한국수학사학회지 제18권 제4호(2005년 11월), 113-124

# Quasi-F 공간과 극소 Quasi-F cover의 역사적 배경*

단국대학교 수학교육학과 **김창일**
kci206@dankook.ac.kr

티코노프공간 $X$에 대하여 $C(X)$와 $C^*(X)$는 Riesz-공간이다. $C(X)$가 순서-코시완비일 필요충분한조건은 $X$가 quasi-F공간이고, $X$가 컴팩트공간이며 $QF(X)$가 $X$의 극소 quasi-F cover일 때, $C(X)$의 순서-코시완비화와 $C(QF(X))$는 동형이다. 본 논문에서는 quasi-F공간의 정의와 극소 quasi-F cover의 구성에 관한 동기 및 역사적 배경을 살펴본다.

주제어 : quasi-F공간, 극소 quasi-F cover

## 0. 서 론

수학의 모든 분야에서 확장이론(extension theory)은 가장 중요한 연구과제 중 하나이며 그 쌍대이론(dual theory)이 cover이론이다. 두 이론이 쌍대이지만 한 범주(category)에서 확장의 문제가 다른 범주에서 cover의 문제가 되기도 한다. 하우스도르프(Haudorff space)공간 $X$에 대하여 대수적 구조를 갖는 $A(X)$의 대수적 완비화(algebraic completion) $\widehat{A(X)}$이 $A(X^*)$와 동형(isomorphic)이 되는 하우스도르프 공간 $X^*$가 존재할 것인지에 관한 의문이 제기되어왔다(범주이론에서 $A$는 functor로 볼 수 있다). $X$가 좋은 성질을 갖는 공간일 때 성립하는 몇 가지 예를 들어보자.

1958년 Gleason은 논문 [8]에서 컴팩트공간과 연속함수들로 이루어진 범주에서 projective object는 extremally disconnected공간이며 역도 성립함을 증명하였고, Iliadis는 1963년에 정칙공간(regular space) $X$에 대하여 Iliadis의 absolute 또는 극소 extremally disconnected cover $EX$를 구성하였다([15]). 그리고 하우스도르프공간 $X$에 대하여 Banaschewski absolute $PX$가 구성되었다([1]). 이후 많은 논문에서 극

* 이 연구는 2004학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

소 basically disconnected, quasi-F, cloz cover등이 연구되어왔다([23], [10], [11]).

$X$가 컴팩트 영차원공간(compact zero-dimensional space)라 하고 $B(X)$를 $X$에서 열린 집합(open set)이고 동시에 닫힌 집합(closed set)들의 집합이라 하면 $B(X)$의 극소완비화(minimal completion) $\widehat{B(X)}$은 $B(EX)$와 동형이다.

$X$가 정규가산 paracompact공간(normal countably paracompact space)일 때, 격자-순서환(lattice-ordered ring) $C(X)$의 Dedekind-MacNeille 완비화 $\widehat{C(X)}$은 $C(EX)$와 동형이다.

$X$를 티코노프공간(Tychonoff space)이라 하고 $Q(C^*(X))$를 환 $C^*(X)$를 부분환으로 갖는 체(field)라 할 때, $Q(C^*(X))$의 극대이데알공간(maximal ideal space)은 $E(\beta X)$와 동형이다([20]).

이후 extremally disconnected 공간을 일반화한 basically disconnected 공간에 대한 연구에서도 비슷한 결과를 얻었다. 같은 생각으로 티코노프공간 $X$에 대하여 Riesz-공간 $C(X)$에 대한 순서-코시완비화(order-Cauchy completion)와 F-공간의 관계에 관한 연구가 진행되어왔다. 그러나 F. Papengelous와 G. Seever의 연구결과에 의하여 F-공간과 Riesz-공간은 위 예에서 언급한 예들처럼 좋은 결과를 갖지 못한다는 것을 알게되었다. 특히, J. Vermeer는 논문 [22]에서 $X$가 컴팩트공간인 경우에도 극소 F-cover를 갖지 못함을 증명하였다.

