

함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용

손 흥 찬* · 류 희 찬**

이 글은 함수의 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트가 어떻게 활용될 수 있는지에 대하여 살펴보고자 한 것이다. 2절에서는 스프레드시트가 함수 그래프의 개형을 파악하거나 계수 변화가 함수의 그래프에 미치는 영향을 알아보는 데 도움을 주고 새로운 수학적 사실을 발견할 수 있는 기회를 제공할 수 있음을 보인다. 3절에서는 학생이 수행한 모델링 활동을 통하여 스프레드시트의 기능이 수학적 모델링 활동에서의 다양한 상황을 해석하고 예측하는데 유용함을 보이고 새로운 사실의 발견과 이의 수학적 정당화 가능성의 기회를 제공할 수 있음을 보인다.

1. 머리말

오늘날 기술공학은 나날이 그 진보를 빠르게 하고 있다. 특히 컴퓨터 관련 지식의 발달과 그 광범위한 사용은 수학의 응용 영역을 확장시켜왔을 뿐만 아니라 수학 교육 분야에서도 개혁을 주도하고 있는 촉진제 역할을 해왔다. 특히 탐구형 소프트웨어의 발달로 수학교육은 계산 위주나 알고리즘 위주의 교육에서 벗어나 수학 자체의 본질적인 개념을 탐구하는 쪽에 무게를 둘 수 있게 되면서 국내외의 수학교실에서는 공학의 사용이 권장되고 있는 추세이다.

미국의 NCTM은 “수학교육과정과 평가의 새로운 방향(NCTM, 1989)”에서 초·중등 수학교육에서 모든 학생이 계산기와 컴퓨터를 활용할 수 있어야 한다고 하였고, 21세기를 대비하

기 위해 수학 교육의 방향을 제시한 “학교수학을 위한 원리와 기준집(NCTM, 2000)”도 공학을 학교 수학을 위한 여섯 가지 원리 중의 하나로 제시하면서 공학이 학생들의 수학 학습을 향상시키고 효율적인 학습을 뒷받침하며 수학을 가르치는 것에도 영향을 미친다고 기술하고 있다. 우리나라에서도 제 6차 교육과정에 들어와서부터는 외국의 수학교육 동향을 반영하는 측면에서 계산기와 컴퓨터를 수학적 도구로 활용하는 수학교육을 기본 방향 중의 하나로 설정하였고, 제 7차 교육과정에서는 정보화 사회에 주체적으로 대응할 수 있는 기초적인 자질을 기른다는 관점에서 기초계산 능력을 제외한 복잡한 계산, 수학적 개념·원리·법칙의 이해, 문제 해결력의 향상 등을 위하여 계산기와 컴퓨터의 활용을 강조하고 있다(교육부, 1997).

공학은 계산기를 비롯한 휴대용 장치, 통신 장치 그리고 컴퓨터 등을 포함하는 모든 종류

* 한국교원대학교 대학원, hongcson@naver.com

** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr

의 전자 장치와 이것들을 사용할 수 있게 하는 응용 프로그램 등을 의미한다(NCTM, 2005). 근래에 흔히 사용할 수 있는 공학에는 Microsoft Excel과 같은 스프레드시트, TI-92나 Casio ClassPad Manager와 같은 CAS, 그리고 GSP나 Cabri와 같은 역동적 기하 소프트웨어 등이 있다.

이 중 스프레드시트는 1979년 처음으로 Dan Bricklin이 만든 VisiCalc가 그 효시로, 본래 자료 정리나 회계 일을 돕기 위해 고안된 것이었지만 점차 다양한 기능을 갖게 되면서 그 응용 가능성이 여러 학술적 논문에서 폭넓게 논의되어왔다. 오늘날의 스프레드시트는 자동계산 기능, 차트 기능, 데이터 관리 기능, 매크로 기능 등을 제공한다. 이러한 계산 기능은 기본적인 사칙 연산 및 다양한 함수 계산과 함께 논리 함수와 반복되는 계산식의 복사의 기능 등을 제공함으로써 수학교육에서 다양한 문제를 탐구하고, 다양한 수학적 표현을 가능하게 하며 수학적 모델링 또는 시뮬레이션을 할 수 있는 적합한 도구로 평가되고 있다.

수학교육에서 스프레드시트를 활용함으로써 얻는 개략적인 장점 몇 가지를 기술하면 다음과 같다. 첫째, 복잡한 수식을 자동계산 해줌으로써 학생들이 수를 다루는 번거로움에서 벗어나(Friedlander, 1998), 보다 개념적이고 본질적인 수학적 내용을 탐구할 수 있도록 하고, 보다 실제적인 문제들을 탐구할 수 있도록 한다. 둘째, 반복적인 많은 계산을 수행하여 쉽게 볼 수 있는 표로 나타내줌으로써 변수들 사이의 전체적인 패턴을 파악할 수 있도록 한다. 셋째, 수식과 표, 그리고 그래프 사이의 관계를 화면 상에서 역동적으로 고찰할 수 있게 한다. 넷째, 문제 해결과정에서 “What if” 유형의 질문을 탐구할 수 있도록 한다(Masalski, 1999). 다섯째, 스프레드시트에 사용하는 식은 프로그래밍 언

어보다 더 시각적이고 더 쉽게 사용할 수 있다(Steward, 1994). 스프레드시트는 여러 가지 아이콘과 함수식을 지원하므로 보다 쉽게 사용할 수 있다. 여섯째, 스프레드시트를 사용하는 동안 학생 상호간, 교사와 학생, 컴퓨터와 학생의 상호작용을 활발히 만들어준다. 또한 문제해결 도구로서 학생에게 산술이나 초기 대수의 영역에서 강력한 사고와 전략을 제시한다(Hershkowitz, Dreyfus, Ben-Zvi, Friedlander, Hadas, Resnick, & Tabach, 2002).

이러한 스프레드시트의 특징과 장점은 대수 교육에 적절히 사용될 수 있으며, 특히 대수 교육에 의미를 붙여넣을 수 있는 모델링활동에 적절하게 사용될 수 있음을 시사한다. 우리나라의 제 7차 교육과정에서 대수 영역과 밀접한 관계에 있는 것은 문자와 식, 규칙성과 함수로 볼 수 있다. 문자와 식에서는 수학적 의사소통이나 문제 해결을 위해서는 문자의 도입이나 식의 활용이 효과적이라는 사실을 인식할 수 있도록 하고, 규칙성과 함수에서는 주위 사물의 상호 관련성에 주목하여 관계나 규칙을 찾아내고자 하는 태도를 기르는 데 주안점을 두고, 이 과정에 문자와 식의 활용이 유용한 것임을 인식하도록 지도하도록 권고하고 있다(교육부, 1997). 또한 “학교수학을 위한 원리와 기준집(NCTM, 2000: 37-40)”에서 제시한 대수에서의 교육 목표는 첫째로 패턴, 관계, 함수들을 이해하는 것, 둘째로 대수적인 부호들을 사용하여 수학적 상황들과 구조들을 나타내고 분석하는 것, 셋째로 양적인 관계성을 나타내고 이해하기 위해서 수학적 모델들을 사용하는 것, 넷째로 다양한 상황에서 변화를 분석하는 것이다. 이것은 대수 영역에서는 문자와 식의 활용, 규칙과 함수의 이해 그리고 여러 가지 상황의 분석과 수학적 형식화를 중요하게 여기고 있음을 의미한다. 수학적 모델링 활동에서는 이 여

러 가치를 종합적으로 필요로 하므로 스프레드시트의 유용성을 짐작해볼 수 있다.

스프레드시트의 사용이 문자와 식을 지도하는데 도움이 된다는 것을 주장하는 결과들은 이미 많이 있다. 주로 학생으로 하여금 수의 사용에서 문자의 사용으로 자연스럽게 전환하는데 도움을 줌으로써 산술에서 대수로의 이행에 다리를 놓을 수 있거나 비형식적 개념을 형식화하는데 도움을 준다고 주장하는 결과들이 그것이다(Friedlander, 1998, 1999; Sutherland & Rojano, 1993; Wilson, 2004; 김현주, 2005).

