한국수학사학회지 제18권 제4호(2005년 11월), 101-112

폴 에르디쉬와 확률론적 방법론*

수원대학교 수학과 고영미
ymkoh@suwon.ac.kr
수원대학교 수학과 이상욱
swree@suwon.ac.kr

에르디쉬[1](Erdős)는 수학 연구에 자신의 삶 자체를 모두 바친 20세기를 대표하는 세계적인 수학자이다. 그는 많은 분야에 걸쳐 1500여 편에 이르는 수학 논문을 발표하였을 뿐만 아니라, 수학의 새로운 지평을 연 영향력 있는 수학자였다. 그는 확률이론을 적용하는 독창적인 방법을 제시하여 확률론적 방법론을 창안하였고, 그러한 방법론은 결국 랜덤 그래프 이론의 모태가 되었다. 본 논문은 천재 수학자, 하지만 다른 한편으로는 바보 같은 순수함을 지녔던 헝가리 출신의 수학자 에르디쉬의 삶을 살펴보며, 21세기에서의 그의 삶과 그의 학문적 업적이 지니는 의미와 가치를 생각하여 보고자 한다.

주제어 : 확률론적 방법론, 램지 수, 램지 이론, 랜덤그래프 이론, 확률 알고리즘

0. 서론

20세기 후반, 컴퓨터 과학의 급속한 발전에 따라, 그 가치와 유용성이 인식되면서 이산수학이 각종 과학 분야에서 매우 중요한 역할을 담당하게 되었다. 사실, 이산수학은 이미 거의 모든 전통 수학 분야에 관련 문제와 아이디어가 담겨져 있으며, 컴퓨터 과학의 형성과 발전에 기초 이론을 제공한다. 특히, 21세기에 들어서며 이산수학은 미분적분학과 함께 수학의 중요 분야로 자리를 잡아가고 있다.

이산수학은 이산 구조를 갖는 대상들에 대한 수학 이론으로서, 유한 집합의 원소의 개수를 세는 수학적 기법을 다루는 조합수학, 이산 집합의 구조를 연구하는 그래프 이론, 유한 집합 내에서의 연산 과정에 관한 알고리즘 이론 등을 포함한다. 이산수학의 개척자로는, 18 세기로 거슬러 올라가 오일러(L. Euler, 1707-1783)를 들 수도 歷史

* This work was supported by the Korean Research Foundation Grant funded by the Korean Government (MOEHRD) (No. R04-2002-000-20016-0).

1) Erdős는 에어디쉬[20], 에르도스, 엘디쉬, 엘도스 등 한글표기가 다양하지만, Erdős 본인의 요구와 헝가리 발음을 고려하여 본 논문에서는 에르디쉬로 표기하기로 한다.

현대적 의미로 헝가리 출신 수학자 에르디쉬(P. Erdős, 1913-1996)와 이태리 출신 수학자 로타(Gian-Carlo Rota, 1932-1999)를 대표적으로 손꼽을 수 있다. 로타는 MIT에서 응용수학 교수와 철학 교수를 겸임한 유일한 사람이었다[19]. 그가 사용하던 연구실은 그가 남긴 서적들과 함께 그의 이름을 딴 작은 도서실로 치장되어 2005년 현재도 MIT 응용수학과의 한 구석을 차지하고 있다.

에르디쉬는 더욱 특별한 사람이다[17]. 평생 일정한 직장과 집도 없이 독신으로 지냈으며, 전 세계를 떠돌며 오로지 수학의 세계 속에서 일생을 보냈다. 그는 정수론, 조합론, 기하학 등을 비롯한 수학의 거의 모든 분야에 걸쳐 연구 업적을 남겼다. 특히, 최초로 확률론을 창의적 방법으로 사용하여 해결이 어렵던 많은 문제들을 아름다울 정도로 간결하게 해결하였고, 심지어 수학의 새로운 이론 및 분야를 탄생시키는 계기를 제공하였다([1-7, 9, 10, 12, 13]). 또한, 수학 또는 그와 관련된 공부를 하려는 모든 사람들에게 헌신하였으며, 수많은 공동 연구자와 연구 활동을 함으로써 수학의 세계에서 수학자 간 거리 개념인 소위 에르디쉬 넘버[18]를 세상에 남겼다.

21 세기가 정보화 시대로 명명되듯이, 다량의 정보의 확보와 그로부터의 유용한 정보의 추출에 의한 지식의 축적은 새로운 과학적 방법론으로서 가치를 인정받고 있다. 이는 다량의 정보로부터 확률을 응용하여 의미있는 통계적 결과를 추출함을 의미한다. 실제로, 불확실성이 포함된 거대 구조를 모델링하고 분석하는 데에는 확률론의 적용이 매우 유용하게 사용된다. 그러한 예로서, 웹(WWW, 인터넷의 구조)의 모델링 [13], DNA와 RNA의 구조 또는 단백질 합성의 구조적 원리 등을 포함한 동역학, 생명공학, 환경공학 등 다양한 분야에서의 응용을 들 수 있다([14, 16]). 이와 같은 종류의 응용들은 확률과정을 통하여 더욱 체계적인 분석 결과를 드러내기도 한다.