본 논문에서는 Riesz-공간 $C(X)$의 순서-코시완비화에 대하여 위에서 언급한 extremally disconnected 공간과 같이 좋은 결과를 갖도록 하는 공간 즉, F-공간을 일반화한 quasi-F공간의 정의 및 극소 quasi-F cover의 구성에 대한 역사적 배경에 관하여 살펴보고자 한다. 그리고, F. Dashiell, A. W. Hager, M. Henriksen를 중심으로 하는 서구의 연구그룹과 V. K. Zakharov와 A. V. Koldunov를 중심으로 하는 동유럽과 러시아의 연구그룹이 quasi-F공간 및 cover에 관한 연구 결과들을 비교하려고 한다.

## 1. Quasi-F공간

이 절에서는 F-공간을 일반화한 quasi-F공간을 정의하게 되는 동기와 그들의 성질을 알아보고자 한다.

실 벡터공간 $L = (L, +, \vee, \wedge)$이 격자구조 (lattice structure)를 갖고 다음 조건을 만족할 때 $L$을 Riesz-공간이라 한다.

$a, b \in L$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ 이고 $\lambda$가 양의 실수일 때, $a + b \geq 0$ 이고 $\lambda a \geq 0$ 이다.

또한 Riesz-공간 $L$이 $a \geq 0$이고 $na \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)이면 $a = 0$을 만족할 때 $L$을 archimedean이라 한다. 이 논문에서 언급된 모든 Riesz-공간은 archimedean임을 가정한다([16]).

수학의 많은 분야에서, 특히 해석학과 위상수학에서 주어진 위상공간으로부터 실수로의 연속 혹은 유계연속함수의 집합은 매우 중요한 연구대상이다. 위상공간 $X$가 티코노프공간 일 때, $C(X) = \{f \mid f: X \to R$은 연속함수$\}$ 와 $C^*(X) = \{f \mid f: X \to R$은 연속이고 유계함수$\}$ 는 Riesz-공간의 대표적인 예이다.

Riesz-공간 $L$의 원소 $a$에 대하여 $|a| = a \vee (-a)$, $L$에서 수열 $(a_n)$이 임의의 자연수 $n$에 대하여 $a_n \leq a_{n+1}$을 만족하면 $a_n \uparrow$ 으로 나타내고, $a_n \geq a_{n+1}$을 만족 할 때 $a_n \downarrow$ 으로 나타내기로 하자. 그리고 $a_n \downarrow$ 이고 $\wedge\{a_n : n$은 자연수$\}$ $= 0$일 때 $a_n \downarrow 0$으로, $(a_n - a) \downarrow 0$이 성립하면 $a_n \downarrow a$로 나타내기로 한다. 같은 방법으로 $a_n \uparrow a$를 정의 할 수 있다.

**정의 1.** Riesz-공간 $L$에서 수열 $(a_n)$이 다음 조건을 만족 할 때 $(a_n)$을 순서-코시수열(order-Cauchy sequence)이라 한다.

> $L$에서 수열 $(b_n)$이 존재하여 $b_n \downarrow 0$이고 모든 자연수 $n$에 대하여 $|a_{n+1} - a_n| \leq b_n$이다.

실수 전체의 집합 $R$에 대하여, $R = (R, +, \vee, \wedge)$은 Riesz-공간이다. 수열 $(a_n)$이 $R$에서 순서-코시수열이면 $(a_n)$은 코시수열이고 $(a_n)$이 코시수열이면 순서-코시수열이 되는 $(a_n)$의 부분수열이 존재한다. 모든 순서-코시수열이 수렴하는 Riesz-공간을 순서-코시완비공간(order-Cauchy complete space)라고 한다. 티코노프공간 $X$에 대하여 $C(X)$가 순서-코시완비공간이 되는 필요충분한조건 중에서 $X$가 갖는 위상적 성질을 살펴보자.

F. Papengelous은 1964년 그의 논문 [17]에서 Riesz-공간 $L$이 순서-코시완비일 필요충분한조건이

(*) $L$에서 두 수열 $(a_n), (b_n)$이 모든 자연수 $n, m$에 대하여 $a_n \leq b_m$이고 $\bigwedge\{b_n - a_n : n$은 자연수$\} = 0$을 만족할 때, $a_n \leq c \leq b_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족하는 $L$의 원소 $c$가 존재한다.

임을 증명하였다.

$C(X)$의 모든 유한생성 아이디얼(ideal)이 주 아이디얼(principal ideal)이 되는 티코노프공간 $X$를 $F$-공간이라 한다. 위상공간이 $F$-공간일 필요충분한 많은 조건이 있다([7]).

