한국수학사학회지 제18권 제4호(2005년 11월), 125-134

평면영역의 이론 발전과정과 대표영역*

수원대학교 수학과 **정문자**
mjeong@suwon.ac.kr

이 논문에서는 평면영역의 해석함수에 대한 이론과 대표영역에 대하여 연구하였다. 다중연결 평면영역의 대표영역에 대한 소개 및 새로운 대표영역이 나오게 된 계기를 알아보고, 그 대표영역에 대한 성질을 조사하였다. 그리고 양해석적으로 동치인 영역들을 알아보았다.

주제어 : 다중연결 평면영역, 대표영역, 양해석적으로 동치

0. 서론

허근은 1494년에 Pacioli(1445-1517)가 삼차방정식의 풀이가 불가능하다고 단언한 지 10년도 되기 전에 Ferro(1465-1526)가 특별한 경우의 삼차방정식의 풀이를 발견하면서 그 존재가 밝혀지게 되었다. 1545년에는 Cardano(1501-1576)가 특별한 경우의 삼차방정식의 해법을 모든 삼차방정식의 해법으로 확장하였으며, 1572년에는 Bombelli (1526-1572)가 카르다노의 공식을 이용하여 찾아낸 삼차방정식 $x^3 = 15x + 4$의 근이 두 켤레 복소수의 세제곱근의 합이면서도 실근임을 뛰어난 통찰력으로 알아내었다. 1777년에는 Euler(1707-1783)가 허수를 i로 표기하였고, 1799년에 Bessel(1784-1846)이 복소수를 복소평면에 기하학적으로 표현하게 되면서 수영역이 1차원의 실수에서 2차원의 복소수평면으로 확장될 뿐만 아니라, 이에 따라 평면영역에서의 이론이 활발하게 전개되었다. 이것은 실함수를 복소함수로 확장하는 결과를 가져왔고, 물리학자와 공학자들은 전기회로와 유체역학 등의 이론정립에 복소함수를 널리 응용하게 되었다.

현대적인 복소함수론과 복소적분은 1814년의 Cauchy(1789-1857)의 논문으로부터 탄생하게 되었으며, 이후 35년간 Cauchy가 해석학적으로 복소함수에 대한 많은 이론을 정립하였다. 이 논문에서는 평면영역(planar domain)에서의 해석함수에 대하여 알아보고, 평면영역을 나타내는 새로운 대표영역(representative domain)에 대하여 논의하고자 한다.

* 본 논문은 한국학술진흥재단 과제번호 R04-2003-000-10045-0 지원에 의하여 연구되었음.

1. 평면영역의 해석함수

영역 $D \subset \mathbb{C}$에서 정의되는 복소함수 f가 어떤 점 $z_0 \in D$의 한 근방내의 각 점에서 미분가능할 때 $z_0 \in D$에서 해석적이라고 한다. 또한 f가 D내의 모든 점에서 해석적일 때 영역 D에서 해석적이라고 하고, 이 함수를 해석함수라고 한다. 해석함수는 코시-리만 방정식을 만족시키는데, 이 코시-리만 방정식은 해석함수의 실수부와 허수부의 관계를 말해주는 널리 알려진 편미분방정식이다. 대표적인 해석함수로는 $f(z) = e^z$이 있으며, 이는 유한 복소평면의 모든 곳에서 해석적이고, 따라서 이는 전해석함수이다. 해석함수에 대한 일반적인 이론은 [1, 2]를 참조한다.

1814년에는 그린 정리가 아직 발표되지 않아 코시가 직사각형 모양의 폐곡선을 따라 $f(z) = e^{-z^2}$을 적분할 때 그린 정리를 이용하지 못하였으나, 1828년에 그린 정리가 발표되자 1846년에는 $f'(z)$의 존재성과 연속성을 가정한 그린 정리를 이용하여 복소적분을 하게 되었다[3, p.270].

