한국수학사학회지 제18권 제4호(2005년 11월), 85-100

수학교육에 있어서 각의 개념 지도 방안

대구한의대학교 정보보호학과 **박홍경**
hkpak@dhu.ac.kr
신라대학교 수학교육학과 **김태완**
twkim@silla.ac.kr
전남대학교 수학교육학과 **정인철**
ijung@chonnam.ac.kr

최근 저자들은 수학교육에서 수학사의 적극적인 활용과 수학지도의 순서를 결정하는 문제에 관해 연구하였다. 수학지도의 순서로는 역사적 순서, 이론적 체계, 강의적 체계 순서의 세 유형이 제안되었다. 강의적 체계 순서는 역사적 순서와 이론적 체계의 결합이며 그 결합은 본질적으로 교사 개개인의 교육적 가치관에 따른다.

본 논문에서는 구체적으로 각의 개념에 관해 수학지도의 순서에 대한 결정 문제를 다룬다. 실제 각의 개념은 도형의 개념에 관계하여 정의되기 때문에 도형의 개념에 관한 수학지도 순서의 결정 문제도 함께 다루어진다. 먼저, 수학사를 통해 도형의 개념의 역사적 순서를 조사한다. 다음에 도형에 대한 이론적 체계를 수립한다. 이러한 기초적인 자료로부터 문제 해결의 관점에서 도형의 개념의 강의적 체계 순서를 제시한다. 끝으로 제시된 도형의 강의적 체계 순서에 따라 각의 개념에 대한 강의적 체계 순서를 논의한다. 또한 가우스·보네 정리와 관련하여 각의 대역적 성질에 관해서 고찰한다.

주제어 : 각의 개념, 도형의 개념, 수학지도의 순서, 가우스·보네 정리

0. 도입

최근 [박홍경 외 3(2002)]과 [박홍경 외 2(2004)]에서는 수학교육에 있어서 수학사의 적극적인 활용을 주장하였다. 특히 구체적인 활용 방안의 문제로서 수학지도의 순서에 대해 논의하였으며 그러한 사례로서 대수학과 기하학에 대해 고찰하였다.

수학지도의 순서는 [김용운(1986)]에 따라 크게 역사적 순서, 이론적 체계, 강의적 체계 순서라는 3가지 유형으로 나누어 고려하는 것이 도움이 된다. 역사적 순서는 역사적인 변천 과정을 그대로 따르는 입장이고, 이론적 체계는 역사성을 무시하고 이론의 구조성을 중시하는 입장이다. 이러한 입장에서 강의적 체계 순서는 전자의 두 순서의 결합적인 형태라고 할 수 있다.

현재 대부분의 교과서는 결론의 효과를 유도한다는 의미에서 이론적 체계를 따른다. 이를 위해 이론의 미와 힘을 강조한다. 반면에 역사적 순서를 따르는 것은 오랜 시간을 요할 뿐만 아니라 이론적 체계를 형성하는 데 취약하다는 난점이 있다. 하지만 역사적 순서는 역사적인 발견의 맥락을 간접 체험함으로써 학생들의 자연스러운 학습동기나 개념형성에 중요하기 때문에 이를 완전히 배제할 수 없는 것은 명백하다 [박홍경 외 3, 2002].

따라서 교사는 수학지도를 위해서 역사적 순서와 이론적 체계를 적절히 상보적으로 결합함으로써 강의적 체계 순서를 정해야 한다. 이러한 상보적인 결합에 있어 가장 중요한 관건은 바로 교사의 교육관이다. 교육관은 교사 개인의 교육에 대한 포괄적인 철학에서 구체적인 교육목적과 방법을 포함할 뿐만 아니라 나아가 민족적, 시대적, 사회적 측면 등과 같은 요인과도 관련된다. 본 논문에서는 그러한 교육관의 개념에 대한 논의는 피하고 강의적 체계 순서를 정하기 위해 실질적으로 필요한 중요한 기준으로 문제해결측면을 강조하고자 한다. 문제해결측면은 어떻게 지도해야 학생들이 보다 단순(simple)하고 보다 쉽게(easy) 받아들일 수 있는가 하는 것이다.