1968년 G. Seever는 논문 [21]에서 위상공간 $X$가 $F$-공간일 필요충분한조건이

(**) $C(X)$에서 두 수열 $(f_n), (g_n)$이 $f_n \uparrow, g_n \downarrow$ 이고 모든 자연수 $n, m$에 대하여 $f_n \leq g_m$일 때, $f_n \leq h \leq g_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족하는 $C(X)$의 원소 $h$가 존재한다.

임을 증명하였다.

F. Dashiell은 1976년부터 위에서 언급한 Papengelou의 연구결과를 알지 못하고 조건 (*)을 만족하는 Riesz-공간 $C(X)$에 관하여 연구하였다. 이 연구에서 그는 순서-코시완비라는 용어를 사용하였지만 Riesz-공간이란 용어를 사용하지않고 대신 up-down semilattice라는 용어를 사용하였다.

F. Papengelous와 G. Seever의 연구 결과에 있는 두 조건 (*)와 (**)는 유사함을 알 수 있다. 조건 (**)를 만족하는 Riesz-공간 $C(X)$는 조건 (*)를 만족하기 때문에 $X$가 F-공간이면 $C(X)$는 순서-코시완비공간이다. 그러나 그 역은 성립하지 않는다. $C(X)$가 순서-코시완비공간일 필요충분한 조건으로 $X$가 갖는 위상적 성질에 대한 의문은 자연스러운 것이며 이것은 새로운 공간, 즉 $F$-공간을 일반화하는 quasi-F공간을 정의하는 동기가 되었다. 티코노프공간 $X$가 $F$-공간일 많은 필요충분한조건 중 하나는 $X$의 모든 cozero-집합이 $X$에서 $C^*$-embedded인 것이다. $F$-공간을 일반화하는 quasi-F공간의 정의는 다음과 같다.

티코노프공간 $X$에서 임의의 조밀한 cozero-집합이 $X$에서 $C^*$-embedded일 때 X 를 quasi-F공간으로 정의한다.

F. Dashiell의 1981년 논문 "Non-weakly compact operators from $C(S)$ lattices with applications to Baire classes"에서 컴팩트공간 $X$가 quasi-F공간일 필요충분한 조건이 $C(X)$가 순서-코시완비공간임을 증명하였고, F. Dashiell, A. W. Hager와 M. Henriksen은 논문 [6]에서 F. Dashiell의 위 결과를 모든 티코노프공간으로 확장하였다. 다음 정리는 $C(X)$를 $C^*(X)$로 바꾸어도 성립한다.

F. Dashiell, A. W. Hager와 M. Henriksen은 논문 [6]에서 증명한 다음의 결과들을 F-공간의 필요충분한조건들과 비교하면 두 공간의 유사함을 알 수 있다.

**정 리 2.** $X$를 티코노프공간이라 할 때 다음 명제는 서로 동치이다.

(1) $X$는 quasi-F공간이다.

(2) $X$의 조밀하고 z-embedded인 모든 부분집합은 $X$에서 $C^*$-embedded이다.

(3) $C(X)$의 원소 $f, r$에 대하여 $|f| \le |r|$이고 $r$이 $C(X)$에서 정칙(regular)이면 $f = hr$인 $h$가 $C(X)$에 존재한다.

(4) $C(X)$의 모든 정칙 아이디얼은 순서-볼록집합(order-convex set)이다

(5) $C(X)$의 모든 정칙 아이디얼은 $l$-아이디얼 이다

(6) $C(X)$의 모든 유한생성 아이디얼은 주 아이디얼이다

(7) $C(X)$에 있는 두 개의 음이 아닌 생성원(generator)을 갖는 정칙 아이디얼은 주 아이디얼이다.

(8) $C(X)$는 순서완비공간이다.

(9) X의 Stone-C ech 컴팩트화 $\beta X$는 quasi-F공간이다.

## 3. $C(X)$의 순서-코시완비화와 극소 quasi-F cover

이 절에서는 Riesz-공간 $C(X)$의 순서-코시완비화와 극소 quasi-F cover의 관계, 그리고 그들의 구성에 관하여 언급하고자한다.

Riesz-공간 $L, M$에 대하여 $M$이 순서-코시완비공간, L이 M의 부분공간이고 임의의 원소 $h \in H$에 대하여 $a_n \downarrow 0$이고 $|b_n - h| \le a_n$인 수열 $(a_n), (b_n)$이 $L$에

존재할 때 $M$을 $L$의 순서-코시완비화라한다.