함수 f가 영역 D내의 $z_1 \neq z_2$인 모든 점 z_1, z_2에 대하여 $f(z_1) \neq f(z_2)$가 성립할 때 f는 영역 D에서 단엽함수(univalent function)라고 한다. 또 f가 한 점 z_0의 어떤 근방 안에서 단엽일 때 f를 한 점 $z_0 \in D$에서 국소적인 단엽함수(locally univalent function)라고 한다. 해석함수 f에 대하여 조건 $f'(z_0) \neq 0$은 z_0에서 국소적으로 단엽이라는 것과 같은 것이다. 해석적이고 단엽인 함수 f는 그의 각을 보존하는 성질 때문에 등각사상(conformal mapping)이라고도 부른다.

아래의 정리 1.1에 있는 Riemann(1826-1866)의 사상정리(Riemann Mapping Theorem)에 의하면 복소평면전체가 아닌 임의의 단순연결 평면영역에서 정의된 단엽함수를 단위원판 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$에서 정의된 함수와 대응시킬 수 있다. 그러므로 단위원판에서 정의된 단엽함수의 대부분의 기하학적 정리들을 2개 이상의 경계점을 가진 임의의 단순연결 평면영역에서 정의된 단엽함수에 관한 정리로 쉽게 옮겨서 생각할 수 있으므로, 단엽함수의 정의역을 단위원판으로 제한해서 생각할 수 있다.

정리 1.1. [리만 사상정리]

D를 복소평면전체가 아닌 한 단순연결 평면영역이라 하고 E를 단위원판이라 하자. z_0을 D내의 한 점이라 하자. 그러면 $f(z_0) = 0$이고, D를 E로 사상하는 전단사이면서 해석적인 함수 $f : D \to E$가 존재한다. 더욱이 $f'(z_0) > 0$인 조건을 주면 함수 f는 유일하게 결정된다.

유일한 이 함수를 리만 사상(Riemann map)이라 한다. 이는 다중연결 평면영역에서 Ahlfors(1907-1996)에 의해 다음과 같이 일반화되었는데, 다중연결 평면영역에서는 리만 사상 대신에 알포스 사상(Ahlfors map)이 존재하여 다음의 정리를 만족시킨다[4].

따름정리 1.2. [일반화된 사상정리]

D를 다중연결 평면영역이라 하고 E를 단위원판이라 하고, z_0을 D내의 한 점이라 하자. D를 E내부로 사상하는 해석함수들 중에서 집합족 $\sum = \{$ h는 D에서 E 내부로의 해석함수이며, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)>0$인 조건을 만족하는 함수$\}$를 생각하자. 그러면

$$f'(z_0) = \max_{h \in \Sigma} h'(z_0)$$

를 만족하는 유일한 함수인 알포스 사상 f가 존재한다.

이 알포스 사상 $f: D \rightarrow E$는 D가 n중 연결 평면영역일 경우 n개의 값을 1개의 값으로 사상하는 고유 해석사상(proper holomorphic map)이며, $n=1$인 경우 리만 사상과 일치한다.

2. 평면영역의 대표영역

리만 사상에 의해 복소평면 전체가 아닌 모든 단순연결 평면영역은 단위원판과 등각적으로 동치(conformally equivalent)이다. 그러므로 단위원판을 단순연결 평면영역의 대표영역이라 할 수 있다. 그러나 다중연결 평면영역에서는 리만 사상정리가 성립하지 않으므로 단위원판을 대표영역이라 할 수 없다. 이중연결 평면영역인 경우, $r_2/r_1 = R_2/R_1$인 경우에만 두 원환 $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$와 $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$가 등각적으로 동치이다. 원환이 이중연결 평면영역의 대표영역이므로, 모든 이중연결 평면영역은 하나의 원환으로 가는 등각사상이 존재하며, 등각타입은 r_2/r_1에 따라 결정된다.