이 글에서는 스프레드시트가 학생이 함수를 이해하는데 중요한 역할을 하며, 모델링 활동을 통하여 다양한 상황을 해석하고 예측하는데 유용하고 새로운 수학적 사실의 발견과 이의 정당화 가능성의 기회를 제공할 수 있음을 보인다. 2절에서는 스프레드시트가 함수 지도에서 어떻게 활용될 수 있는지를 설명하고, 함수의 개형과 특징의 파악 그리고 새로운 수학적 사실의 발견 기회를 제공할 수 있음을 예를 들어 제시한다. 3절에서는 실제 학생들이 수행한 모델링 활동의 예를 통해 앞 절에서 사용된 스프레드시트의 기능이 모델의 해석 및 결과의 분석 그리고 예측의 단계에서 중요한 역할을 하며, 경우에 따라서는 문제 상황에 놓여 있는 현상을 수학적으로 설명해볼 수 있는 기회를 제공할 수 있음을 보인다.

여기에서 사용된 스프레드시트는 Microsoft Excel 2003이다.

II. 함수 지도에서 스프레드시트의 활용

대수와 함수의 지도에 대해서 NCTM 규준집(2000)은 학생들에게 변화가 일어나는 다양한

문제 상황을 제공하고 함수적 상황에서 표, 그래프, 대수적 표현 사이의 상호작용을 충분히 이해하게 하는 것을 중요한 목표로 보고 학생들이 이를 위해 공학을 효과적이고 널리 사용하는 방법을 배우는 것이 필요하다고 보고 있다.

지필 환경에서 교사는 표, 그래프, 대수적인 식을 역동적으로 상호 연결하기 어렵고 학생들은 이들의 관계를 의미 있게 파악하기 어렵다. 이러한 여러 수학적 표현 사이의 번역 과정에서 학생들이 겪는 어려움은 공학을 이용한 수학적 표현들의 구체적인 연결을 통해 극복될 수가 있다. 류희찬(1997: 9-10)은 대수 교육에서 여러 가지 소프트웨어를 활용하면 그림, 방정식, 표, 그래프와 같은 다양한 표상 사이의 개념적 연결성을 시각적으로 보여줄 수 있어서 한 표상에서의 변화가 다른 표상에 어떻게 영향을 미치는지를 용이하게 탐구할 수 있다고 주장하였다. 또한 공학이 주어진 환경에서는 역동적인 그래프로 종래의 지필 방법으로는 힘들었던 문자식과 함수에 대한 직관력을 길러줄 수 있고 학습 내용의 의미를 용이하게 파악시킬 수 있게 함으로써 대수 학습을 의미 있게 해주며, 지도 계열을 개선함으로써 수학 학습에 대한 태도를 개선시킬 수 있다고 주장하였다.

스프레드시트는 많은 셀로 이루어져 있어서 한 셀에 스프레드시트 수식을 입력한 후 이 수식을 자동복사를 통하여 많은 자료를 생성할 수 있으며, 이 자료는 자연스럽게 표를 형성하고, 이 표를 차트방법사를 통하여 다양한 그래프로 그릴 수 있다. 그리고 수식의 변화는 표의 변화를 가져오고, 표의 변화는 그래프에 반영되어 나타난다. 중요한 것은 이러한 변화가 동시에 일어나므로써 대수에서의 수식의 변화가 가지는 의미를 보다 분명히 이해할 수 있고 지필환경에서는 불가능한 실험을 통하여 그 다양한 의미를 깊게 이해할 수 있다는 점이다. 특

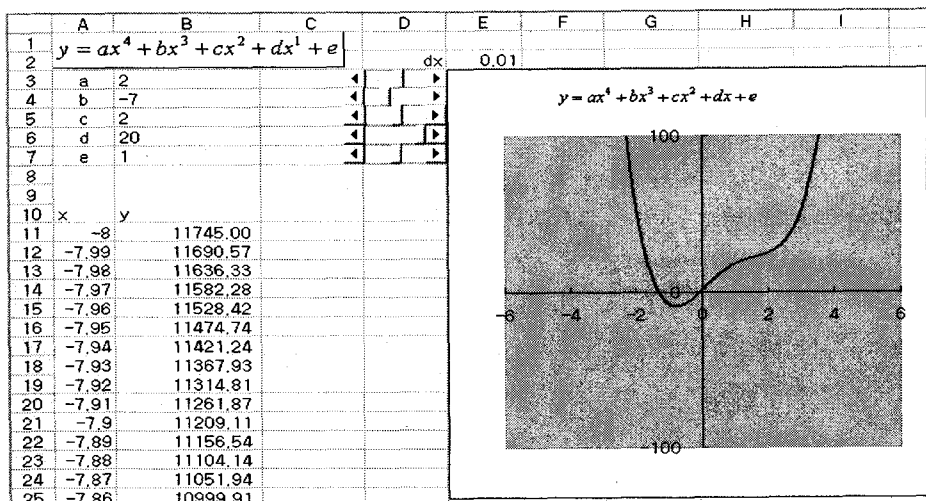
히 스프레드시트는 수많은 셀이 있고 이 셀마다 수식 입력 기능과 함께 다른 셀을 참조하는 기능이 있다. 따라서 참조되는 셀에 입력된 값이 변하게 되면 참조한 셀의 값이 변하게 되고, 참조한 셀을 자동 복사하여 만든 표나 그래프가 동시에 변하게 된다. 이를 함수에 적용하면 함수의 관계식에서의 각종 매개 변수를 변화시켜가며 함수의 특징이나 함수족의 파악을 용이하게 할 수 있다. 이 때 참조된 셀의 값을 변화시키는 데는 스크롤바를 이용하여 쉽게 조작할 수 있도록 만들 수 있다. 이것은 스프레드시트가 가지는 중요한 특징이자 이점이다.

다항 함수 $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 의 그래프를 그려 스프레드시트가 갖는 기능이 기본적인 대수적 함수의 개념을 이해하고 특징을 파악하는데 어떻게 이용될 수 있는지를 소개한다.

위의 [그림 II-1]은 $a=2, b=-7, c=2, d=20, e=1$ 인 경우의 그래프이고 x 점을 0.01의 간격으로 생성한 것이다. 여기에서 만일 이차함수를 얻고자 하면 $a=0, b=0$ 을 대입하면 된다. 아래 [그림 II-2]는 x^2 의 계수가

변할 때를, [그림 II-3]은 y 절편이 변할 때의 모습을 보여준다. [그림 II-4]는 이차함수의 관계식에서 일차항의 계수와 상수항을 바꿀 때 나타나는 그래프들이다. 이러한 그래프를 통하여 이차함수의 계수가 변함에 따라 그래프가 어떻게 변하는지 탐구해볼 수 있다.

그밖에 그래프를 그리는 기능을 통하여 다음과 같은 몇 가지 활동을 할 수 있다. 예컨대 이차함수의 $y=(x-a)^2+b$ 에서 a 와 b 값의 변화에 따라 그래프가 어떻게 수직 또는 수평으로 이동하는지를 관찰할 수 있다. 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형 알아보거나 계수의 변화가 삼차, 사차 함수 그래프의 개형에 미치는 영향을 알아볼 수 있다. 그리고 거꾸로 간단한 계수를 갖는 다항 함수 그래프의 개형을 보고 관계식을 예측하여 그래프를 그려 대조해나감으로써 계수가 그래프에 미치는 영향을 깊이 이해할 수도 있다. 이 외에도 두 함수 그래프의 교차점과 연립방정식의 해의 관계를 이해하는데 도움을 줄 수 있고, 유리함수에서 분모의 다항식이 영이 되는 점에서 함수가 왜 불연속인지를 역동적인 고찰을 통해 이해하게



[그림 II-1] $y=2x^4-7x^3+2x^2+20x+1$ 의 그래프

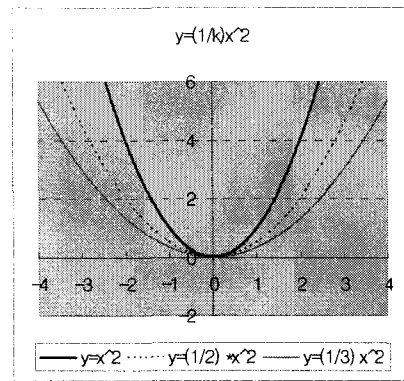
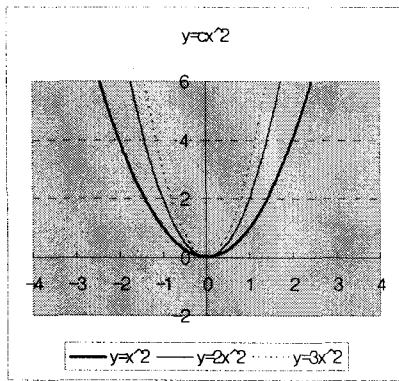
할 수도 있다(손홍찬, 2004).