본 논문에서는 기하학의 기본적인 1차원 측도의 하나인 각에 대해 강의적 체계 순서를 정하는 문제를 고려한다. 각의 개념은 도형에 따라 정해지기 때문에 이 문제는 사실 도형의 개념에 대해 강의적 체계 순서를 정하는 문제와 밀접한 관련이 있다. 그 핵심은 도형의 개념 특히 도형의 유형이 각의 개념지도와 관련하여 어떤 순서로 하느냐에 있다. 여기서는 문제해결측면에서 도형의 유형에 순서를 부여한다.

이를 위해 먼저 도형의 개념과 관련한 기하학의 역사를 개관한다. 이로부터 도형의 개념에 대한 역사적 순서를 고찰한다. 다음에 도형의 개념에 대한 이론적 체계를 설정한다. 이러한 논의를 바탕으로 문제해결측면을 고려하여 도형의 강의적 체계 순서를 정한다. 그러면 도형의 강의적 체계 순서에 따라 각의 개념과 관련한 대역적 성질에 대해 고찰한다.

1. 기하학사에서 본 도형의 개념

[박홍경 외 2(2004)]에서 기하학의 역사적 변천 과정을 상호 작용의 관점에서 살펴보았다. 여기서의 목적은 각의 개념 지도를 위해 관련된 도형의 개념을 역사적으로 파악하는 데 있다. 이를 위해 기하학의 역사적 변천과정 중에 나타난 다음의 4가지 유형의 기하학을 비교한다. 즉, 유클리드 기하학, 해석 기하학, 고전 미분 기하학, 현대 미분 기하학이다.

비교의 기준은 [박홍경 외 2(2004)]에 따라 3가지를 고려한다. 첫째는 성립 과정으로서 각 기하학이 성립하게 된 배경을 수학 내적인 동인과 수학 외적인 것으로서 사

상적인 동인을 살펴본다. 둘째는 특징으로서 고려하는 기하학의 기본적인 고찰 방법, 연구 대상에 대해 살펴보고 이전과의 상호 관련성을 조사한다. 셋째는 현대수학의 발전에 끼친 영향을 고려한다.

(1) 유클리드 기하학

기하학의 어원이 토지 측량에 있듯이, 고대 이집트에서는 나일강의 범람으로 인해 토지 복구의 필요성으로부터 측량이 행해졌으며 이를 통해 축적된 지식을 논리적으로 체계화하여 집대성한 것이 기원전 3세기경에 지어진 유클리드 원론이다. 유클리드 원론은 공리적 형식 체계를 따르고 있다. 5개의 공리와 5개의 공준을 바탕으로 여러 개념을 정의하고 이로부터 논증을 통해 정리를 얻었다. 이것을 근간으로 하고 있는 것이 유클리드 기하학이다.

유클리드 기하학은 그리스의 고전적 논리주의에 기인한다고 볼 수 있다. 이것은 인간과 자연을 대립하는 것으로 간주하고 객관적 존재인 자연의 통일성, 공통성에 주목함으로써 로고스를 의식하게 되었으며 고찰 방법에 있어서도 로고스로부터 출발하는 논리적 연역을 중시하는 입장이다. 따라서 절대적인 진리를 추구한다[김용운・김용국(1986), 박홍경(1994)].

유클리드 기하학은 점, 직선, 평면을 구성 요소로 한 직선도형과 원, 구를 추가하여 구성할 수 있는 특수한 곡선 도형을 연구 대상으로 하였다. 이러한 대상에 대해 길이(거리), 각, 면적, 체적 등의 기하학적인 계량을 주로 고찰하였다. 또한 합동이나 상사의 개념을 정점이나 변의 대응 관계에 의해 고려하였다. 고찰 방법은 직관에 의해 직접적으로 대상을 탐구하는 초등 기하학적 방법이었다[Kurita(1972)].