F. Dashiell, A. W. Hager와 M. Henriksen은 논문 [6]에서 모든 Riesz-공간 $L$은 유일한 순서-코시완비화 $\hat{L}$을 갖음을 증명하였다. 또한 그들은 컴팩트공간 $X$에 대하여 컴팩트 quasi-F공간 $K$가 존재하여 $C(X)$의 순서-코시완비화가 $C(K)$와 동형임을 증명하였다. 그러나 임의의 티코노프공간 Z에 대하여 $C(X)$의 순서-코시완비화와 $C(Z)$가 동형이 아닌 티코노프공간 $X$의 예를 제시하였다.
다음은 N. J. Fine, L. Gillman, J. Lambek이 사용한 유사한 방법을 사용하여 F. Dashiell, A. W. Hager와 M. Henriksen이 티코노프공간 $X$에 대하여 $C(X)$의 순서-코시완비화를 구성한 방법이다.

$X$가 컴팩트공간이고 $\mathcal{F}$를 $X$에서 조밀한 부분집합들로 이루어진 필터기저(filter base)라 하자. $\mathcal{F}$의 두 원소 $A$, $B$와 $f \in C(A)$, $g \in C(B)$에 대하여 $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$인 경우 $f \cong g$으로 정의 할 때 $\cong$은 $\bigcup\{C(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$에서 동치관계이다. $C[\mathcal{F}]$를 동치관계 $\cong$에 의한 상공간(quotient space)이라 하자. 같은 방법으로 $C^*[\mathcal{F}]$를 $C^*(X)$에서 정의 할 수 있다.
그러면 $\{C(S) \mid S \in \mathcal{F}\}$와 $\{C^*(S) \mid S \in \mathcal{F}\}$ 는 direct system이고 $C[\mathcal{F}]$와 $C^*[\mathcal{F}]$는 각각 $\{C(S) \mid S \in \mathcal{F}\}$와 $\{C^*(S) \mid S \in \mathcal{F}\}$의 귀납적 극한(directed limit), 즉 $\varinjlim\{C(S) \mid S \in \mathcal{F}\}$와 $\varinjlim\{C^*(S) \mid S \in \mathcal{F}\}$이다. $\mathcal{F}$의 원소가 $X$에서 조밀하므로 $\mathcal{F}$의 모든 원소 $S$에 대하여, $C(S)$와 $C^*(S)$는 각각 $C[\mathcal{F}]$와 $C^*[\mathcal{F}]$의 부분공간과 동형이다. 특히 $X \in \mathcal{F}$이면 $C(X)$와 $C^*(X)$는 $C[\mathcal{F}]$와 $C^*[\mathcal{F}]$의 부분공간이다.
$X$를 티코노프공간, $\mathcal{F}$을 $\beta X$에서 모든 조밀한 cozero-집합 혹은 $G_\delta$-집합들의 집합이라 하자. $C^\#[\mathcal{F}, X] = \{h \in C[\mathcal{F}] \mid |h| \le f$이고 $f \in C(X)\}$라 하면 $C^*(\mathcal{F}) \subset C^\#[\mathcal{F}, X] \subset C(\mathcal{F})$이고 $C^\#[\mathcal{F}, \beta X]$이 $C(X)$의 순서-코시완비화이다([6]).

다음은 컴팩트공간 X에 대하여 $C(X)$의 순서-코시완비화와 $C(K)$가 동형이 되는 컴팩트 quasi-F공간 K를 구성하는 방법이다.
$X$를 티코노프공간이라 하고 $\mathscr{C}(X)$를 $X$에서 모든 조밀한 cozero-집합들의 집합, $\mathscr{C}_\delta(\beta X)$를 $\beta X$에서 모든 조밀한 cozero-집합들의 가산교집합들의 집합이라 하자.