그리고 그래프를 그리기 어렵고 그 개형을 짐작하기 어려운 무리함수 및 초월함수의 그래프를 그려서 이 함수들에 대한 이해를 도울 수 있다. 초월함수의 그래프를 그리는 것은 대수함수의 그래프를 그리는 것과 같은 방법으로 그릴 수 있으며 함수의 관계식이 복잡하다 하더라도 간단한 관계식을 갖는 함수의 그래프만큼 쉽게 그릴 수 있다. Kutzler(2004)는 이와 같이 지필 환경이라면 수학적 지식이나 재능에 상관없이 많은 시간과 노력을 들여야만 하는 복잡한 문제들을 평범하게 처리할 수 있는 공학의 특징을 평범화(trivialization)라고 불렀다.

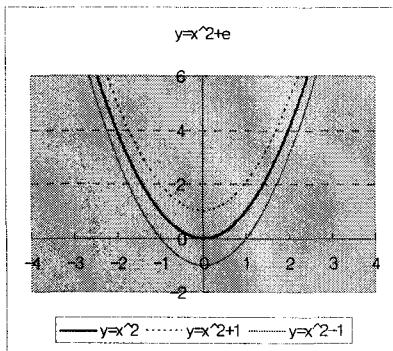
스프레드시트 환경에서는 복잡한 함수라 할지라도 한 번 수식을 입력하고 나면 이를 자동복사를 통해 순서쌍을 생성할 수 있고 이것은 곧바로 그래프에 자동적으로 반영되므로 많은 노력을 필요로 하지 않는다.

나아가 스프레드시트를 활용하면 기존에 정적인 지필환경에서는 예측하기 힘든 수학적 사실들을 실험을 통해서 발견할 수 있어서 같은 주제를 다루더라도 보다 멀리 그리고 깊게 다룰 수 있다. 다음의 예를 보자.

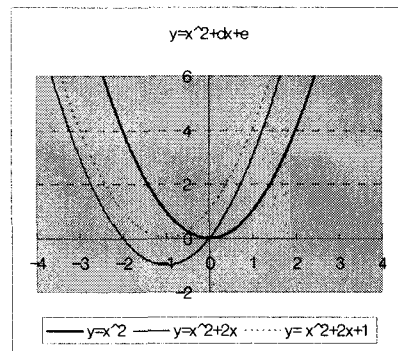
한 원이 다른 원의 안쪽에서 굴러갈 때 작은 원 상의 한 점 P가 그리는 궤적인 hypocycloid를 그려보자. 큰 원의 반지름을 a 라고 하고 작



[그림 II-2] $y=cx^2$ 의 그래프



[그림 II-3] $y=x^2+e$ 의 그래프



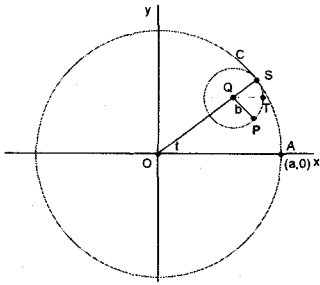
[그림 II-4] $y=x^2+dx+e$ 의 그래프

은 원의 반지름을 b 라고 하자. 아래 그림에서 호 AS가 at 이고 이것이 호 PS하고 같으므로 $\angle PQS = \frac{a}{b}t$ 와 $\angle PQT = \frac{a}{b}t - t = \frac{(a-b)}{b}t$ 을 얻는다.

이것으로부터 점 P의 자취는 다음과 같이 나타남을 알 수 있다.

$$x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right),$$

$$y = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)$$



[그림 II-5] hypocycloid는 의 자취

스프레드시트를 이용하여 그래프를 그리면 [그림 II-6]과 같다. 여기에서 $b=1$ 이고 a 가 자연수일 때 a 의 수 만큼 첨점이 생기는 것을 알 수 있고, $b=2$ 이고 a 와 서로소일 때는 아래 그림과 같이 꼭선이 교차하면서 a 의 개수 만큼 첨점이 생기는 것을 알 수 있다.

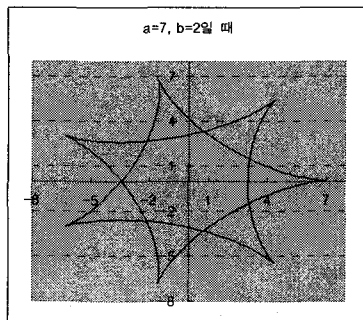
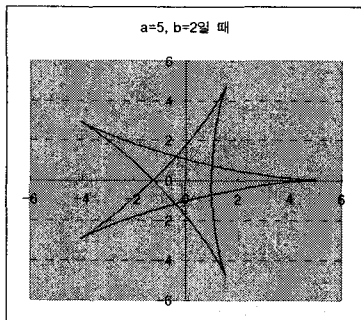
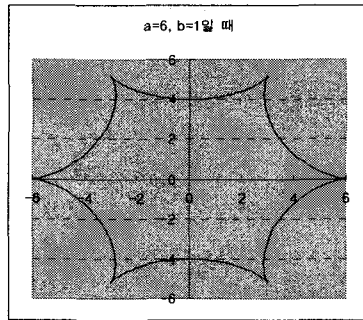
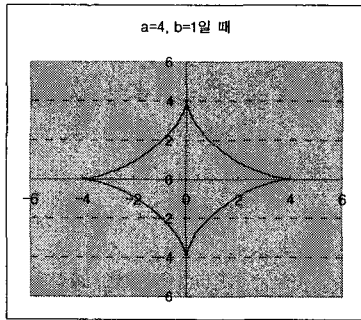
특히 $a=4, b=1$ 일 때는

$$\begin{aligned} x &= 3\cos t + \cos 3t = 3\cos t + (4\cos^3 t - 3\cos t) \\ &= 4\cos^3 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 3\sin t - \sin 3t = 3\sin t - (3\sin t - 4\sin^3 t) \\ &= 4\sin^3 t \end{aligned}$$

가 되어 이 꼭선이 성마형(astroid)임을 알 수 있다.

만일 $a = \frac{1}{n}, b=1$ 일 때, 즉 구르는 원이 클 때는 n 이 커지면 궤적이 아래 [그림 II-7]과 같이 심장형(cardioid) 모양으로부터 점차로 작아지는 것을 발견할 수 있다.



[그림 II-6] a 가 b 보다 클 때의 여러 가지 hypocycloid

특히 $a=\frac{1}{2}$ 이고 $b=1$ 일 때는

$$x = -\frac{1}{2} \cos t + \cos \frac{t}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \sin t + \sin \frac{t}{2}$$

이고 이것은 곧 심장형을 나타낸다. 보다 구체적으로 살펴보면 심장형 $r=1-\cos t$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 이동한 것임을 알 수 있다. 즉

$$[(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + (x - \frac{1}{2})]^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2$$

을 만족함을 알 수 있다.