에르디쉬는 확률론적 방법론(probabilistic method)으로 불리는 확률론의 창의적 사용방법을 고안하여, 해결이 어렵던 다양한 문제에 대한 해결방법을 제시하였다[1]. 특히, 확률론적 방법은 확률 알고리즘(randomized algorithm)의 개발에 있어서 매우 중요한 이론적 기반을 제공하며, 랜덤 그래프 이론의 출발점이 되기도 한다. 또한 물리 현상으로서 위상 전이(phase transition)를 다루는 퍼콜레이션(percolation) 이론의 혁신적 발전을 위한 계기를 제공하기도 하였다[8].

본 논문은 20 세기를 풍미한 수학자 에르디쉬의 삶을 돌아보고, 그의 수학자로서의 삶과 업적에 대한 가치를 살펴보고자 한다. 그에 의하여 창안된 확률론적 방법론의 시작 배경인 램지 수와 관련된 수학을 소개하고, 확률론적 방법을 적용한 그래프의 보편적 성질에 관한 연구로서의 랜덤그래프 이론에 대하여 간략히 소개한다. 그리하여, 전 세계적으로 수학뿐만 아니라 과학계 전반에 크나큰 영향을 미쳤던 천재 수학자 에르디쉬의 삶과 그의 업적을 소개하여 그의 삶의 수학사적 의미와 가치를 조명해 보고자 한다.

1. 에르디쉬의 삶

에르디쉬(Paul Erdős)는 일정한 직장과 가정 그리고 집도 없이 평생을 독신으로 전 세계를 떠돌며 수학 연구만을 하며 일생을 보낸 수학자이다. 그의 사유 재산이라고는 수학논문과 연습장 몇 장이 들어 있는 납작한 낡은 가방 하나가 전부였다. 그러나, 그는 전세계를 돌아다니며 수학 강의를 하여 어린 학생들에게 수학적인 영감을 불어넣고, 각종 학회에 참가하여 수학자들을 만나 공동 연구를 하는 등 오로지 수학 문제를 해결하는 일에만 바쳐진 수학 그 자체와 다름없는 삶을 살았다[20].

에르디쉬는 1913년 헝가리 부다페스트에서 수학교사인 유대인 부모 밑에서 태어났다. 에르디쉬가 태어나기 며칠 전 그의 누나 두 명 모두가 주홍열로 사망하였기에, 그는 자연히 부모의 과잉보호 하에 성장하였다. 그 결과, 그는 14세가 되도록 스스로 신발 끈도 맬 줄 몰랐고 20세가 넘도록 혼자서 빵에 버터를 바르는 등의 사소한 일조차 할 줄 몰랐다고 한다. 하지만, 그의 수학적 천재성은 아주 어려서부터 나타났다. 어린 시절, 대부분의 교육은 학교에 다니는 대신 집에서 가정교사에 의하여 이루어졌으며, 수학은 부모에게 배웠다고 한다. 어린 시절부터 이미 남다른 수학적 재능을 보인 그는 스스로 문제를 만들어 풀기를 즐겼다. 예를 들면, 세 살 때 암산으로 세 자리수의 곱셈을 하였는가 하면, 스스로 음수의 개념을 발견하기도 하고, 네 살 때는 기차를 타고 가면 태양까지 시간이 얼마나 걸릴까하는 문제 등을 생각하여 풀었다고 한다.

1930년대의 헝가리에서는 유대인의 대학 입학이 매우 제한되어 있었다. 그러나, 에르디쉬는 국가시험에서 1등을 하여 1930년 17세의 나이로 부다페스트의 한 대학(Pazmany Peter 대학)에 입학할 수 있었다. 1934년, 대학에서 수학 전공으로 박사학위를 받은 후, 맨체스터 대학에서 박사후 과정을 밟기 위하여 영국으로 떠났다. 그러나, 1930년대 말, 헝가리에서는 심한 유대인 학대가 자행되고 있었기에, 유대인으로서 조국 헝가리로 돌아가는 것이 자살행위나 다름이 없었다. 결국 박사후 과정을 마친 그는 미국행을 선택하였고, 헝가리에 남은 많은 그의 친척들과 친구들은 전쟁기간 동안 죽음을 맞았다. 이때부터 에르디쉬는 방랑자로서의 삶을 시작하게 된다.