유클리드 기하학의 공리적 형식 체계는 비단 수학에 국한되지 않고 이후의 서양의 학문이나 사상에 지대한 영향을 주었다. 하지만 절대적인 진리라고 여겨왔던 유클리드 원론에도 논리적 개념이나 형식적 체계에 결함이 있다는 것을 알게 되었다. 현대수학은 이러한 결함을 해결하기 위한 여러 시도의 산물이라 할 수 있으며 그 중 힐베르트를 주축으로 한 공리주의학파들은 유클리드 기하학의 공리적 형식 체계를 크게 보완하였으며 현대수학의 기초를 확립하였다.

(2) 해석 기하학

해석 기하학은 유클리드 기하학의 초등 기하학적 방법의 개선에서 나왔으며 대수적 고찰을 통하여 기하학을 연구하고자 한 것이라 할 수 있다. 대수적 고찰이란 기호법과 연산 기호를 사용하여 관계 논리에 바탕을 둔 수학적 관계를 다루는 추상적인 고찰방식을 말한다[김용운・김용국(1986), 이종우(1998)]. 이러한 고찰 방법의 전환은 좌표에 의한 수와 양의 동일시에 의거한다. 이로 인해 기하학은 대수적 방법에 의해 직관에 의한 도형의 연구에서 범하기 쉬운 방법적 오류를 피할 수 있고 대수학은 기하

학적 해석을 통해 대수 연산에 의미를 부여할 수 있게 되었다.

두 고찰 방법의 차이는 그리스 시대의 고전적 논리주의와는 다른 근대적 합리주의에 기인한다. 전자는 절대적인 진리를 추구하는 반면에 후자의 입장은 방법적 회의나 부정, 비판을 통해 고찰 방법의 확실성, 엄밀성에 주목한다.

초등 기하학에서 대수적 방법으로의 전환은 기하학의 연구 대상인 도형과 대수학의 연구 대상인 방정식이 동일한 대상의 다른 표현임을 깨닫게 해 주는 전기가 되었다. 즉 방정식은 도형의 대수적 표현으로 볼 수 있으며 도형은 방정식의 그래프로 간주할 수 있었다. 이로 인해 기하학의 연구 대상은 크게 확대되었다. 실제 17세기 이후로 많은 여러 도형의 방정식들이 발견되었다.

해석 기하학은 유클리드 기하학의 방법적 개선이라는 기하학의 발전에만 국한하지 않고 수학 전반에 큰 영향을 끼쳤다. 즉 이것은 현대수학의 특징인 기호화, 수량화, 도형화로 향하는 근대적인 시도라 할 수 있다. 이는 해석 기하학이 대수학의 기호화를 바탕으로 기하학적 대상의 수량화와 대수적 대상의 도형화를 시도했기 때문이다.

(3) 고전 미분 기하학

고전 미분 기하학은 해석 기하학의 대수적 방법으로는 일반적인 곡선과 곡면의 연구를 더 이상 할 수 없어서 미분적분학을 적용한 데에서 나왔다. 미분적분학은 이전에는 다룰 수 없었던 일반적인 곡선이나 곡면의 문제를 공략하는데 매우 강력하고 효과적이었다[이종우(1998)]. 사실 미분적분학의 탄생으로 17, 8세기에는 수학 전반에 엄청난 발전이 일어났으며 이 시대를 소위 계산주의로 부르는데 그들의 목표는 보다 많은 자연의 법칙을 얻는 데 있었다[박홍경(1994)].