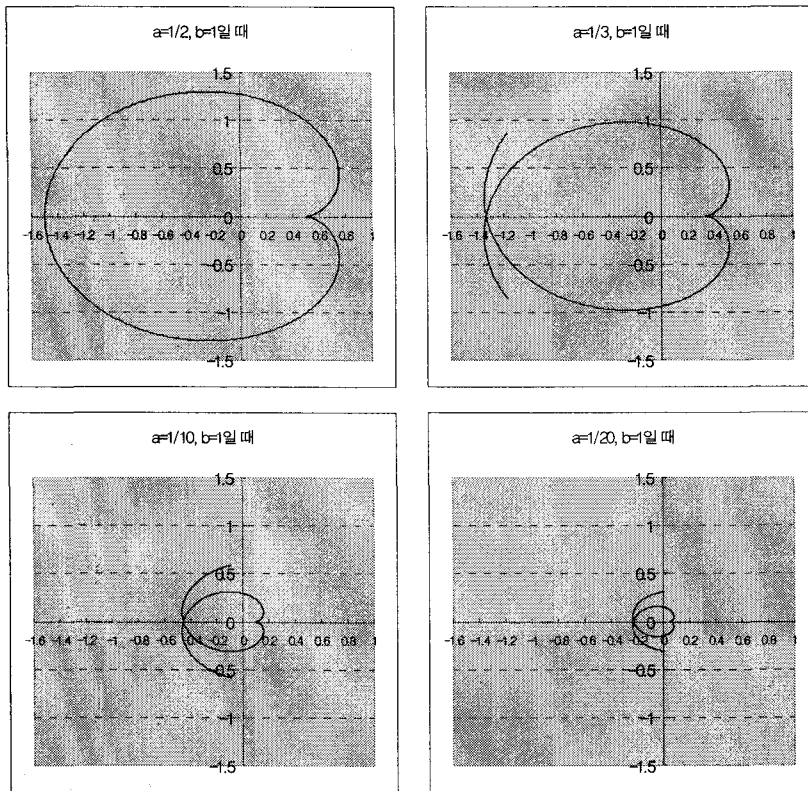
한 원이 다른 원의 바깥 둘레를 돌 때, 작은 원 상의 한 점이 그리는 자취인 epicycloid

경우에도 두 원의 반지름을 다양하게 바꿔가면서 실험을 해볼 수 있다. 이 경우에는 두 원의 지름이 같을 때 심장형이 됨을 알 수 있다.

이와 같이 스프레드시트환경에서는 매개 변수 변화를 자유롭게 하면서 함수족의 특징을 용이하게 파악할 수 있다. 성망형과 심장형이 모두 hypocycloid의 함수족에 속한다는 사실의 발견 및 정당화는 최초의 hypocycloid의 식만으로는 짐작하기가 매우 어려우며 실제 그래프를 그려보는 것이 큰 도움이 된다.

지금까지 살펴본 바로는 함수 교육에서 사용할 수 있는 공학의 하나로 스프레드시트를 사용하면 다음과 같은 이점이 있음을 알 수 있다.

스프레드시트를 이용하면 빠른 계산, 자동



[그림 II-7] $a=\frac{1}{n}$ 과 $b=1$ 일 때의 여러 가지 hypocycloid

복사 그리고 스크롤바의 연결 등을 통하여 대수적 식, 표, 그래프와 같은 다양한 수학적 표현 사이의 연결성을 시각적으로 보여줌으로써 한 표현에서의 변화가 다른 표현에 어떻게 영향을 미치는지를 쉽게 탐구할 수 있다. 그리고 다양한 수학적 표현 사이의 역동적인 변환을 통하여 종래의 지필 방법으로는 하기 힘들었던 함수에 대한 직관력을 길러줄 수 있고 함수족의 파악을 용이하게 하며, 여러 가지 실험을 통하여 지필 방법으로는 알기 어려운 새로운 수학적 사실을 찾거나 이를 형식화할 수 있는 기회를 제공한다.

III. 수학적 모델링 활동에서의 스프레드시트의 활용

우리나라 제 7차 수학 교육과정에서는 수학 교과를 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이며, 과학을 비롯한 대부분의 교과와 성공적인 학습을 위해 필요하고 기초가 되는 교과로 보고 있다(교육부, 1997).

그러나 현실적으로 학생들은 수학자나 수학 교사가 생각하는 것처럼 수학 교과를 자신들의 삶에 필요한 유용한 과목으로 인식하거나 수학 학습 시간을 통하여 실생활의 여러 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추었다고는 생각하지 않는다. 이것은 공학이 지원되지 않는 수학 학습 환경에서 계산의 복잡성을 고려하여 작위적이거나 지나치게 단순화된 실세계 문제를 제시한 데에도 원인이 있다. 따라서 학생들이 갖는 수학에 대한 부정적인 인

식과 실제 세계에서 수학이 차지하는 위상 사이의 심각한 갭을 줄이기 위해서도 수학이 실세계 현상을 이해하고 예측하고 통제하는데 강력한 힘을 가지고 있다는 것을 알게 하는 경험을 제공할 수 있어야 한다(류희찬, 2003). 이러한 경험을 제공할 수 있는 적절한 방법으로 평가받고 있는 것이 실세계 문제를 다룰 수 있는 풍부한 공학 환경 속에서의 수학적 모델링이다.

수학적 모델링이란 일반적으로 현실 세계 문제 상황을 수학적 과정의 거쳐 문제의 답을 얻어내는 과정으로 수학을 타 학문이나 수학적 세계와 적절하게 연결하고 학생으로 하여금 실세계 상황에서 개념을 학습하고 이를 응용하도록 한다. 이것은 일반적으로 다음과 같은 네 단계를 갖는다.

첫 번째 단계는 주어진 실세계 상황을 모델로 나타내는 모델 형성 단계, 두 번째 단계는 모델을 분석하고 결론에 이르는 단계, 세 번째 단계는 모델의 결과를 해석하고 예측하고 설명하는 단계, 네 번째 단계는 결론이 주어진 실세계 상황에 맞는지 여부를 검증해보는 단계이다. 이러한 과정을 통해 모델이 적합하지 않다고 판단되면 다시 위의 첫 번째 단계부터 반복하여 적절한 모델로 수정하게 된다. 모델링 활동에서 학생들은 자신들의 개념적 체계를 평가하고 수정하고 정제하는 상황 속에서 수학적 힘을 길러나갈 수 있으므로 이러한 경험을 제공할 수 있는 수학 교육의 한 방법으로 수학적 모델링의 도입은 중요한 의미를 갖는다.

그러나 현실 상황을 다루어야 하는 수학적 모델링의 경우에는 복잡한 수식의 계산이 필요하고 이들 사이의 패턴을 관찰할 수 있어야 한다. 그러므로 그래프, 수식, 표, 기하학적 도형, 알고리즘, 시뮬레이션 등을 제공할 수 있는 환경을 구축할 수 있다면 큰 도움이 된다.

Beare(1996)는 스프레드시트가 탐구 문제 중심, 학생 중심 또는 발견 중심의 다양한 학습유형을 촉진시키며, 스프레드시트를 사용하는 활동은 상호작용적이고 자료와 공식을 바꾸는 데에 즉각적인 피드백을 받을 수 있는 등 여러 가지 장점을 갖는다고 하였다. 그리고 Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland와 Ursini(1999)는 스프레드시트 환경에서 학생은 문제 현상을 지배하는 특정한 상황을 일반적인 상황으로 유추해볼 수 있고 스프레드시트 모델을 만듦으로써 현상의 다양한 측면을 탐구할 수 있다고 하였다.

모델링에서의 스프레드시트의 활용은 구성주의적 학습 환경 속에서 실세계 문제를 다룰 수 있게 해준다. 그리고 다양한 수학적 표현을 제공하고 그들 사이의 연결을 자유롭게 함으로써 수학적 모델링을 수월하게 만들고, 특히 차트 기능이 제공하는 그래프의 표현은 자료들에 숨어있는 이면의 의미를 들추어내는데 효과적으로 사용될 수 있다. 또한 표에 입력된 함수식이 드러남으로써 수학적 모델의 검토와 수정을 쉽게 할 수 있다. 스프레드시트의 자동계산 기능은 복잡한 계산을 대신하여 주고 이 계산 결과를 표를 통하여 나타낼 수 있어 전체적인 통일성을 파악하도록 해준다. 그리고 'what if' 유형의 문제를 탐구함으로써, 패턴의 변화 등을 읽고 예측할 수 있도록 도울 수 있어 사고실험을 통하여 탐구적으로 실생활 문제를 해결해나갈 수 있게 된다.

다음의 예는 모델링 활동에서 스프레드시트가 다양한 상황을 해석하고 예측하는데 유용하고 문제 상황에 내재한 사실을 발견하고 이를 수학적으로 설명할 수 있는 기회를 제공할 수 있음을 보여주는 예이다. 이해를 돕기 위하여 먼저 연구방법을 약술하고 학생의 모델링 활동에서 스프레드시트가 구체적으로 어떻게 사용

되었는지 언급하고자 한다.