그러면 $\{\beta S \mid S \in \mathscr{C}(X)\}$는 $\{\pi_T^S \mid \pi_T^S : \beta S \to \beta T\}$에 관한 inverse limit system 이다. 여기서 $\pi_T^S : \beta S \to \beta T$은 포함사상 $\pi : S \to T$의 Stone-확장함수이다. 마찬가지로 $\{\beta S \mid S \in \mathscr{C}_\delta(\beta X)\}$도 inverse limit system이다. $K(X)$와 $K_\delta(X)$를 각각 $\{\beta S \mid S \in \mathscr{C}(X)\}$와 $\{\beta S \mid S \in \mathscr{C}_\delta(\beta X)\}$의 역 극한(inverse limit)라 하면 $K(X)$, $K(\beta X)$, $K_\delta(X)$는 모두 위상동형이고 quasi-F공간이다. 특히, $X$가 컴팩트공간일 때 $C(K(X))$는 $C(X)$의 순서-코시완비화이다. 따라서 $X$가 컴팩트일 때 $K=K(X)$는 $C(X)$의 순서-코시완비화의 연구에서 중요한 부분임을 알 수 있고, 실제로 $K$는 다음에 소개하는 $X$의 극소 quasi-F cover이다.

여러 논문([6], [14], [18], [22], [24])에서 모든 티코노프공간이 극소 quasi-F cover를 갖는다는 것을 연구하였고 그것은 다음 정리로 요약 될 수 있다.

**정 리 3.** $X$가 티코노프공간이면 quasi-F공간 $QF(X)$와 함수 $\Phi_X : QF(X) \to X$가 존재하여 다음 조건을 만족한다.

(1) $QF(X)$는 quasi-F공간이다.

(2) $\Phi_X : QF(X) \to X$는 전사, 연속, 컴팩트, 폐사상이다.

(3) $K$가 quasi-F공간이고 $\Psi : K \to X$가 전사, 연속, 컴팩트, 폐사상이면 전사, 연속, 컴팩트, 폐사상인 $f : K \to QF(X)$가 존재하고 $\Phi_X \circ f = \Psi$이다.

(4) 순서쌍 $(QF(X), \Phi_X)$는 위상동형에 관하여 유일하다.

위 정리에서 $(QF(X), \Phi_X)$를 $X$의 극소 quasi-F cover라 한다.

J. Vermeer는 [22]에서 $X$가 컴팩트인 경우에도 극소 F-cover를 갖지 않음을 보였다. 위 정리의 증명은 J. R. Porter와 R. G. Woods의 논문 [19]에서 찾을 수 있고 그것은 A. Hager의 논문 [12]에 있는 보조정리를 일반화 한것이다. [6], [14], [18]에서는 $X$가 컴팩트공간인 경우로 제한되었다. [6]에서 언급된 티코노프공간에 대한 극소 quasi-F cover는 티코노프공간의 Stone-Cech 컴팩트화 $\beta X$의 극소 quasi-F cover를 의미하는 것이었다. J. Vermeer은 논문 [22]과 [23]에서 모든 티코노프공간이 극소 quasi-F cover를 갖음을 증명하였고 그들을 역 극한으로 구성하였다.

V. K. Zakharov와 A. V. Koldunov는 [24]에서 증명없이 티코노프공간에 대한 sequential absolute를 제시하였고 그것은 $X$가 컴팩트공간일 때 극소 quasi-F cover

와 일치하지만 일반적으로는 성립하지 않는다. [6]와 [23]에서 $QF(X)$가 역 극한으로 구성되었지만 [14]에서는 극대 아이디얼공간으로 구성되었다. $X$는 컴팩트공간인 경우 J. Vermeer와 Y. L. Park은 각각 [22]과 [18]에서 $QF(X)$를 극대필터공간으로 구성하였다. [24]에서도 $X$가 컴팩트공간일 때 $QF(X)$를 $X$의 조밀한 cozero-부분공간에 있는 영-집합(zero-set)들의 동치류로 구성하였다. $QF(X)$의 구성 방법중 대표적인 두 가지 방법은 다음과 같다.

우선 컴팩트공간 $X$와 [6]에서 언급한 $K(X)$에 대하여 $\pi_X : K(X) \to X$를 canonical projection이라 하면 $(K(X), \pi_X)$가 $X$의 극소 quasi-F cover이다. 다음은 C. B. Huijsmans와 B. de Pagter가 논문 [13]에서 컴팩트공간 $X$에 대한 극소 quasi-F cover를 구성한 방법이다.