이것은 넓게 보면 좌표를 사용한다는 점에서 해석 기하학적 방법을 따른다고 할 수 있지만 해석 기하학이 기하학의 대수화라고 한다면 고전 미분 기하학은 이러한 대수화된 도형의 표현에 미분적분학을 사용한다는 점에서 기하학의 해석화라고 할 수 있다. 따라서 이전의 기하학에서는 직선 도형과 원이나 구를 구성 요소로 하는 특수한 곡선 도형을 연구 대상으로 했지만 고전 미분 기하학에서는 미분적분학을 도구로 하여 정칙 곡선 도형(곡선이나 곡면)에 대한 일반적인 연구가 가능하게 된 것이다. 따라서 고전 미분 기하학은 유클리드 기하학의 초등 해석학적 해결 기법이라 할 수 있다.

미분적분학의 속성상 도형의 성질은 국소적 성질과 대역적 성질로 명확히 나누어지게 되었다. 가령, 속도, 가속도, 곡률 등은 국소적 기하학적 성질이고 전곡률에 관한 가우스・보네 정리는 대역적 기하학적 성질의 대표적인 결과이다. 오늘날 이들 연구는 각각 국소적 이론과 대역적 이론으로 불리고 있다[Millman-Parker(1977)]. 대역적 이론은 도형의 결정 및 분류 이론과 함께 연구의 기본 방향이 되었다.

국소적 이론은 미분적분학이 근본적으로 무한소적 접근 방법을 택하는 것에 의거한다. 가령, 곡선은 무한소적으로 접선으로 간주할 수 있기 때문에 직선이 벡터라면 곡

선은 접벡터로 접근한다. 그리고 곡면 위에서 계량의 정의는 무한소적으로는 접평면 위에서의 계량으로 접근한다[Gray(1993)].

(4) 현대 미분 기하학

현대 미분 기하학은 고전 미분 기하학의 유클리드 계량을 일반화하고 도형의 차원을 확장하는 것에서 출발하였다. 한편 비유클리드 기하학, 고차원 기하학의 발전으로 계량을 가진 공간뿐만 아니라 사영 공간이나 리만면과 같이 계량을 갖지 않거나 불분명한 공간이 생겨났으며 이로 인해 이들을 통합적으로 다루기 위해 계량성을 버리고 연장성이라는 위상적 성질만을 고려함으로써 연속 다양체라는 추상화된 개념이 형성되었다[김용운 · 김용국(1986), Gamkrelidze(1991)]. 현대 미분 기하학의 가장 큰 특징은 기하학의 추상화와 일반화라고 할 수 있다. 이를 단적으로 말하면, 기하학의 추상화를 통해 기하학의 대상은 전체로서의 공간과 부분으로서의 도형이 독립적으로 다루어지게 되었으며 이들은 모두 위상 기하학적으로 다양체라는 일반적인 대상으로서 고려되었다.

또한 고찰 방법으로는 이제 기하학에 모든 현대수학의 방법이 적용된다고 해도 과언이 아니다. 말하자면 기하학은 다른 모든 수학적 방법을 해결기법으로 사용하게 되었으며 이는 역으로 다른 분야들도 기하학을 해결 기법으로 적용하는 것을 말한다. 이러한 수학의 방법론적 상호 작용은 20세기 중엽을 강하게 주도한 구조주의에 기인한다고 할 수 있다. 이것은 현대수학을 공리적 체계 위에서 전체를 구조화하려는 시도이다.

지금까지의 논의를 바탕으로 4가지 유형의 기하학을 비교하면 <표 1>과 같다.

이제 도형의 개념을 기하학사에서 고려해보자. 도형이란 수학적 존재의 기하학에서의 표현이다. 현대수학의 추상화에 의해 그것은 범주적 관점에 따라 전체와 부분으로 나누어 볼 수 있다. 그러면 전체로서의 공간과 부분으로서의 도형으로 나뉜다.