1. 연구 방법

이 연구는 모델링활동에서의 스프레드시트의 역할을 알아보기 위한 것으로 실험 수업은 약 두 달간 10회에 걸쳐 실시되었다. 여기에 제시된 문제 상황을 해결하는 데는 약 2시간이 소요되었다. 실험수업은 고등학교 1학년 학생 6명을 2개조로 나누어 실시하였다. 주어진 문제 상황이 고등학교 1학년 이전에 배운 지식만을 요구하기 때문에 고등학교 1학년을 선택하였으며, 학생은 주어진 문제 상황으로부터 일차방정식을 세울 수 있고 기본적인 도형의 넓이나 부피 등을 식으로 세울 수 있어야 했으며 스프레드시트 사용 경험은 요구하지 않았다. 실험 수업 이전에 간단한 테스트를 통하여 학생들이 최소한의 요건에 부합함을 확인하였고, 스프레드시트 사용경험자는 1명으로 중학교 때에 한번 배운 정도임을 알게 되었다. 학업성취도는 상중하를 기준으로 상 2명, 중상 2명, 중 2명으로 구성되었다. 실험에 사용된 스프레드시트 역시 Microsoft Excel 2003이었다.

엑셀을 활용한 소그룹 모델링 활동을 본격적으로 시작하기에 앞서 학생들이 기본적인 엑셀의 기능을 익히는 시간을 90분 정도 가졌다. 이 때 학생들은 엑셀의 계산 기능, 표 그리기, 그래프 그리기, 스크롤바 연결하기 등의 기본적인 기능을 익히고 이 기능이 유용하게 쓰일 수 있음을 예를 다루어 보았다. 이어서 예비 실험으로 교사와 학생이 2회에 걸쳐 엑셀을 활용한 소그룹 모델링 활동을 하였다. 이 예비 실험의 목적은 학생의 엑셀조작 능력과 모델링 활동에서의 참여 정도에 따라 조의 재편성을 고려하고 학업 성취 정도를 파악하여 개발된 문제의 선택과 향후 문제 개발에 참고하는 것

이었다. 예비 실험 결과 두 개의 조는 처음 엑셀의 조작 시간의 관찰을 토대로 하여 편성한 것을 그대로 유지해도 된다고 판단하였다.

모델링 활동에 쓰이게 될 과제는 수학에 대한 자연스런 동기를 부여할 수 있는 현실 상황 문맥과 관련된 것으로 하되 수학적 개념, 아이디어, 구조가 풍부히 들어 있고 수평적 수직화와 수직적 수학화가 모두 일어날 수 있는 문제 상황을 구성하는 것을 원칙으로 하였다. 여기에서 사용한 문제 상황은 포식자-먹이 모델로 생물학 분야에서는 널리 알려져 있는 것으로 미분방정식을 사용하여 이를 해석할 수 있지만 스프레드시트를 사용해도 가능하고, 나아가 다양한 상황을 주고 이를 해석하는데 스프레드시트가 중요하게 작용할 요소를 가지고 있는 문제여서 택한 것이다.

활동지는 먼저 지필환경에서 문제 해결을 시도하도록 하고 이를 스프레드시트 모델로 만들어서 문제 상황을 해결한 다음 그 결과를 다시 지필 환경에 적도록 구성하였다. 그리고 마지막으로 전체의 과정을 되짚어보고 스프레드시트를 사용했을 때 특히 어려운 점이나 느낌 등을 적을 수 있도록 하여 다음 활동에 참조할 수 있도록 하였다.

스프레드시트는 사용 목적에 따라 이미 만들어진 템플릿을 사용할 수도 있으나 모델링 활동에서는 문제 상황을 해석하기 위한 다양한 모델을 도출하는 것이 중요하므로 이 연구에서는 학생이 직접 스프레드시트 모델을 만들어가는 것을 가정하였다. 그리고 스프레드시트 모델을 만드는 데는 스프레드시트의 기본적인 기능만을 사용하여도 가능하도록 하였다.

자료는 면담 자료, 오디오 및 비디오 자료, 필드 노트, 그리고 컴퓨터상에서 모델링 활동한 과정을 동영상으로 저장한 캡처 파일을 통하여 수집하였고 전사와 저장된 동영상 그리고

활동지를 통하여 분석하였다.

2. 스프레드시트를 이용한 다양한 상황의 해석 및 예측: 포식자-먹이(Predator-Prey) 모델링에서의 예

학생에게 주어진 문제 상황은 다음과 같다.

같은 지역에 살팽이와 산토끼가 살고 있다. 살팽이는 산토끼를 주먹이로 하는 포식자이다. 시간이 지남에 따라 살팽이와 산토끼의 수의 변화 양상은 어떤 것일까 하는 것이다. 이 문제 상황을 탐구하기 위한 작은 단계를 다음과 같이 나누었다. 첫째로 산토끼의 수의 증감이 살팽이 수에 어떤 영향을 미칠까를 토론하고 이를 수식으로 세워보는 것, 둘째로 산토끼수와 살팽이 수 그리고 이들의 변화양상에 영향을 미치는 비율을 제시하고 두 종의 변화 양상을 분석하는 것, 셋째로 적당한 시점에서의 한 종의 급격한 변화가 추후 어떤 변화를 수반하는지 예측해보는 것, 넷째로, 두 종의 특정한 수에서의 변화 양상을 관찰하고 그 이유를 파악하는 것이다.

이 활동에서 초기 모델을 형성하는 것, 즉 생물학적 법칙을 수학화하는 것은 어려운 일이므로 교사와 토론을 거쳐 수식을 만들고 이해하는 것으로 족하였다. 그러나 그 이후의 단계에서는 스프레드시트의 활용이 두드러지게 나타나고 교사의 개입은 간간이 질문을 하는 형식으로 줄고 학생의 토론이 활발하게 진행됨을 볼 수 있었다. 이 절에서는 그 두 번째 단계 이후에서의 활동을 중심으로 살펴보기로 한다.

첫 단계에서 교사가 주가 되어 토론과 설명을 통하여 만든 수식은 다음과 같은 과정을 통하여 세울 수 있었다.

살팽이가 없다면 산토끼는 일반적으로 한 개체의 개체군의 증가 모델을 따라 증가하고 포

식자인 살랭이는 산토끼가 없으면 점차 사라지게 된다. 살랭이는 주로 산토끼를 먹이로 하기 때문에 산토끼와 살랭이가 많이 조우할수록 산토끼는 더 많이 희생되며 살랭이는 환경이 나아져 더 많이 번식하게 된다.

이것을 식으로 나타내면 다음과 같이 나타낸다. 산토끼의 수를 R , 살랭이의 수를 L , 일정 기간 내의 산토끼 변화수를 ΔR , 살랭이 변화수를 ΔL 라고 하면, 이들 사이의 관계는 다음과 같이 나타낸다.

$$\Delta R = aR - bRL$$

$$\Delta L = -cL + dRL$$

여기에서 a, b, c, d 는 양의 상수로, a 는 산토끼수의 증가율, b 는 산토끼의 희생율(pre-factor), c 는 살랭이의 감소율, d 는 살랭이의 출산율(feeding factor)을 나타내는 것으로 $-bRL$ 는 산토끼수와 살랭이수가 커질수록 서로 마주치는 기회가 늘어나므로 전체 희생되는 산토끼는 많아짐을 의미하고, dRL 는 산토끼수와 살랭이수가 커질수록 살랭이의 포식 기회가 늘

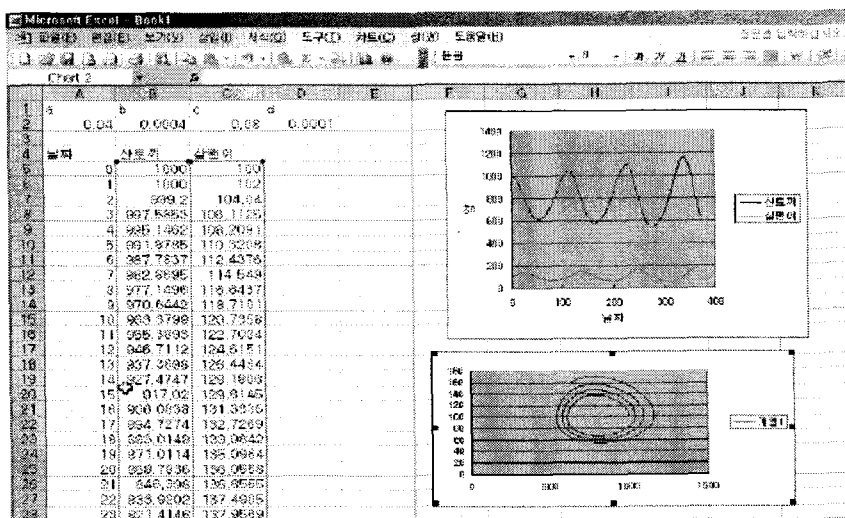
어남으로 보다 많은 새끼를 낳아 기를 수 있게 되는 것을 의미한다.