이후, 에르디쉬는 죽을 때까지 남루한 가방 하나에 자신의 모든 재산(논문 몇 개와 연습장 정도, 물론 속옷 몇 장 포함)을 담고 수학문제와 수학자들을 찾아 전세계의 대학과 연구소를 돌아다니는 방랑을 계속하며 오로지 수학의 연구에 몰두한 생을 산다. 그의 모토 “Another roof, another proof”로부터 그의 인생철학을 엿볼 수 있다.

이러한 방랑 수학자로서의 삶을 지탱케 해준 그의 대표적 친구로 그레이엄(Ronald Graham)을 들 수 있다. 그에게는 튜란(Paul Turan, 1910-1976), 레니(Alfred Renyi, 1921-1970) 등의 헝가리 수학자를 포함하여 전세계에 500 명 이상에 달하는 공동연구자가 있었다. 그러나, 에르디쉬의 엄마가 죽은 후(1971년)에 그의 대부분의 방랑 수학자로서의 생을 뒤에서 떠받쳐 주었던 친구(수학자)는 바로 그레이엄이었다. 성격은 거

의 완벽하게 상이함에도 불구하고, 많은 사람들은 그들이 마치 부부와 같았다고도 한다. 그들이 생활 속에서 부딪치던 희화적 상황은 [20]에서 많이 찾아볼 수 있다. 그레이엄 외에도 에르디쉬를 도와주던 많은 사람들이 있는데, "폴 아저씨를 돌보는 사람들"로 지칭된다고도 한다.

많은 사람들의 도움을 받으며 살 수 밖에 없었지만, 수학 안에서 천재로서의 삶을 살았던 에르디쉬는, 1996년 9월 83세의 나이로, 폴란드 바르샤바에 있는 바나흐 센터(Banach center)에서 5주 동안의 세미나에 참석하던 중 심장마비로 사망하였다. 평소 "the most beautiful way to finish life is to give a lecture, finish a proof, put down the chalk and die."라고 말했던 그의 죽음은 그의 바램에 가까웠다.

그가 자주 했던 말 "property is nuisance"로부터 알 수 있듯이, 그는 물질적인 소유에는 관심이 없었다. 그가 강연료로 받은 돈이나 여러 번 수상한 수학상의 상금은 친지 또는 어려운 학생들을 돕거나 그가 내건 문제를 해결한 학생들에게 상금으로 나누어주곤 했다. 1984년 Wolf 상의 상금으로 5만 불을 수상한 그는 대부분의 돈을 이스라엘에 장학기금으로 기부하고, 자신은 720불만을 가졌다고 한다. 누군가는 평소의 에르디쉬를 고려하면 그 돈 또한 그에게 너무 많은 돈이라고 했다고 한다.

그가 남에게 후하게 나누어주었던 것은 물질만이 아니었다. 수많은 공동 연구자들의 말을 빌면, 에르디쉬는 만나는 사람 누구에게나 호감을 나타내며 상대가 해결하고자 하는 수학문제를 듣고 그 문제를 해결하기에 좋은 아이디어를 주기도 하고, 그 사람에게 적절한 새로운 문제들을 제시해 줌으로써 수학에 대한 자신감을 심어주고 좋은 연구결과들을 낼 수 있도록 항상 도움을 아끼지 않았다고 한다.

그의 삶을 이야기하는 것은 곧 수학을 이야기하는 것이고, 수학을 빼놓은 그의 삶은 무(無)와 다름없다. 에르디쉬는 수학의 세계 속에서 탐구와 베풂의 삶을 살았고 수학의 진리를 깊이 신봉하였다.

2. 수학자 에르디쉬

에르디쉬는, 스무 살이 되던 해, 정수론의 유명한 정리 중 하나로서 1850년에 체비셰프(Pafnuty Chebyshev, 1821-1894)가 증명한 버트란드 가설을 매우 우아하고 간결한 방법으로 증명하여 발표함으로써 수학자로서 세상에 첫 발을 내딛었다. 버트란드 가설이란 1845년에 버트란드(Joseph Bertrand, 1822-1900)가 최초로 추측하였던 문제로서 "임의의 양의 정수와 그 수의 두 배 사이에는 소수가 반드시 존재 한다"는 주장이다. 에르디쉬는 이 주장을 어려운 수학이론을 사용하지 않고 간결한 정수의 곱셈과 부등식의 계산만을 사용하여 증명하였다.

이후, 에르디쉬는 정수론 분야에서 다수의 논문을 발표하였는데, 그러한 학문적 업적을 인정받아 1951년에 미국수학회로부터 Cole prize를 수상한다. 그는 자신의 학문

적 관심을 정수론으로부터 해석학, 집합론, 확률론 등으로 확장하였고, 특히, 그래프 이론, 임계 이론, 램지 이론, 조합 기하학 등을 포함한 조합수학의 전 분야에 걸쳐 연구 활동을 확대하였으며, 더 나아가 관련이 없어 보이는 학문 분야들의 공통된 문제를 발견하고 해결함으로써 학문들을 연결해주는 교량 역할을 하기도 하였다.