다중연결 평면영역의 대표영역을 들어보면, 평행절선 영역(parallel slit domain), 파문 영역(circular slit domain), 방사절선 영역(radial slit domain), 원판에 동심파문(concentric circular slit)들이 있는 영역, 원환에 동심파문(concentric circular slit)들이 있는 영역 등이 있다. 즉 대표영역으로 평행절선 영역을 택한 경우, 모든 다중연결 평면영역은 적어도 하나의 평행절선 영역과 등각적으로 동치이다. $n>2$인 경우 n중 연결 평면영역의 등각타입은 $3n-6$개의 실수에 의해 결정된다[9, p. 334].

평행절선 영역이란 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$에 평행절선(parallel rectilinear slit)들을 가진 영역이다. 만약 $w=f_1(z)$가 주어진 n중 연결 평면영역 D를 평행절선 영역으로 사상하는 등각사상을 나타낸다면 $f_1(v)=\infty$가 되는 한 점 $v\in D$가 존재한다. 그리고 평행한 절선들은 실수축과 주어진 각도 θ를 이루며, $z=v$근방에서 $f_1(z)=f_{1\theta}(z,\ v)$의 로랑급수 전개는

$$f_1(z)=f_{1\theta}(z,\ v)=\frac{1}{z-v}+a_\theta(z-v)+b_\theta(z-v)^2+\cdots$$

형태가 되도록 정규화(normalization) 할 수 있다. 이러한 조건들로부터 $f_{1\theta}(z,\ v)$는 유일하게 존재한다.

파문 영역이란 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$에서 중심 $z=0$을 가진 동심 원호(concentric circular arc)들을 제외한 영역이다. 만약 $w=f_2(z)$가 주어진 n중 연결 평면영역 D를 파문 영역으로 사상하는 등각사상을 나타낸다면 $f_2(u)=0$, $f_2(v)=\infty$가 되는 두 점 $u,\ v\in D$가 존재한다. 그리고 $z=v$근방에서 $f_2(z)=f_2(z\ ;u,\ v)$의 로랑급수 전개는 $Res(f_2,\ v)=1$이 되도록, 즉

$$f_2(z)=f_2(z\ ;u,\ v)=\frac{1}{z-v}+b_0+b_1(z-v)+\cdots$$

형태가 되도록 정규화 할 수 있다. 이러한 조건으로부터 $f_2(z\ ;u,\ v)$는 유일하게 존재한다.

방사절선 영역이란 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$에 원점으로 향하는 방사절선들이 있는 영역이다. 만약 $w=f_3(z)$가 주어진 n중 연결 평면영역 D를 방사절선 영역으로 사상하는 등각사상을 나타낸다면 $f_3(u)=0$, $f_3(v)=\infty$가 되는 두 점 $u,\ v\in D$가 존재한다. 그리고 $z=v$근방에서 $f_3(z)=f_3(z\ ;u,\ v)$의 로랑급수 전개는 $Res(f_3,\ v)=1$이 되도록, 즉

$$f_3(z)=f_3(z\ ;u,\ v)=\frac{1}{z-v}+c_0+c_1(z-v)+\cdots$$

형태가 되도록 정규화 할 수 있다. 이러한 조건들로부터 $f_3(z\ ;u,\ v)$는 유일하게 존재한다.

원판에 동심파문들이 있는 영역이란 원판(단위원판 이라 하자)에서 원판의 경계인 원과 중심이 같은 동심 원호들을 제외한 영역이다. 만약 $w=f_4(z)$가 주어진 n중 연결 평면영역 D을 원판에 동심파문들이 있는 영역으로 사상하는 등각사상을 나타낸다면 $f_4(u)=0$이 되는 한 점 $u\in D$가 존재하며, D의 하나의 경계성분(boundary component)을 원판의 경계인 원으로 사상한다. 예를 들어 D 의 경계성분들을 C_1, C_2, $\cdots$, C_n이라 하면, $w=f_4(z)$에 의해 어떤 하나의 경계성분 C_ν가 원으로 사상한다. 그러므로 n개의 서로 다른 종류의 사상이 있다. 따라서 $f_4(z)=f_{4\nu}(z\,;\,u)$는 $f_{4\nu}(u\,;\,u)=0$, $f_{4\nu}'(u\,;\,u)>0$이라는 조건하에서 유일하게 존재한다.