먼저 역사적으로 공간의 유형이 어떻게 출현하였는지 살펴보자. 최초의 공간은 유클리드 기하학에서 다룬 유클리드 공간이다. 다음으로 사영 기하학에서 유클리드 공간을 확장한 사영 공간이 출현하였다. 19세기에 들어서서 비유클리드 기하학이 성립하여 비유클리드 공간이 출현하였으며 이것은 다양한 공간을 고려할 수 있는 계기가 되었다. 동시대에 변환의 입장에서 아핀 공간, 공형 공간 등 여러 공간이 출현하였다. 더욱이 에르랑겐 프로그램의 입장에서 사영공간을 정점으로 하여 당시의 여러 공간들이 계통화되었다[박홍경 외 3(2002)].

또한 계량의 입장에서 리만 공간, 나아가 계량 공간이 출현하였다. 20세기로 접어들면서 위상 기하학의 성립으로 위상 공간의 개념이 등장하였고 기하학과 관련하여 다양체의 개념이 형성되었다.

<표 1> 기하학의 유형

	유클리드 기하학	해석 기하학	고전 미분 기하학	현대 미분 기하학
내적 동인	논리적 체계화 시도	초등 기하학적 방법 개선	도형의 방정식의 일반적 연구	계량의 일반화 차원 확장 도형의 추상화
사상적 동인	고전적 논리주의 (공리적 형식 체계와 논증 시도)	근대적 합리주의 (방법적 회의)	계산주의 (미분적분학)	구조주의 (공리적 체계 확립)
고찰 방법	초등 기하학적 방법	대수적 방법	초등 해석학적 방법	고등 해석학적, 고등 대수학적, 위상적 방법
연구 대상	직선 도형 특수한 곡선 도형	도형의 방정식에 의한 특수한 곡선 도형 추가	도형의 방정식에 의한 정칙 곡선도형	추상적 도형 (다양체)
현대 수학의 특징	공리적 체계, 형식성 반영	기호화, 수량화, 도형화 반영	국소적, 대역적 이론 전개	추상성, 일반성

한편 대수학에서는 벡터 공간의 개념이 등장하고 군의 개념이 나타났다. 이로부터 환, 체, 속, 대수 등 여러 대수적 공간들이 다수 출현하였다. 게다가 20세기에는 해석학과 기하학, 대수학의 결합으로서 계량 벡터 공간의 개념이 형성되었다. 이로부터 무한차원이론으로서 바나흐 공간, 힐베르트 공간 등이 출현하였다.

이제 역사적으로 도형의 유형이 어떻게 출현하였는지 살펴보자. 최초의 도형의 유형은 유클리드 기하학에서 찾아볼 수 있다. 크게 점, 직선, 평면을 구성 요소로 하는 직선 도형과 그렇지 않은 곡선 도형으로 나눌 수 있다. 가령, 원이나 구를 비롯하여 이들을 구성 요소로서 추가하여 구성되는 원기둥, 원뿔 등은 모두 유클리드 기하학에서 다루어진 특수한 곡선 도형들이다.