$L$을 Riesz-공간, $S \subseteq L$이라 할 때

$$S^d = \{ a \in L : \text{임의의 } x \in L\text{에대하여}, |x| \wedge |a| = 0\}$$

라 하자. $L$의 아이디얼 $S$가 조건

$$s \in S, \quad x \in L\text{이고 } |x| \le |s|\text{일 때 } x \in L$$

을 만족 할 때 $S$를 $l$ - 아이디얼이라 하고, $l$ - 아이디얼 $H$가 임의의 $h \in H$에 대하여 $(\{h\}^d)^d \subset H$이 성립 할 때 $H$를 $d$ - 아이디얼이라 한다. X가 컴팩트공간이면 hull-kernel 위상을 갖는 $C(X)$의 극대 $d-$아이디얼의 공간이 $X$의 극소 quasi-F cover이다.

다른 극소 quasi-F cover QF(X)가 V. K. Zakharov와 A. V. Koldunov에 의하여 구성되었다. 그들이 구성한 QF(X)는 $X$가 컴팩트공간일 때 M. Henriksen, J. Vermeer, R. G. Woods의 결과와 일치하지만 컴팩트공간이 아닌 공간에 대해서는 그렇지 않다.

Gleason은 [8]에서 컴팩트공간과 연속함수들의 범주에서 projective object가 extremally dsiconnected 공간임을 보였고 Iliadis([15])와 Banaschewski([1])도 비슷한 결과를 얻었다. 논문 [10]에서 티코노프공간과 $Z^{\#}$-irreducible함수들의 범주에서 projective object는 quasi-F공간이고 그 역도 성립함을 보였다.

$Z^{\#}$-irreducible의 관한 개념은 1978년 F. Dashiell이 편지를 통하여 A. Hager와 M. Henriksen에게 전해졌고 C. Neville은 출판되지 않은 논문에서 $Z^{\#}$-irreducible와 같

은 개념을 사용하였다. 그러나 C. Neville의 연구는 strongly 영차원공간으로 제한되어 있었다. 그는 M. Henriksen, J. Vermeer, R. G. Woods가 정의한 complemented cozero-집합의 개념을 사용하였고 H. Cohen의 논문 [2]에서는 다른 형태로 나타난다. $Z^{\#}$-irreducible함수에 관한 F. Dashiell의 연구는 논문 [4]에 발표되었고 출판되지 않은 논문 [5]에도 나타난다. 1978년에 A. Hager는 1971년도 그의 논문 [12]에 있는 방법을 사용하여 컴팩트공간에 대한 quasi-F cover의 위상적 구성을 위하여 F. Dashiell의 $Z^{\#}$-irreducible함수에 관한 결과를 사용하였다.

## 4. 결 론

Riesz-공간 $C(X)$의 순서-코시완비성은 quasi-F공간 $X$에 의하여 결정된다. $C(X)$의 순서-코시완비화, 극소 quasi-F cover 및 projective object에 대하여 만족할만한 결과들이 얻어졌다. 이러한 의미있는 결과는 F. Dashiell, A. W. Hager, M. Henriksen를 중심으로 하는 서구의 연구그룹과 V. K. Zakharov와 A. V. Koldunov를 중심으로 하는 동유럽과 러시아의 연구그룹이 비슷한 시기에 서로의 결과를 알지 못하고 독립적으로 얻었다.

1980년에 발표된 논문 [6]에 있는 quasi-F공간에 대한 결과들은 1977년과 1978년에 M. Henriksen의 논문 [9]에 나타났고 1979년 3월 Ohio Athens에서 개최된 Spring Topology Coference에서 발표되었다. 그러나 그 결과는 논문 [6]이 발표되기 전까지 널리 알려지지 않았다. 티코노프공간에 대한 quasi-F cover의 연구에 동기를 제공한 F. Dashiell의 논문 [3]은 1976년 출판되지 않은 형태로 A. Hager와 M. Henriksen와 함께 논의되었고 1981년까지 출간되지 않았다. 1981년 A. Veksler가 A. Hager에게 보낸 편지와 1986년 8월 Praque에서 M. Henriksen과 A. Veksler의 의견교환을 통하여 [3]과 [6]의 quasi-F공간에 대한 많은 결과들이 1970년대 말에 A. V. Koldunov와 V. K. Zakharov에 의하여 독립적으로 얻어졌다는 것을 알게 되었다.

두 연구 그룹이 일치된 많은 결과를 갖고 있으면서도 서로의 연구결과를 잘 알지 못한 이유는 서로 다른 논문출판체계 때문으로 생각 할 수 있다. 서구의 논문출간은 느리게 진행되지만 논문이 출간되면 그것은 빠르게 알려진다. 반면 러시아와 동유럽에서는 흔히 논문이 내부적으로 배포되는 세미나 노트 혹은 학술회보(conference proceeding)의 형태로 빠르게 출판되지만 그러한 것들이 서구에 도착하는데 많은 시간이 걸린다.