원환에 동심파문들이 있는 영역이란 원환에서 원환과 중심이 같은 동심 원호들을 제외한 영역이다. 만약 $w=f_5(z)$가 주어진 n중 연결 평면영역 D를 원환에 동심파문들이 있는 영역으로 사상하는 등각사상을 나타낸다면 이 사상은 D의 두 개의 경계성분들을 원환의 경계인 두 원으로 사상한다. 예를 들어, D의 경계성분들을 C_1, C_2, $\cdots$, C_n이라 하면, $w=f_5(z)$에 의해 어떤 두 개의 경계성분 C_μ, C_ν가 각각 원환의 안쪽의 원과 바깥쪽의 원으로 사상한다. 그러므로 ${}_nP_2=n(n-1)$개의 서로 다른 종류의 사상이 있으며, 곱셈상수를 무시하면 이 사상은 유일하게 존재한다.

이제 다중연결 평면영역의 새로운 대표영역에 대하여 알아보자. 이 연구는 Bell [5, 6]의 다음과 같은 추측에서 비롯되었다.

추측2.1.[5, 6]

모든 n중연결 평면영역($n\geq 2$)은 적당한 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-2}$ 와 적당한 양의 실수 r 에 대하여 다음과 같은 형태의 영역

$$\left\{z\in\mathbb{C} : \left|z+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{z-b_k}\right|<r\right\}$$

과 양해석적으로 동치(biholomorphically equivalent)이다.

그가 이런 추측을 하게 된 계기는 영역

$$A_r=\left\{z\in\mathbb{C} : \left|z+\frac{1}{z}\right|<r\right\} \quad (r>2)$$

에 대한 연구에서 비롯된다. 영역 A_r은 $r>2$인 경우 매끄러운 실 해석 경계를 가진 이중연결 평면영역이며, 사상 $f_r=\frac{1}{r}(z+\frac{1}{z})$은 A_r에서 단위원판으로의 고유 해석사상이며, 사상 f_r의 치역은 단위원판을 두 번 덮게 된다.

영역 A_r의 절대값(modulus)은 r이 2에 접근할수록 0으로 접근하며, r이 ∞에 접근할수록 ∞로 접근하는 단조증가함수이다[5]. 그러므로 모든 이중연결 평면영역은 단 하나의 영역 A_r ($r>2$)과 양해석적으로 동치이고, 영역 A_r은 이중연결 평면영

역의 대표영역이라 하겠다. 여기서 두 영역사이에 전단사이고 해석적인 함수가 존재하며 그의 역사상도 해석함수일 때, 두 영역이 양해석적으로 동치라고 한다. 이것을 바탕으로 하여 만든 위의 추측에 대하여 [7]에서 이 추측이 사실임이 증명되었다.

정리2.2.[7]

모든 n중 연결 평면영역($n \geq 2$)은 적당한 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-2}$ 에 대하여 다음과 같은 형태의 영역

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \left| z + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{z - b_k} \right| < 1 \right\}$$

과 양해석적으로 동치이다(여기서 b_i $(1 \leq i \leq n-1)$들은 서로 다른 복소수이다).