두 번째 단계에서는 위 대수식에서 요구되는 구체적인 수를 다음과 같이 주고 시작하였다.

a) 산토끼수를 1000마리, 살랭이 수를 100마리, 그리고 $a=0.04, b=0.0004, c=0.08, d=0.0001$ 로 놓았을 때, 이 두 종의 변화 양상은 어떻게 되겠는가?

학생들은 이미 몇 차례 모델링 활동을 하였기 때문에 주어진 대수식을 스프레드시트 수식으로 바꾸거나 그래프를 그리는 것에 대해 별다른 어려움이 없었다. 아래에 나타나는 그림은 학생이 그린 것으로 동영상 화면을 캡처하여 붙인 것이다. 두 개조 모두 큰 차이가 없었으나 설명하기에 용이한 그림을 선택하였다.

학생은 아래와 같이 두 종류의 그래프를 그린 다음 이 그래프를 이용하여 두 종의 변화 양상을 토론 할 수 있었다. 1조 두 학생은 먼저 두 그래프 중 위에 있는 파동 모양의 그래프를 보기에 좋게 화면에 크게 확장시킨 다음 아래와 같이 교사의 개입 없이 토론을 하였다.



[그림 III-1] 시간에 따른 두 종의 변화를 나타내는 그래프

아영: 음, 약간 대각선인데(두 그래프의 극대점이 약간 비켜 있는 것을 보고)?

정윤: 조금 안 맞는다.

아영: 응.

정윤: 그러면 토끼가 즈, 아 그렇지, 토끼가 증가하면, 아니 감소하면서 애(살팽이를 가리킴)가 먹잖아. 애가 먹어서. 먹으면 애가 증가하지.

아영: 아 먹는 게 아니고 늘어나고 있잖아.

정윤: 그니까, 그러니까 토끼를 먹어서.

아영: 애가 늘어나고 있어서 애는 준다고? 딱 이쯤 됐잖아(살팽이 수의 첫 번째 극대점을 가리키면서). 그럼 여기서부터 살팽이 수는 줄어들어. 왜 줄어들었지, 애가 그런데?

정윤: 토끼가(말이 잠시 끊김). 먹을 게 없어서. 자기네(살팽이를 가리킴)들이 주체를 못한 거야. 하도 많이 먹어서. 그래서 좀 굶어 죽는 애가 생기다가 그러다가 굶어 죽어서 살팽이 수가 줄어들었어. 그러면 토끼는 좀 증가하겠지. 그래서 그 시기가 안 맞는 거야.

교사가 다른 조의 학생에게 그래프를 해석해 보라는 요청하자 학생은 다음과 같이 답하였다.

현지: (그래프를 가리키면서) 그때는 살팽이가 먹을 게 없어서 점점 줄고 있었는데, 애(살팽이를 가리킴)가 먹을 게 없어 죽는 동안 애(산토끼)는 번식을 한 거예요. 그래서 올라가니까 애가 갑자기 되게 먹을 게 많아지니까 애는 조금 늦게 올라가는 거예요.

다음의 대화는 위 그림에서 두 번째 그래프를 보고 학생들이 나눈 것이다. 이때에도 학생은 두 번째 그래프를 드래그하여 보기에 편하게 크게 확대하여 놓고 대화를 나누었다.

정윤: 이거 되게 신기해(아영이가 잠시 화장실에 다녀온 사이에 정윤은 그림을 그려보았음).

아영: 어. 어머, 우와. 이거 원래 이런 것 정상

이예요? 선생님 이것 정상이에요?

교사: 유정이하고 얘기해봐. 유정이가 연구를 많이 해봤으니까.

아영: 뭐야 왜 이래.

정윤: 그니까 이게 뭐냐면 토끼랑 살팽이잖아. 토끼가 이렇게 가는 거잖아.

아영: 어떻게 가?

정윤: 토끼가 이렇게 왼쪽으로 가면 감소하고 오른쪽으로 가면 증가하잖아. 애가 오른쪽으로 가면서 살팽이는 이렇게 가는 거니까 살팽이는 증가하지. 살팽이는 증가하고 토끼는 감소해 이것처럼.

아영: 응.

정윤: 그 다음에 토끼가 여전히 감소하고 살팽이는 감소해.

아영: 토끼가, 토끼가. 응. 응. 응.

정윤: 그리고 토끼가 슬슬 슬슬 늘어나는데 살팽이는 그대로 감소해.

아영: 그 다음에 토끼가 늘어나면.

정윤: 그 다음에 이거는 그 다음에 이거는 토끼는 늘어나고 살팽이는 증가해. 그런 다음에 이걸 계속 반복하는 거야.

아영: 와.

정윤: 신기하지?

여기에서 학생들은 그래프를 모델을 해석하는 도구로 유용하게 사용하고 있음을 알 수 있다. 위 상황을 주시하면 두 종이 동시에 증가하는 때와 동시에 감소하는 때, 어느 한 종이 증가할 때 다른 종이 감소하거나 감소할 때 증가하는 경우가 있음을 알 수 있다. 산토끼와 살팽이의 변화 양상에 대해 거의 모든 학생이 대략적으로 올바른 해석을 내리는 것을 볼 수 있다. 단지 대수식만을 가지고 이와 같은 해석을 하기란 불가능할 것이다. 그러나 스프레드시트의 환경에서는 대수식을 쉽게 순서쌍으로 변화시키고 이를 그래프로 그리는 것이 가능하므로 수식만을 보고서는 거의 불가능한 해석을 시도할 수 있는 것이다.

세 번째 단계의 급격한 생태계의 변화가 생

졌을 때 그 변화 양상을 알아보기 위하여 산토끼 수나 살팽이 수의 급격한 변화를 주어볼 수 있는데 여기에서는 살팽이 수에 변화를 주었다. 산토끼 수를 변화시켜도 유사한 결론을 얻을 수 있다. 질문은 다음과 같다.

b) 만일 적당한 시점(예를 들어 140단위 후)에서 살팽이 사냥을 하여 그 수가 갑자기 50마리로 줄면 어떻게 되는가?

이 문제를 탐구하기 위해 학생들은 140단위(학생들은 이것을 계속 날짜로 불렀다)에서 살팽이 수에 단지 50을 입력하여 위 두 그래프가 아래와 같이 바뀐 [그림 III-2]와 [그림 III-3]과 같은 두 그래프를 얻었다. 이렇게 동시에 현상이 일어나는 것은 스프레드시트의 전형적인 특징이다. 스프레드시트에서는 처음 식을 입력하고 그 아래에 있는 셀 들을 식의 자동복사 기능을 이용하여 입력하기 때문에 참조된 셀이 50으로 바뀌자마자 그 아래에 있는 셀들도 동시에 바뀌면서 그래프도 동시에 바뀌는 것이다. 먼저 두 학생은 산토끼와 살팽이의 수가 나타난 그래프를 다시 보기 좋도록 드래그하여 확대한 후 그래프를 보면서 토론하였다.

아영: 왜 이렇게 됐지?

교사: 왜 이렇게 됐을까?

정윤: 어 왜 일자야?

아영: 여기서 확 확 줄어가지고 50이 됐어, 살팽이 수가.

정윤: 아 여기에서 살팽이를 이 이렇게 됐다고?

아영: 그 다음엔 다시 정상인데. 원래대로 가던 대로 가는데?