에르디쉬는 전 세계를 돌아다니며 연구 활동을 하며 만나는 어떤 동료나 학생이든지 함께 수학에 관한 대화를 나누는 일을 서슴지 않았기 때문에, 그는 누구보다도 많은 사람들과 공동으로 연구하였고, 공동으로 발표한 논문의 수도 많다. 실제로 에르디쉬는 500명 이상의 공동 연구자를 가졌었고, 공동으로 발표한 논문의 수는 1500편에 이른다고 한다. 에르디쉬와 함께 쓴 논문의 공동저자(2005년 7월 현재 509명 [18])에게는 1번을, 1번 공동저자와의 공동저자에게는 2번을 부여하는 식의 에르디쉬로부터의 거리를 재는 에르디쉬 넘버라는 개념도 생겨났다. (Erdős Number Project 참고)

에르디쉬는 SF(Supreme Fascist, 헝가리에서의 유대인 학대를 해학적으로 기술한 하나님을 의미하는 그의 용어)가 수학의 모든 중요한 정리들의 우아한 증명을 담고 있는 하늘의 책(The Book)을 가지고 있는데, 수학자가 열심히 연구하면 그것을 잠깐 들여다볼 수 있게 해준다고 말했고, 실제로 정말로 간결하고 우아한 증명을 보면 "straight from the Book"이라는 찬사를 했다고 한다. 그는 문제를 단지 푸는 것이 아니라, 영감과 통찰력을 주는 아름다운 증명을 찾고자 노력했다.

에르디쉬의 업적 가운데 가장 중요한 것으로 여겨지는 것은 이산 수학의 문제들에 확률론적 방법을 최초로 적용하여 정수론, 조합론, 기하학 분야의 많은 문제들을 해결하였을 뿐만 아니라, 새로운 이론들, 즉, 램지 이론, 극한그래프 이론, 랜덤그래프 이론 등이 정립되는 계기를 마련하였다는 것이다. 지난 20여 년간 에르디쉬의 확률론적 방법을 적용하여 효율적인 확률 알고리즘(randomized algorithm)이 개발되고, 이러한 알고리즘의 수행시간의 하계를 계산 가능하게 하는 등, 이 방법은 컴퓨터 과학에도 중대한 영향을 끼쳤다.

에르디쉬가 수학에 기여한 업적은 매우 방대하지만, 기본적으로 그는 이론을 정립하는 사람이었기보다는 문제를 푸는 사람이었다. 그러나 그가 해결한 특별한 문제들이 때로는 새로운 이론을 탄생시키는 단초가 되기도 하였다. 아인스타인의 보조로 연구활동을 했었던 에르디쉬의 친구 스트라우스(Straus)는 다음과 같이 말했다[15].

"He is the prince of problem solvers and the absolute monarch of problem posers. He is the Euler of our times"

오일러가 해결했던 특별한 문제들이 여러 분야로의 길을 제시해 주었던 것처럼 에르디쉬가 문제를 해결하기 위하여 이용했던 방법과 결과들로부터 새로운 분야들이 생겨났다. 또한 수학 내 연구 업적의 양에 있어서도 에르디쉬는 오일러에 필적한다.

3. 확률론적 방법론

에르디쉬가 고안했다는 확률이론의 창의적 사용방법, 즉, 확률론적 방법은 이산수학에서의 많은 문제들을 해결하는데 매우 강력한 도구이다. 특히, 조합론이나 그래프 이론 분야에 속한 문제뿐만 아니라, 정수론이나 조합 기하학에도 유용한 도구이다. 확률론적 방법의 근본개념은 간단하다. 어떤 특정한 성질을 만족하는 대상의 존재성을 보이고자 할 때, 먼저 대상들의 확률공간을 정의하고 그 공간에서 임의로 선택된 대상이 특정 성질을 만족할 확률이 0 보다 큼을 보임으로써 그러한 대상을 구체적으로 찾지 않은 채 존재성을 확인한다. 이 방법은 확률론의 기초적인 성질, 즉, 확률변수의 기대값의 선형성과 여러 가지 확률부등식 등을 이용한다.

여기서 우리는 에르디쉬의 수많은 결과들 중 중요한 의미를 갖는 램지 수와 랜덤그래프에 관한 기초 이론을 살펴보며 매우 유용하고 강력한 도구로서의 확률론적 방법을 살펴보고자 한다.

3.1 램지 수

확률론적 방법의 최초 사용은 에르디쉬가 1947년에 램지 수의 하계(lower bound)를 찾는 것으로부터 시작되었다. 1930년에 램지(Frank P. Ramsey, 1903-1930)는 다음과 같은 정리를 증명하였다[14].