그러므로 위의 정리에 의하여 위의 영역을 다중연결 평면영역의 새로운 대표영역이라 할 수 있다. 이 새로운 대표영역에 대하여 $n=2$인 경우가 가장 먼저 생각할 수 있는 경우인데, $(a,\ b) \in \mathbb{C}^2$라 할 때

$$W_{a,b} = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \left| z + \frac{a}{z-b} \right| < 1 \right\}$$

이라 하자. $W_{a,b}$는 정리 2.2를 만족하는 영역인데 어떠한 $(a,\ b) \in \mathbb{C}^2$ 에 대하여 $W_{a,b}$가 이중연결 평면영역이 되는지가 관심사가 된다.

$$B_2 = \{ (a,\ b) \in \mathbb{C}^2 : W_{a,b}\text{가 이중연결 평면영역임} \}$$

이라 하고 $f(z) = z + \dfrac{a}{z-b}$이라 하자. 모든 $a \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $a' \in \mathbb{C}$ 이 $(a')^2 = a$ 를 만족하는 하나의 복소수라 할 때 f는 점 $f(b \pm a') = b \pm 2a'$ 를 분기점으로 가지며 확장된 복소평면을 두 번 덮는다. B_2가 무엇인지에 대하여, 단위원 ∂E위의 f에 관한 역원인 $f^{-1}(T)$가 이중연결 평면영역이 되기 위한 필요충분조건이 $|b \pm 2a'| < 1$이라는 사실을 이용하여 [8]에서 다음과 같이 밝혀 놓았다.

정리 2.3.[8]

모든 $a \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $a' \in \mathbb{C}$ 은 $(a')^2 = a$ 을 만족하는 하나의 복소수라 할 때,

$$B_2 = \{ (a,\ b) \in \mathbb{C}^2 : a \neq 0,\ |b \pm 2a'| < 1 \}$$

이다.

이 정리를 이용하면 다음과 같은 따름 정리를 얻을 수 있다.

따름정리 2.4.

(1) 만약 $(a,\ b)\in B_2$ 라면, $0<|a|<\frac{1}{4}$ 이고 $|b|<1$이다.

(2) $(a,\ 0)\in B_2$이기 위한 필요충분조건은 $0<|a|<\frac{1}{4}$ 이다.

(3) $(a,\ 2a')\in B_2$이기 위한 필요충분조건은 $0<|a|<\frac{1}{16}$ 이다 (단 여기서 모든 $a\in\mathbb{C}$ 에 대하여 $a'\in\mathbb{C}$ 은 $(a')^2=a$을 만족하는 하나의 복소수이다).

증명.

(1) 정리 2.3에 따라 $(a,\ b)\in B_2$ 인 경우 $b\in\mathbb{C}$ 는 두 부등식 $|b+2a'|<1$과 $|b-2a'|<1$을 만족하므로 $|2a'|<1$이 성립된다. 또한 $a\neq0$이므로 $0<|a|=|(a')^2|<\frac{1}{4}$ 이 된다. 또한 두 부등식 $|b+2a'|<1$과 $|b-2a'|<1$의 교집합의 크기의 최대값을 고려해 볼 때 $|b|<1$이 됨을 알 수 있다.

(2) $B_2=\{(a,\ b)\in\mathbb{C}^2 : a\neq0,\ |b\pm2a'|<1\}$이므로 $b=0$인 경우 $(a,\ 0)\in B_2$이기 위한 필요충분조건은 $0<|2a'|<1$이다. 즉 $0<|a|=|(a')^2|<\frac{1}{4}$이다.

(3) $B_2=\{(a,\ b)\in\mathbb{C}^2 : a\neq0,\ |b\pm2a'|<1\}$이므로 $b=2a'$ 인 경우 $(a,\ 2a')\in B_2$이기 위한 필요충분조건은 $0<|4a'|<1$이다. 즉 $0<|a|=|(a')^2|<\frac{1}{16}$이다. □

여기서 따름정리 2.4 (1)의 역은 성립하지 않는다. 역이 성립하지 않는 예를 들어보면 다음과 같다.

예제 2.5.