# 참고 문헌


1. B. Banaschewski, "Projective covers in certain categories", *General Topology and its Relation to Modern Analysis and Algebra II*(Praque, 1966), Academic Press. New York, 1967.
2. H. Cohen, *"The k-extremally disconnected spaces as projectives"*, Canad. J. Math. 16(1964), 253-260.
3. F. Dashiell, *"Non-weakly compact operators from* $C(S)$ *lattice with applications to Baire classes"*, Trans. Amer. Math. Soc. 266(1981), 397-413.
4. F. Dashiell, *"The quasi F-cover of a compact space and strongly irreducible surjections"*, Abstracts Amer. Math. *Soc.* 3(1982), 96.
5. F. Dashiell, *The quasi F-cover of a compact space and strongly irreducible surjections*, unpublished manuscript.
6. F. Dashiell, *"A. W. Hager and M. Henriksen, Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions"*, Canad. J. Math. 32(1980), 657-685.
7. L.Gillman and M. Jerison, *"Rings of continuous functions"*, Van Nostrand, Princeton, N. N. J., 1960.
8. A. M. Gleason, *"Projective topological spaces III"*, J. Math. 2(1958), 482-489.
9. M. Henriksen, *"A summary of results on order-Cauchy completions of rings and vector layyices of continuous functors"*, Topology Proc. 4(1979), 239-263.
10. M. Henriksen, J. *"Vermeer and R. G. Woods, Quasi-F covers of Tychonoff space"*, Trans. Amer. Math. Soc. 303(1987), 779-804.
11 M. Henriksen, J. "Vermeer and R. G. Woods", *Wallman covers of compact spaces*, Dissertations mathematicae, ????
12. A. Hager, *"The projective resolution of a compact sapce"*, Proc. Amer. Math. Soc.28(1971),262-265.
13 C. B. Huijsmans and B. de Pagter, *"On z-ideals and d-ideals in Riesz-spaces III"*, Indag. Math. 43(1981), 409-422.
14. C. B. Huijsmans and B. de Pagter, *"Maximal d-ideals in Riesz space"*, Canad. J. Math. 35(1983), 1010-1029.
15. S. Iliadis, *"Absolutes of Hausdorff spaces"*, Soviet Math. Dokl. 4(1963), 295-298.

16. W. Luxemburg and A. Zaanen, *Riesz spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
17. F. Papengelou, "*Order convergence and topological completion of commutative groups*". Math. Ann. 155(1964), 81-107.
18. Y. L. Park, "*The quasi F-cover as a filter space*", Houston J. Math. 9(1983). 101-109.
19. J. R. Porter and R. G. Woods, "*Absolutes and extensions of Hausdorff spaces*", Springer Universitext series(to appear).
20 J. R. Porter and R. G. Woods, "*Extensions and Absolutes of Hausdorff spaces*", Springer, Berlin, 1988.
21. G. L. Seveer, *Measures on F-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 133(1968), 269-280.
22. J. Vermeer, "*On perfect irreducible preimage*", Topology Proc. 9(1984), 173-189.
23 J. Vermeer, "*The smallest basically disconnected preimage of a space*", Topology Appl. 17(1984), 217-232.
24. V. K. Zakharov and A. V. Koldunov, "*The sequential absolute and its characterizations*", Soviet Math. Dokl.22(1980), 70-74.

## Historical backgrounds of quasi-F spaces and minimal quasi-F covers

Department of Mathematics Educations, Dankook University **Chang Il Kim**

For a Tychonoff space X, C(X) is a Riesz-space. It is well known that C(X) is order-Cauchy complete if and only if X is a quasi-F space and that if X is a compact space and QF(X) is a minimal quasi-F cover of X, then the order- Cauchy completion of C(X) is isomorphic to C(QF(X)). In this paper, we investigate motivations and historical backgrounds of the definition for quasi-spaces and the construction for minimal quasi-F covers.

*Key words* : quasi-F space, minimal quasi-F cover

2000 Mathematics Subject Classification : 54D80, 54G05

논문 접수 : 2005년 8월 12일 심사 완료 : 2005년 10월