램지 정리. 임의의 자연수 k, l 에 대하여, 완전그래프 K_n 의 선분들을 빨간색이나 파란색으로 임의로 칠할 때, 언제나 빨간 완전그래프 K_k 또는 파란 완전그래프 K_l을 포함하는 n 을 찾을 수 있다.

이 정리의 최소 정수 n 을 **램지 수**라고 부르고, $n=R(k,l)$ 로 나타낸다. 램지 정리에서 조건으로 제시하는 특정 구조를 포함하는 큰 구조의 크기를 결정하는 것이 문제의 근본 목표이지만, 램지 수에 대한 좋은 근사값을 구하는 문제조차 매우 어렵다고 알려졌다. 실제, $k=l$일 때 정확한 값을 아는 경우는 $R(3,\ 3)=6$, $R(4,\ 4)=14$ 의 두 가지 경우뿐이다.

램지 수의 하계에 대한 결과가 1947에 에르디쉬와 쎄커레스에 의하여 얻어지는데, 이때 하계를 구하는데 이용한 방법이 확률론적 방법이고, 이에 대한 정리가 확률론적 방법을 적용한 최초의 정리로 알려졌다. 그 증명을 읽어보면 확률론적 방법을 이용한 논증이 얼마나 간단하고 아름다운 증명인지 쉽게 실감할 수 있다.

정리 (에르디쉬, 쎄커레스, 1947)[3]. $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<1$을 만족하면, $R(k,k)>n$ 이다.

증명. K_n의 각 선분을 같은 확률로 빨간색 또는 파란색으로 임의로 색칠하자. 그러면 K_n에 속한 임의의 K_k가 한 가지의 색으로 칠해질 확률은 $2^{1-\binom{k}{2}}$이고, 적어도 한 개의 K_k가 한 가지 색으로만 칠해질 확률은 $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$ 보다 작거나 같다. 그런데 이 확률이 1 보다 작으므로, K_n이 한 가지 색으로 칠해진 K_k를 포함하지 않을 확률은 0 보다 크다. 즉, K_n을 두 가지 색으로 적당히 잘 색칠하면 한 가지 색으로 칠해진 K_k를 포함하지 않게 할 수 있다. □

$R(3, 3) = 6$은 쉽게 설명되며 많은 기초 이산수학 책에 그 증명이 소개되어 있다. 그러나, K_6를 실제로 색칠하여 서로 다른 모든 경우를 살펴보아 한 가지 색으로 칠해진 K_3를 포함하지 않는 경우가 있는지 확인해보려고 한다면, $2^{\binom{6}{2}} = 2^{15} = 32,768$ 개의 그래프를 확인해보아야 한다. 이는 매우 비효율적인 방법이며, n이 큰 값으로 주어지면 K_n을 임의로 칠해 한 가지 색의 K_k를 포함하는 지를 확인하기 위해 모든 경우를 확인하는 방법은 시간이 매우 많이 소요되는 어쩌면 거의 불가능한 비효율적인 방법임을 알 수 있다. 이를 거꾸로 말하면, 확률론적 방법이 매우 효과적인 방법임을 의미한다.

위의 정리를 다시 잘 분석하면, 모든 $k \geq 3$에 대하여 $R(k, k) > 2^{\frac{k}{2}}$ 임을 의미한다. 이는 램지 수의 하계를 제공하며, 하계를 안다는 것은 관련 문제에 대한 알고리즘의 최소 수행시간을 알려줌을 의미한다. 그러므로, 확률론적 방법에 의한 결과들은 컴퓨터 과학에도 상당한 영향을 미침을 알 수 있다.

램지이론은 램지의 정리로부터 시작되었긴 하지만, 조합론, 정수론, 기하학을 비롯한 수학의 여러 분야에 걸쳐 램지 타입의 다양한 문제들을 포함한다. 결국, 램지이론이란 “거대한 구조가 혼돈 상태에 있어 보일지라도, 사실 꽤 정리된 부분 구조를 포함하고 있다”라는 현상에 대한 각종 이론을 의미한다. 이와 같은 종류의 문제로서 에르디쉬가 확률론적 방법을 사용하여 증명한 문제로 다음과 같은 예들을 들 수 있다[4].

- 서로 다른 n^2+1개의 실수들은 길이가 $n+1$인 증가하거나 감소하는 부분수열을 포함한다.
- 임의의 자연수 n에 대하여 적당한 수 N이 존재하여 N개의 점들이 평면 위에 임의로 놓여있지만 세 점이 일직선상에 있지는 않을 때, 이들 점 중 적당한 n개의 점은 볼록 n각형을 만든다.