$a=b=\frac{1}{5}$라 하자. $0<|a|<\frac{1}{4}$이고 $|b|<1$이다. 그러나 $a'=\frac{1}{\sqrt{5}}$라 할 때, $|b+2a'|=\left|\frac{1}{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{1+2\sqrt{5}}{5}\right|>1$을 만족하므로 $(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5})\notin B_2$이다. □

위의 따름정리 2.4로부터 $0<|a|<\frac{1}{4}$일 경우에만 $W_{a,0}=\left\{z\in\mathbb{C} : \left|z+\frac{a}{z}\right|<1\right\}$이 이중연결 평면영역이 됨을 알 수 있다. $E_2(D)$를 D에 양해석적으로 동치인 이중연결 평면영역 $W_{a,b}$와 대응되는 계수 $(a,\ b)\in B_2$들의 집합이라 하자. $r>2$ 인 경우 A_r에 대하여 $E_2(A_r)$이 무엇인지 다음 정리에서 살펴보자.

정리 2.6.[8]

모든 $a\in\mathbb{C}$ 에 대하여 $a'\in\mathbb{C}$ 은 $(a')^2=a$을 만족하는 하나의 복소수라 할 때, $r>2$인 경우,

$$E_2(A_r)=\left\{(a,b)\in B_2:\left|\frac{4a'}{1-(b+2a')(b-2a')}\right|=\frac{4r}{4+r^2}\right\}$$

이다. 특별히,

$$E_2(A_r)\cap\{(a,\ 0)\in\mathbb{C}^2\}=\left\{(a,\ 0)\in\mathbb{C}^2:\ |a|=\frac{1}{r^2}\right\}$$

이다.

이 정리를 만족하는 $(a,\ b)\in E_2(A_r)$에 대응하는 $W_{a,b}$는 A_r과 양해석적으로 동치임을 알 수 있다. 그러므로 A_r과 동치인 $W_{a,b}$들은 여러 개의 영역일 수도 있다. 그러나 이들 계수 $(a,\ b)\in E_2(A_r)$중에서 $b=0$인 경우를 선택하면

$$E_2(A_r)\cap\{(a,\ 0)\in\mathbb{C}^2\}=\left\{(a,\ 0)\in\mathbb{C}^2:\ |a|=\frac{1}{r^2}\right\}$$

임을 알 수 있다.

따라서 $a=\frac{1}{r^2}e^{i\theta}$ $(-\pi<\theta\le\pi)$인 모든 $a\in\mathbb{C}$ 에 대하여 $W_{a,0}$는 A_r과 양해석적으로 동치이고, 특별히 $a=\frac{1}{r^2}\in\mathbb{R}^+$를 선택하여 영역 $W_{1/r^2,0}$를 대표영역으로 선택할 수 있다. 그러므로 모든 이중연결 평면영역은 $W_{1/r^2,0}$ $(r>2)$과 양해석적으로 동치이다.

$\{W_{1/r^2,0}:\ r>2\}$ 에 속한 영역들은 서로 양해석적이지 않으며 $\{(\frac{1}{r^2},\ 0)\in\mathbb{C}^2:\ r>2\}$는 $E_2(A_r)$의 원소를 단 한 개만 포함한다. 유사하게 $a=-\frac{1}{r^2}\in\mathbb{R}^-$를 선택하여 영역 $W_{-1/r^2,0}$를 대표영역으로 선택할 수도 있다. 이 경우 모든 이중연결 평면영역은 $W_{-1/r^2,0}$ $(r>2)$과 양해석적으로 동치이다.

따름정리2.7.

$r>2$인 경우, $E_2(A_r)\cap\{(a,\ 2a')\in\mathbb{C}^2\}=\left\{(a,\ 2a')\in\mathbb{C}^2:\ |a'|=\frac{r}{4+r^2}\right\}$이다(단 여기서 모든 $a\in\mathbb{C}$ 에 대하여 $a'\in\mathbb{C}$ 은 $(a')^2=a$을 만족하는 하나의 복소수이다).

증명.

