유사에 대한 특징을 간략하게 논의하였다. 또한 q-유사 함수들은 다양한 주제로 많은 부분에서 연구되어 오고 있고 잘 알려져있다. 이러한 알려진 주제들의 참고문헌은 [1–2],[5],[8–13],[19–22]에 있다. 그리고 q-유사를 이용한 새로운 주제의 연구는 논문 [3–4],[6–7],[16–18]들이 좋은 참고문헌이 될 것이다.

감사의 글 : 본 연구는 2005학년도 경남대학교 학술논문게재연구비 지원으로 이루어 졌음.

References

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory,* Springer-Verlag, New York, 1979.

[2] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special; Functions* Cambridge, England, Cambridge University Press, 1999.

[3] L. Carlitz, *q-Bernoulli numbers and polynomials*, Duke Math. J. **15** (1948), 987–1000.

[4] ———, *Multiplication formulas for products of Bernoulli and Euler polynomials*, Pacific J. Math. **9** (1959), 661–666.

[5] A. Cauchy, *Oeuvres*, Ser. I, Vol. 8, Gauthier-Villars, Paris, 1893.

[6] K. Conrad, *A q-analogue of Mahler expansions I*, Adv. Math. **153** (2000), 185–230.

[7] K. Dilcher, *On Generalized Gamma functions related to the Laurent coefficients of the Riemann zeta function*, Aequationes Math. **48** (1994), 55–85.

[8] H. Exton, *q-Hypergeometric Functions and Applications,* New York, Halstead Press, 1983.

[9] R. Fray, *Congruence properties of ordinary and q-binomial coefficients*, Duke Math. J. **34** (1967), 467–480.

[10] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Uk, 1990.

[11] L. Hellstrom and S. D. Silvestrov, *Commuting Elements in q-Deformed Heisenberg Algebras,* World Scientific Publishing co.pte.Ltd 2000.

[12] M. E. H. Ismail, D. R. Masson, and M. Rahman, *Special Functions, q-Series and Related Topics,* Amer. Math. Soc. 1997.

[13] F. H. Jackson, *On q-functions and a certain difference operator*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh **46** (1908), 253–281.

[14] C. Jordan, *Calculus of finite differences*, Third Edition, Introduction by Harry C. Carver, Chelsea Publishing Co., New York, 1965.

[15] M.-S. Kim and J.-W. Son, *A note on q-difference operators*, Commun. Korean Math. Soc. **17** (2002), 423–430.

[16] A. N. Kirillov, *Dilogarithm identities*, Progress Theor. Phys. Supplement, **118** (1995), 61–142.

[17] N. Koblitz, *q-Extension of the p-adic gamma function*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 449–457.

[18] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, *The Askey-Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polynomials and its q-Analogue,* Delft, Netherlands: Technische Universiteit Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics Report 98-17, p.7, 1998.

[19] W. Koepf, *Hypergeometric Summation: An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities*, Braunschweig, Germany: Vieweg, p.26, 1998.

[20] C. Lee, *Introduction to Combinatorics,* Kyowoo Publishing Company, Seoul Korea, 2000.

[21] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions*, Vol.III, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1991.

[22] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet & East European Mathematics, Vol. I, World Scientific, Singapore, 1994.

경남대학교 자연과학대학 응용수리학부 수학과
마산시 월영동 449번지 631-701
E-mail: sonjin@kyungnam.ac.kr