보편적인 성질을 묻는 위와 같은 문제의 기술은 비교적 쉽고 평이하나 실제 문제해결은 쉽지 않다. 그러나, 확률론적 방법을 적절히 사용하면 상당히 효과적으로 문제들을 증명할 수 있다.

3.2 랜덤그래프 이론

랜덤그래프 이론의 출발점은 1960년에 발표된 에르디쉬와 레니(Renyi)의 논문 "On the evolution of random graphs"으로 알려져 있다. 랜덤그래프 이론이란 그래프가 갖는 보편적 성질을 탐구하는 수학으로서 확률론적 방법을 주요 연구 도구로 사용한다. 특히, 통계 물리학에서 임의의 매체(매질)를 통과하는 기체나 액체 등의 흐름을 연구하는 삼투(percolation) 이론에도 확률론이 사용되는데, 랜덤그래프에서 사용되는 방법론이 적용되는 경우가 많아 최근에는 두 분야를 동시에 연구하는 수학자들도 생겨나는 추세이다. 또한, 최근 물리학의 주요 연구 대상이 되고 있는 복잡계에 대한 연구도 랜덤그래프와 밀접한 관계가 있다. 예를 들면 small world network (혹은, scale free network)을 가장 간단하게 설명하는 데에 랜덤그래프의 개념을 사용하고 있고, 거대한 네트워크의 구조를 분석하는 데에도 확률론적 방법이 적용되고 있다.

랜덤그래프란 많은 그래프의 집합에서 임의로 선택된 대표 그래프를 의미한다. 보다 정확하게 설명하자면, n 개의 점(vertices)의 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 위에 일정 조건을 만족시키는 그래프들의 집합을 표본공간으로 잡고 이를 $\mathfrak{g}$ 로 표기한다. 이때, P가 $\mathfrak{g}$에 정의된 확률분포라면, 확률공간 $(\mathfrak{g}, \mathrm{P})$ 에 포함된 임의의 그래프를 **랜덤그래프**라고 부른다. 에르디쉬와 레니는 두 가지의 기본적인 랜덤그래프의 모델을 제시하였다.

첫 모델로 $\mathfrak{g}$를 n 개의 점들의 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 위에 정의된 모든 그래프들의 집합으로 잡는다. 그러면, $\mathfrak{g}$ 의 원소의 개수는 2^N, $N=\binom{n}{2}$이다. 여기서, 각 선분의 발생확률을 $p=p(n)$, $0 \le p \le 1$ 라고 하면 선분의 개수가 $e(G)$ 인 그래프 $G \in \mathfrak{g}$ 의 발생확률이 $\mathrm{P}(G) = p^{e(G)}(1-p)^{N-e(G)}$ 으로 주어지는 확률공간 $(\mathfrak{g}, \mathrm{P})$ 가 정의된다. 이 확률공간에서 임의로 선택된 대표 원소를 랜덤그래프라고 부르고 $G(n, p)$ 로 표기한다. $\mathfrak{g}$에 속한 그래프는 그의 선분의 개수에 따라 이항분포를 이루고, 선분의 개수를 확률변수로 했을 때 그 기대값은 $Np=\binom{n}{2}p$ 가 된다. 이러한 상황의 랜덤그래프 $G(n, p)$ 를 랜덤그래프의 **이항모델**이라고 부른다.

이와 다른 모델로, 다시 $\mathfrak{g}$를 n 개의 점을 가지며 선분의 개수가 정확히 M 개인 그래프들의 집합이라고 하자, 단, $0 \le M \le N$. 이때, 각 그래프 $G(n, M) \in \mathfrak{g}$ 의 확

률을 동일하게 $P(G) = |\mathcal{g}|^{-1} = \binom{N}{M}^{-1}$ 으로 정의하면 $\mathcal{g}$에 속한 모든 그래프들이 균등하게 분포하는 확률공간이 정의되는데, 이 $G(n, M)$을 랜덤그래프의 **균등모델**이라 부른다.

랜덤그래프 이론에서 추구하는 문제 형식은 점의 개수 n이 주어진 상태에서 랜덤그래프 $G(n, p)$ 또는 $G(n, M)$이 갖는 성질을 찾는 것이다. 이러한 문제를 해결하는 논리는 점의 개수 n을 무한히 크게 하였을 때, 어떤 특정 성질을 나타낼 확률이 0 또는 1로 점근(수렴)함을 확인함으로써, 그 특정 성질이 랜덤그래프에 보편성을 가지고 나타나게 된다고 결론을 내린다.