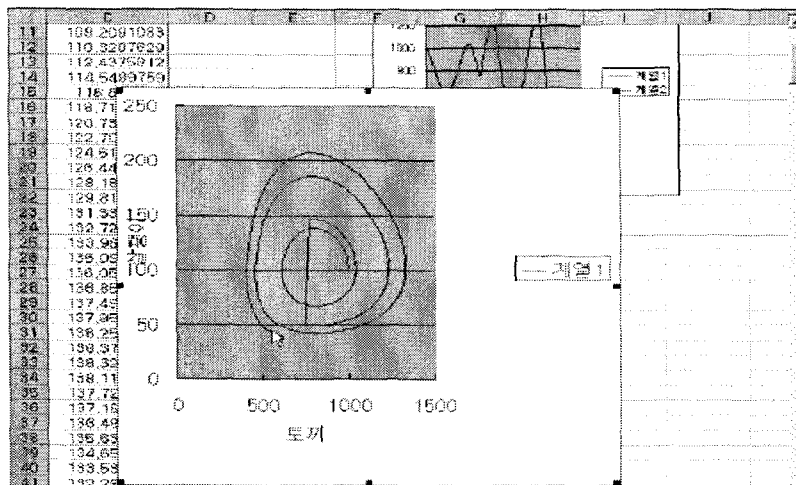
정윤: 이게 한참 오래 걸리는 것 아니야? 여기에서 여기까지(살팽이 수가 50으로 떨어진 지점의 오른쪽으로 좁은 수평부분을 가리키며).

아영: 그런가?

이 때 두 학생이 보고 토론한 위 그래프는 기간이 명시되어 있지 않아 산토끼가 증가하는데 오래 걸리는지에 대한 정보를 얻기 힘들다. 이것을 보고 교사는 기간, 산토끼의 수 그리고 살팽이의 수를 모두 포함한 아래의 그래프([그림 III-3])를 참조하도록 하였다.

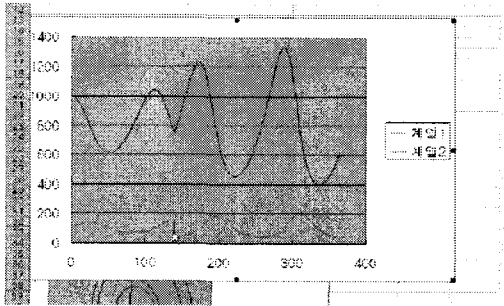
교사: 잡은 데가 어디야?

아영: 50이 되었으니까. 여기에서 여기(살팽이를 나타내 곡선의 수직으로 반듯한 곳을 가리키면서).



[그림 III-2] 두 종사이의 변화를 나타내는 그래프

교사: 토끼는 어떻게 될까?
 아영: 확 줄어들다 말고 다시 증가.
 교사: 왜 그럴까?
 정윤: 자기를 먹는 사람들이 없으니까.
 교사: 사람들? 어허.
 아영: 사람들?
 정윤: 먹는 것들이 없으니까.
 교사: 그러네.



[그림 III-3] 기간 140단위에서 갑자기 살팽이 수가 줌

학생들은 두 번째 그래프를 보고 살팽이 수가 갑자기 줄었을 때부터 바로 산토끼 수가 불어나는 것을 관찰하고 전체적인 변화 양상이 예전과 같이 회복됨을 알게 되었다.

마지막 단계의 문제 상황을 제시하기에 앞서서 산토끼 수를 900으로 주고 변화양상을 탐구하도록 하였다. 학생들은 변화양상은 비슷하지만 변화의 폭이 작음을 알게 되었다. 산토끼 수가 800에 가까워질수록 변화의 폭은 작아지게 되어 있다. 마지막 단계의 문제는 다음과 같이 주었다.

c) 만일 처음의 살팽이 수가 100이고 산토끼 수가 800일 때는 어떠하겠는가?

아래 그림은 [그림 III-1]과는 다른 방식으로 그려진 것으로 산토끼 수와 살팽이 수를 절대 참조하여 식을 세우고 그림을 그린 것이다. 이 경우 산토끼 수와 살팽이 수만 바뀌주면 그에 따른 그림을 순간적으로 얻을 수 있게 된다. 아래와 같은 그림도 이와 같은 방식으로 얻은 것이다.

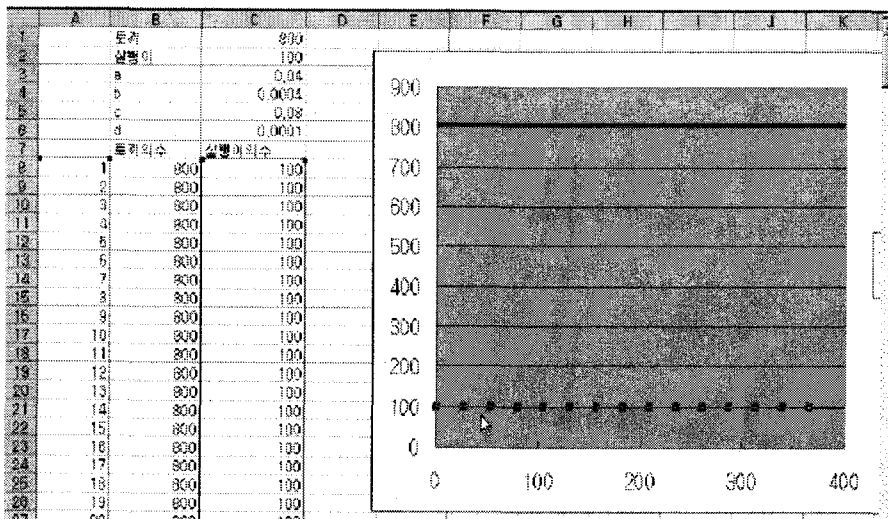
아영: 어. 어. 왜 이래.

정윤: 와. 없어졌어.

아영: 잘못된 거예요. 아니면 원래 이런 거예요?

교사: 몰라. 값을 봐봐. 값을. 값을 잘 봐봐.

아영: 와. 와. 정말 평화로운 세상이네. 하하하. 정말.



[그림 III-4] 살팽이 100마리, 산토끼 800마리 일 때의 변화 양상

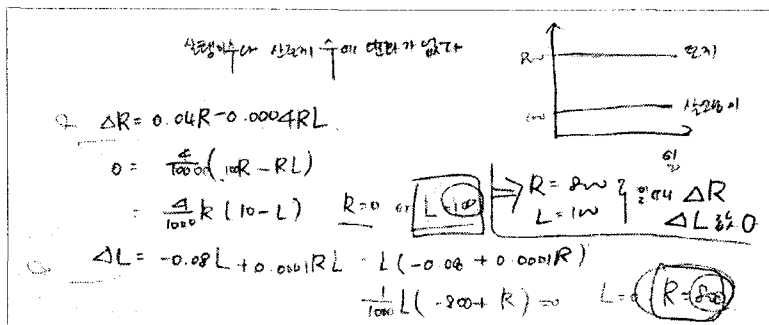
정윤: 아하하. 아무도 안 먹는 거예요?
 아영: 아무도.
 교사: 안 먹는 건 아니지.
 아영: 그 숫자를 너무 유지하고 있어.
 교사: 그 숫자를 계속 유지하는 거지. 먹는 만큼 늘어나고.
 정윤: 왜냐면 증가 감소하는 양이 없으니까.
 아영: 와. 세상은 어떠한가? 세상은 평화롭다. 정말 평화롭다.

이 문제에서 교사는 학생에게 왜 이런 일이 일어날까를 질문하고 이를 지필로 풀어보도록 하였다. 학생들은 산토끼 수와 살쥬이 수의 변화량을 나타내는 두 식 $\Delta R = aR - bRL$, $\Delta L = -cL + dRL$ 에서 좌변을 모두 0으로 놓고 방정식을 풀어서 평형점이라고 불리는 산토끼 수와 살쥬이 수를 구할 수 있었다. 이것은 스프레드시트 환경이 그래프를 통하여 평형점의 존재라고 하는 새로운 사실을 발견하게 하고 이를 다시 수식으로 정당화하는 기회를 제공하여주는 것을 보여준다. 아래 [그림 III-5]는 지필 환경에서 평형이 되는 점이 산토끼 800마리와 살쥬이 100마리임을 식으로 세우고 푼 것을 보여준다.