정리 2.6에 의하여 $E_2(A_r)=\left\{(a,\ b)\in B_2 : \left|\frac{4a'}{1-\overline{(b+2a')}(b-2a)}\right|=\frac{4r}{4+r^2}\right\}$ 이므로 여기서 $b=2a'$ 으로 치환하면, $|a'|=\frac{r}{4+r^2}$ 을 만족한다. □

따름정리 2.7을 만족하는 모든 $(a,\ 2a')\in \mathbb{C}^2$에 대응하는 $W_{a,2a'}$가 A_r과 양해석적으로 동치이고, 특별히 $a=(\frac{r}{4+r^2})^2\in \mathbb{R}^+$와 $a'=\frac{r}{4+r^2}\in \mathbb{R}^+$를 선택하여 영역 $W_{a,2a'}$를 대표영역으로 선택할 수 있다. 그러므로 모든 이중연결 평면영역은 위의 특별히 선택한 $(a,\ 2a')\in \mathbb{C}^2$에 대응하는 $W_{a,2a'}$과 양해석적으로 동치이다.

예제 2.8.

$r=4$라 하자. $|a'|=\frac{4}{4+16}=\frac{1}{5}$을 만족하는 모든 $a'\in\mathbb{C}$에 대하여 $(a,\ 2a)\in B_2$에 대응하는 $W_{a,2a'}$는 A_r과 양해석적으로 동치이다. 그중에서 $a=(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$ 라 하고 $a'=\frac{1}{5}$를 선택하여 영역 $W_{\frac{1}{25},\frac{2}{5}}$를 영역 $W_{a,2a'}$ 들 중의 대표영역으로 택할 수 있다. □

3. 결론

이 논문에서는 평면영역의 대표영역에 대하여 조사하였다. 다중연결 평면영역에서는 리만사상이 존재하지 않으므로 단순연결 평면영역의 대표영역인 단위원판과는 다른 대표영역이 있다는 것을 알 수 있으므로, 다중연결 평면영역의 대표영역에 관하여 연구하였다. 이미 널리 알려진 대표 영역들 이외에도, 새로운 대표영역에 대하여 성질을 조사하였는데, 이 새로운 대표영역이 나오게 된 배경과 함께 대표영역에 대하여 양해석적으로 동치인 영역들에 대하여 알아보았다.

감사의 글 이 논문은 심사자의 조언에 따라 수정하였음을 알리며, 이 논문을 심사하고 조언해 주신 심사자들께 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. 고석구, 복소해석학개론, 경문사, 2005.
2. 이석영, 복소함수론, 교학연구사, 1996.
3. 허민옮김(폴 나힌 지음), 허수이야기, 경문사, 2004.
4. Bell, S., *The Cauchy transform, potential theory, and conformal mapping*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.
5. Bell, S., *Finitely generated function fields and complexity in potential theory in the plane*, Duke Math. J. 98(1999) 187-207.
6. Bell, S., *A Riemann surface attached to domains in the plane and complexity in potential theory*, Houston J. Math. 26(2000) 277-297.
7. Jeong, M. and Taniguchi, M., *Bell representation of finitely connected planar domains*, Proc. AMS. 131(2003) 2325-2328.
8. Jeong, M. and Taniguchi, M., *Algebraic kernel functions and representation of planar domains*, J. Korean Math. Soc. 40(2003) 447-460.
9. Nehari, Z., *Conformal Mapping*, Dover, New York, 1952.

A note on the historical development for the planar domains and the representative domains

Dept. of Mathematics, The University of Suwon, **Moon ja Jeong**

In this paper we introduce the historical development of the theories for the planar domains. Also we deal with the representative domains of the planar domains and study the properties of the new representative domains.

Key words: multiply connected planar domain, representative domain, biholomorphic equivalence

2000 Mathematics Subject Classification: 30C20

논문 접수: 2005년 8월 18일 심사 완료: 2005년 10월