그러나 n을 ∞로 보낼 때, 보다 분석적인 과정을 고려하여야 확률을 구할 수 있다. 예를 들면, 연결 선분이 하나도 없는 n개의 점만을 갖는 공(empty) 그래프로부터 시작하여 각 선분의 발생확률을 p로 잡고 선분을 하나씩 독립적으로 추가하는 그래프의 변화과정을 생각한다. 이와 같은 확률과정을 랜덤그래프 과정(random graph process)이라고 부르며, 이때 생성되는 랜덤그래프가 $G(n, p)$이다. 랜덤그래프 $G(n, M)$를 생성하는 확률과정은 방금 설명한 $G(n, p)$에 대한 확률과정보다 체계적이지 않지만, $M = \binom{n}{2}p$로 잡으면 결국 두 종류의 랜덤그래프를 같은 결과를 나타낼 것임을 추측할 수 있다. 이와 같은 랜덤그래프에 대한 연구를 진행하면서 에르디쉬와 레니가 발견한 랜덤그래프에 관한 중요한 사실은 랜덤그래프 과정이 진행되면서 물리적 현상으로 관찰되는 위상 전이(phase transition)의 발생을 밝혔다는 점이다. 위상 전이 현상이란 한 위상에서 다른 위상으로의 전이가 급작스런 변화로 나타나는 현상을 말한다. 예를 들면, 물을 끓이면, 물(액체)의 상태를 유지하다가 어느 순간(비등점)에 다다르면 갑작스럽게 수증기(기체)로 변화하기 시작하는 것과 같은 현상을 말한다. 물리학에서는 위상 전이 현상을 실험적으로 설명했었지만, 에르디쉬와 레니는 확률론적 방법을 이용한 수학으로 위상 전이 현상의 존재를 밝혔다.

랜덤그래프에서 나타나는 위상 전이 현상의 한 예로, 그래프의 점의 개수가 n일 때, 선분의 개수가 $\frac{1}{2}n\log n$인 시점을 전후하여, 랜덤그래프 $G(n, M)$의 연결성(connectivity)이 급격한 변화를 나타낸다는 것을 들 수 있다. 즉, n이 충분히 큰 정수라고 가정할 때 선분의 개수가 $\frac{1}{2}n\log n$보다 작으면 거의 모든 $G(n, M)$은 연결되어 있지 않은 그래프가 되고, $\frac{1}{2}n\log n$보다 많은 선분을 가진 $G(n, M)$은 대부분의 경우 연결그래프를 나타낸다.

이상의 설명을 보다 자세하게 분석한 에르디쉬와 레니의 결과로서 랜덤그래프

$G(n,\ p)$의 선분의 발생확률 $p = p(n)$을 증가시킴에 따라 그래프가 위상 전이를 겪으면서 성장(진화)하는 과정을 다음 정리로 요약한다.

정리 (에르디쉬, 레니)[5].

(1) $n \to \infty$ 일 때 $np \to 0$ 이면, 거의 모든 $G(n,\ p)$는 숲(forest)이다.
즉, $n \to \infty$ 일 때, $G(n, p)$ 가 숲이 될 확률은 1에 접근한다.

(2) $n \to \infty$ 일 때 $np \to c$, $0 < c < 1$ 이면, 거의 모든 $G(n,\ p)$는 많아야 한 개의 회로를 포함하는 성분들로 이루어져 있다.

(3) $n \to \infty$ 일 때 $np \to c$, $c > 1$ 이면, 거의 모든 $G(n,\ p)$는 한 개의 거대성분과 많아야 한 개의 회로를 포함하는 작은 성분들로 구성되어 있다.

(4) $n \to \infty$ 일 때 $np \to \infty$ 이지만, $np - \log n \to -\infty$ 이면, 거의 모든 $G(n,\ p)$는 비 연결 그래프이고 거대성분을 제외한 나머지 성분들은 트리이다.

(5) $n \to \infty$ 일 때 $np - \log n \to \infty$ 이면, 거의 모든 $G(n,\ p)$는 연결그래프이다.

불확실성 속에서 확실한 (보편타당한) 사실을 추출해내는 창의적 방법이 바로 확률론적 방법론이라 할 수 있다. 21세기 정보화 사회에서의 지식의 축적 수단으로 확률론적 방법론의 가치는 충분히 크다. 현대의 자연과학과 공학의 각 분야에서 이루어지고 있는 연구는 그 규모가 방대하고 때때로 불확실성을 포함하고 있는 경우가 많아서 확률이론을 적용해서 연구가 이루어지는 경우가 많다. 이와 같은 추세는 앞으로도 계속해서 이어질 것이라 전망된다.

4. 맺는 글

에르디쉬는 평생을 독신으로 집도 직장도 없이 전 세계를 떠도는 방랑 수학자로 세상을 살았다. 보통 사람들과는 다른 용어를 사용하고 자신만의 독특한 생활방식으로 괴짜로 평가받는 인생을 살았다. 어쩌면 다른 사람의 도움 없이는 생존할 수 없었던 무력한 사람일지도 모른다. 그러나 그는 자신의 삶을 수학 연구에 모두 바침으로써 수학의 역사에 한 획을 그었다.