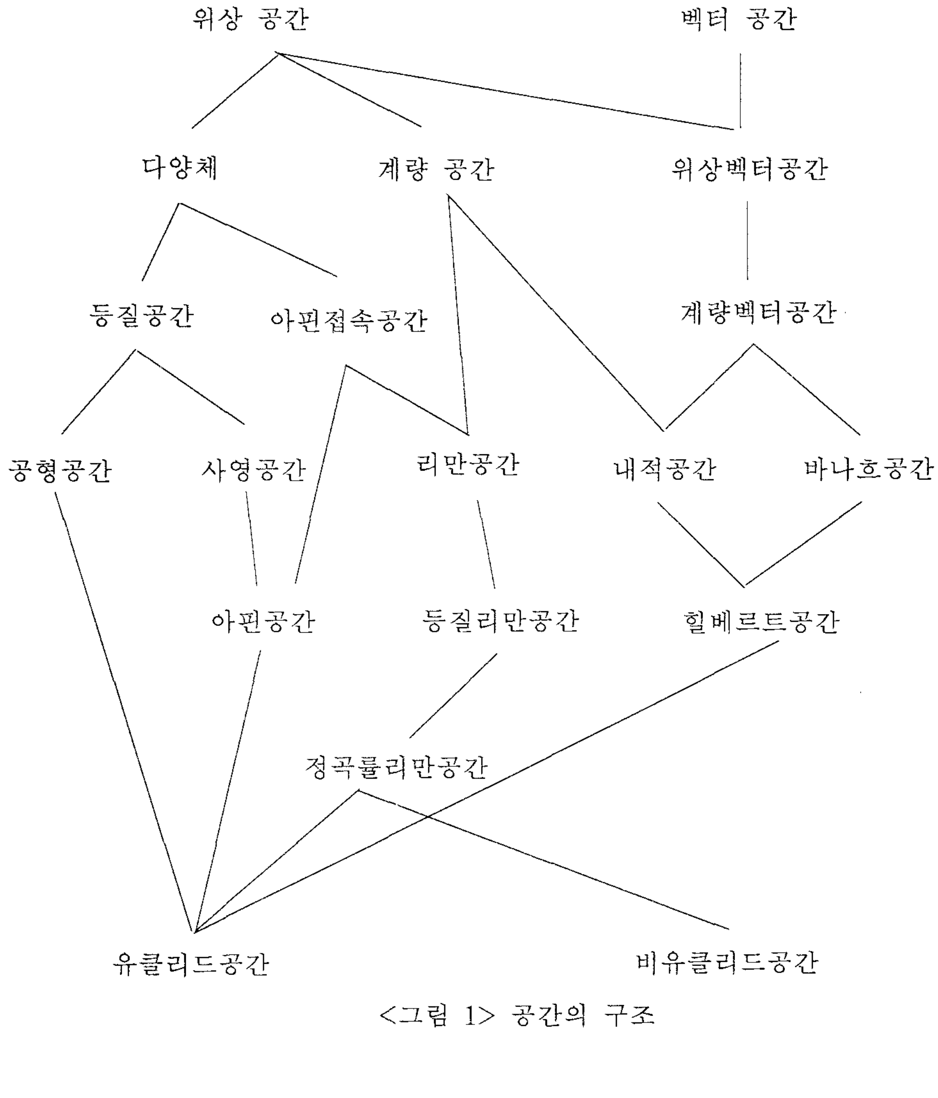
다음으로 해석 기하학에서는 좌표에 의한 도형의 방정식을 고려함으로써 더욱 많은 특수한 곡선 도형들이 다루어지게 되었다. 가령, 데카르트의 엽선이나, 페르마의 나선 등 여러 대수적 곡선이나 곡면들이 나타났다.

고전 미분 기하학에 이르러서는 미적분학을 이용하여 일반적인 도형의 방정식을, 특히 일반적인 정칙 곡선과 곡면에 대해 연구하기 시작하였다. 또한 비유클리드 기하학의 성립으로 유클리드 공간만이 아니라 비유클리드 공간을 포함하여 앞서 언급한 여러 공간을 다양하게 고려할 수 있게 되었다. 나아가 현대 미분 기하학에서는 위상 기하학의 도움으로 곡선도형으로서 추상적인 개념인 다양체를 다루었다. 이것은 공간과 도형을 독자적으로 고려할 수 있는 계기가 되었다. 곡선 도형은 정칙인 것과 비정

칙인 것으로 나눌 수 있다.

2. 이론적 체계로서 도형의 유형

1절에서 논의한 여러 공간과 도형에 대해 이론적 체계로서 다시 고려해보자. 먼저 공간에 대해서는 구조적으로 <그림 1>과 같이 체계화된다.