이 포식자 먹이(Predator-Prey) 모델은 1925년도에 Lotka에 의해서 그리고 1931년에 Volterra에 의해 각기 발표되어 Lotka-Volterra 모델로 불리기도 한다. 그리고 일반적으로 어떤 지역

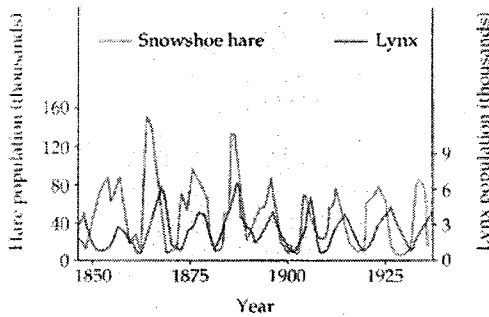
의 한 종의 개체군의 성장 모델은 그 지역의 개체군 부양능력에 영향을 받기 때문에 무한히 증가하지는 않는다. 이것을 고려하면 두 개체군의 변화의 폭은 시간이 흐르면서 점차적으로 작아져 평형점으로 가까워짐을 알 수 있다. [그림 III-6]은 실제 캐나다에서 1670년대부터 모피를 팔아온 Hudson's bay 회사가 1840년대부터 1930년대까지 기록한 포식자 캐나다 살쥬이와 먹이 snowshoe 토끼 사이의 변화기록으로 학생들이 탐구하였던 Lotka-Volterra 모델과 흡사함을 보여준다(Stewart, 2004).

이 활동이 끝난 다음 학생과의 면담에서 학생들은 스프레드시트를 사용한 활동을 통하여 처음에 세웠던 식을 보다 잘 이해하게 되었다고 하였다. 모델링 활동에서 다루는 문제는 흔히 실세계 상황이 되므로 여기에서 다룬 예처럼 문제 상황을 지배하는 법칙을 학생이 도출하기 어려운 경우도 있고 스프레드시트가 이 단계에서 큰 도움이 되지 않는 경우도 있다. 그러나 그 이후 모델링 활동의 단계에서는 스프레드시트가 중요한 역할을 함을 볼 수 있었고 이러한 역할로 인하여 학생은 처음 주어진 대수식을 보다 잘 이해할 수도 있었다. 또한 스프레드시트 환경에서는 모델의 분석과 결론을 얻는 단계와 그 결론의 해석을 동시에 시도할 수 있음을 볼 수 있는데, 이것은 대수적 모



[그림 III-5] 두 종의 평형상태를 수학적으로 설명함

델을 스프레드시트 모델로 변환할 때 자동계산을 통하여 대수적 식을 만족하는 수들로 표와 그래프가 형성되기 때문이다. 그리고 스프레드시트를 사용하면 셀의 연결을 통하여 시뮬레이션 환경을 만들 수 있기 때문에 대수적 모델로부터는 추측하기 어려운 상황 변화를 그래프를 통하여 해석하고 다양한 상황의 변화를 관찰하고 해석할 수 있게 되는 것이다. 또한 경우에 따라서는 상황 속에 숨어 있는 사실을 발견하고 이를 수학적으로 설명하는 기회를 가질 수도 있음을 알 수 있다.



[그림 III-6] Hudson's bay 회사의 기록

IV. 맺음말

지금까지 스프레드시트가 가지는 기본적인 기능이 함수의 지도와 모델링 활동에서 어떻게 사용되는지를 알아보고 시사점을 찾고자 하였다. 스프레드시트에서의 수식의 자동복사 기능과 차트 마법사의 기능을 사용하면 반복적인 많은 계산을 수행해서 쉽게 볼 수 있는 표와 그래프로 나타낼 수 있어 여러 가지 함수의 특징을 파악할 수 있다. 나아가 셀 연결 기능을 이용하여 매개 변수를 변화시킴으로써 함수의 관계식과 그래프의 관계를 역동적으로 고찰할

수 있고 함수족의 특징을 파악할 수 있어서 함수 지도에서 유용하게 사용될 수 있다. 이러한 기능은 모델링 활동에서도 긴요하게 쓰인다. 모델링 활동의 여러 단계 중 특히 모델의 분석, 결과의 해석 및 예측 단계에서 중요한 역할을 한다. 지필 환경에서 가능하지 않은 시뮬레이션 환경을 만들어 다양한 상황을 탐구할 수 있고, 경우에 따라서는 새로운 사실을 발견하도록 하며, 이를 지필환경에서 수학적으로 설명해볼 수 있는 기회를 제공한다.

여러 관찰을 통한 수학적 사실의 귀납적 추측과 발견은 수학의 발달 초기에서 중요한 역할을 했던 것처럼 학생이 기존 지식에 대한 이해를 깊이 하거나 새로운 지식을 발견하는 데에서도 중요한 역할을 한다. 또한 학생에게 수학 지식의 생성 배경을 일깨워줘 형식적이고 추상적인 수학을 대할 때 갖는 당혹감을 덜어줄 수도 있다. 스프레드시트를 이용하여 함수와 모델링 활동을 지도한다면 다양한 관찰이 가능한 실험 환경을 구성하여 학생이 수학 개념이 가지는 내적 의미를 깊이 이해하도록 하고, 나아가 실세계의 다양한 상황을 이해하고 그 속에 있는 새로운 사실을 학생 스스로 추측하고 발견하고 발견한 사실을 수학적으로 설명할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

참고문헌

- 교육부(1997). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8]). 서울: 대한교과서주식회사.
- 김현주(2005). **스프레드시트 환경에서 대수 문장제 해결 경험을 통한 학생들의 문자 인식과 문자식 표현에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

- 류희찬(1997). 수학교육에서의 컴퓨터의 활용: 현황과 과제. **한국교원대 수학교육연구소 제 6회 수학교육세미나**.
- 류희찬(2003). 수학교육에서 '모델링' 지도의 의미와 방안. **청람수학교육**, 11.
- 손홍찬(2004). 엑셀을 이용한 함수의 그래프 그리기와 그 활용. **청람수학교육**, 15, 1-57.
- 신동선·류희찬(1998). **수학교육과 컴퓨터**. 서울: 경문사.
- Beare, R., & Hewitson, J. (1996). Asking and answering all sorts of scientific questions using spreadsheets. *School Science Review* 77(281), 43-53.
- Friedlander, A. (1998). An excellent bridge to algebra. *Mathematics teacher*, 91(50), 382-383.
-(1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, 337-344.
- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., & Tabach, M. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments :a designer-researcher-teacher-learner activity. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. (pp. 657-694). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kutzler, B. (2003). CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics, In J. T. Fey., A. Couco, C. Kieran, L. McMullin, & R. M. Zbiek (Eds.), *Computer Algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 73-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 구광조·오병승·류희찬(역) (1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향**. 서울: 경문사.
-(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
-(2005). *Technology-supported mathematics learning environments*, sixty-seventh yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Masalski, W. J. (1990). *How to use the spreadsheet as a tool in the secondary school mathematics classroom*. Reston, VA: NCTM.
- Neuwirth, E., & Arganbright, D. (2004). *The active modeler : mathematical modeling with Microsoft Excel*. Belmont, California, Brooks Cole publishing company.
- Stewart, J. (2004). *Calculus, early transcendentals*. Thomson Brooks/cole.
- Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical behavior*, 12, 353-383.
- Wilson, K. Ainley, J., & Bills L. (2004), Spreadsheet generalizing and paper and pencil generalizing, In M. J. Haines & A. B. Fuglestad, (Ed.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 441-448.

The Role of Spreadsheet in Teaching Function and Modeling Activity

Son, Hong Chan (KNUE, graduate school)

Lew, Hee Chan (KNUE)

In this article we studied the role of spreadsheet in teaching function and modeling activity by some examples and students' activity performed by the six 10th graders. We especially focused the role of spreadsheet in understanding of various kinds of functions and the families of functions, and in the explanation of the given modeling problem situations. The functions of automatic copy, graphic and the cell reference of spreadsheet can be used to make students observe the causes and effects of changes of the various kind of mathematical representations of functions such as algebraic formulas, tables and graphs. Especially those functions give students a chance to identify family of functions by changing the parameters and this may lead them to the discovery of mathematical facts. In modeling activities they play a key role in the stages of the analysis of the model, explanation of the results of model and conjecture of the real world situations. As well as they make students find the rules underlying in the real world by making spreadsheet as simulation environments, which are almost impossible to make in paper and pencil environments, and give them a chance to justify their findings using mathematics.

* **Key words** : spreadsheet(스프레드시트), algebra(대수), function(함수), family of functions(함수족), modeling activity(모델링 활동), discovery(발견)

논문접수 : 2005. 10. 5

심사완료 : 2005. 11. 1