에르디쉬가 사망하자, 그의 따뜻한 마음에 감동하고 또 그를 알고 지냈던 것을 매우 큰 행복으로 여기는 수많은 수학자들이 1999년 헝가리 레니 연구소에서 모여 "에르디쉬와 그의 수학"이라는 제목으로 학회를 개최하였다. 그 때 발표된 내용들은 에르디쉬와의 특별한 인연과 만남이 주었던 의미 등을 포함하여 그가 추구하였던 수학 세계 그리고 업적 등을 망라하였다. 이때의 발표 내용은 2002년에 두 권의 책 "Paul Erdős and His Mathematics I, II"로 출간되었다.

한 수학자의 삶이 사회에 얼마나 큰 영향을 미치는 지 알 수는 없지만, 인류의 역사를 살펴보면 수학자들이 인류 문명의 변천에 있어 주도적 역할을 해 왔던 것은 사실인 것 같다. 수학자 개개인은 한 사회에서 미미한 존재로 인식될는지 몰라도 그들의 역할이 사회적으로 중요한 역할을 맡고 있음은 누구나 인식하여야 할 사실이다.

에르디쉬의 삶은 수학 자체라고 말할 수 있다. 그의 삶이 수학의 역사 속에서 한 줄기의 삶을 형성하기에, 수학자 에르디쉬 한 사람을 얘기해도 수학의 이야기가 되고 수학의 이야기에서 그의 삶을 덜어 놓을 수도 없다. 이것이 바로 수학의 대중화의 한 단면이 되고, 수학이 문화로 정립되어 가는 과정이 될 것이다.

감사의 글 본 논문을 심사하신 심사위원의 지적과 조언에 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. N. Alon and J. Spencer, *The Probabilistic Methods*, 2nd ed., Wiley, 2002.
2. B. Bollobas, *The Erdős-Rényi theory of random graphs, Paul Erdős and His Mathematics II*, Bolyai Soc. *Math. Studies* 11, Janos Bolyai Math. Soc. and Springer-Verlag, (2002), 79-134.
3. P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 292-294.
4. P. Erdő and G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Composito Math., 2 (1935), 464-470.
5. P. Erdős and A. Rényi, *On the evolution of random graphs*, Mat. Kutato Int. Kozl., 5 (1960), 17-60.
6. P. Erdős, *Graph theory and probability II*, Canad. J. Math., 13(1961), 346-352.
7. R. L. Graham and J. Nestril, *Ramsey theory and Paul Erdős, Paul Erdos and His Mathematics II*, Bolyai Soc. Math. Studies, 11, Janos Bolyai Math. Soc. and Springer-Verlag (2002), 339-365.
8. G. Gremmett, *Percolation*, 2nd ed., Springer, 1999.
9. M. Henriksen, *Reminiscences of Paul Erdős(1913-1996)*, Math. Assoc. Amer., http://www.maa.org/features/erdos.html
10. P. Hoffman, *The man who loved only numbers*, Hyperion (N.Y.), July 1998.
11. S. Jukna, *Extremal Combinatorics*, Springer, 2001.
12. G. Kolata, *Paul Erdos, 83, a Wayfarer At Math's Pinnacle, Is Dead*, NY Times, Sept. 24, 1996.

13. M. E. J. Newman, *Models of the Small World,* arXiv:cond-mat/0001118, 2000.
14. F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic,* Proc. London Math. Soc., 48(1930), 264-286.
15. E. G. Straus, *Paul Erdős is 70, Paul Erdős and His Mathematics I,* Bolyai Soc. Math. Studies, 11, Janos Bolyai Math. Soc. and Springer-Verlag (2002), 43-35.
16. Handbook of Combinatorics, R. Graham, M. Grotschel, L. Lovasz eds. Elsevier Science, 1995.
17. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Erdos.html.
18. http://www.oakland.edu/enp (Erdős Number Project)
19. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Rota.htm
20. 신현용 옮김, 폴 호프만 지음, 우리 수학자 모두는 약간 미친 겁니다, 승산, 1999.

Paul Erdős and Probabilistic Methods

Department of Mathematics, The University of Suwon **Young mee Koh**
Department of Mathematics, The University of Suwon **Sang wook Ree**

In this article, we introduce a generous but eccentric genius in mathematics, Paul Erdős. He invented probabilistic methods, pioneered in their applications to discrete mathematics, and established new theories, which are regarded as the greatest among his contributions to mathematical world. Here we introduce the probabilistic methods and random graph theory developed by Erdős and look at his life in glance with great respect for him.

Key words : probabilistic methods, Ramsey theory, random graphs, randomized algorithm

2000 Mathematics Subject Classification : 01A05, 05D30

논문 접수 : 2005년 7월 9일 심사 완료 : 2005년 9월