<그림 1> 공간의 구조

다음으로 도형의 체계를 세워보자. 이를 위하여 도형의 위상적, 기하학적 성질을 고려하는 것이 유용하다. 여기서 고려하는 위상적 성질로는 각과 관련하여 열림성, 닫힘성, 유향성, 연결성, 단순성 등을 들 수 있다. 논의의 필요에 의해 도형은 닫힘성, 연결성, 유향성은 전제한다. 따라서 실제로 고려하는 성질은 위상적으로는 단순성이며 여기에 기하학적으로는 직선성, 정칙성, 볼록성이 된다. 그러면 다음과 같이 도형의 유형을 체계화할 수 있다.

$$\begin{cases} \text{직선 도형} \\ \text{곡선 도형} \begin{cases} \text{정칙} \\ \text{비정칙} \end{cases} \end{cases}$$

각 도형마다 다시 단순성과 볼록성에 의해 도형의 유형을 나눌 수 있다. 가령, 직선 도형의 경우에는 단순인 경우와 비단순인 경우로 나눌 수 있으며 단순 직선 도형은 볼록인 경우와 오목인 경우로 나눌 수 있다.

3. 도형의 강의적 체계 순서

이제 앞에서 고찰한 도형의 개념의 역사적 순서와 이론적 체계를 바탕으로 문제해결측면에서 공간과 도형의 강의적 체계 순서를 정해보자.

먼저 공간의 입장에서 유클리드 공간에서 비유클리드 공간, 그리고 추상적 공간(다양체)으로의 이행은 역사적으로나 이론적으로 부합할 뿐만 아니라 심리적으로도 자연스럽다. 말하자면 이러한 이행은 역사적인 변천과정과 일치하며 이론적으로는 특수한 경우에서 일반적인 경우로의 확장이 된다. 또한 심리적으로 유클리드 공간은 우리의 감각에 쉽게 접할 수 있어서 이것은 경험적인 것에서 추상적인 것으로의 이행이라 할 수 있다. 따라서 공간에 대한 인식은 '유클리드 공간 → 추상적 공간'으로 순서를 정한다. 도형에 대한 인식은 '직선 도형 → 곡선 도형'으로 이행한다. 이것은 역사적으로 유클리드 기하학에서 미분 기하학으로 진행한 것과 맥을 같이 하며 이론적으로는 단순한 경우에서 복잡한 경우로의 이행에 해당한다. 또한 심리적으로도 직선 도형에 대한 각의 개념이 곡선 도형보다 더 직관적이다.

직선 도형에서 곡선 도형으로의 이행에 적용하는 가장 기본적이고 자연스러운 사고방식은 무한소적 접근 방법이다. 각의 입장에서는 직선 도형의 경우는 이산적이고 곡선 도형의 경우는 연속적인 개념이라 할 수 있기 때문에 이 순서는 이산에서 연속으로의 흐름으로도 볼 수 있다.

특히, 곡선 도형의 경우에는 다시 '정칙 → 비정칙'으로 이행한다. 이것은 비정칙 곡선 도형은 직선 도형과 정칙 곡선 도형의 혼합된 형태이기 때문에 역사적으로나 이론

적으로 부합되는 진행이라 할 수 있다.

또한 차원에 대한 인식은 2차원 공간 내의 2차원 도형의 경우에서 출발하여 고차원으로 이행한다. 이것은 역사적으로나 이론적으로 부합할 뿐만 아니라 심리적으로도 유클리드 평면 내의 직선 도형일 때 각의 개념이 가장 직관적이기 때문이다.

도형의 성질인 단순성과 볼록성에 대한 인식은 '단순 → 비단순, 볼록 → 오목'으로 이행한다. 이러한 이행은 이론적으로 단순한 것에서 복잡한 것으로의 진행이며 심리적으로도 쉬운 것에서 어려운 것으로 나아가는 것이라 할 수 있다. 따라서 이들을 함께 고려하면 '볼록 → 오목 → 비단순'의 이행이 된다. 이것은 각의 개념을 고려하는 모든 도형에 대해 적용할 수 있는 순서임에 주의한다.

끝으로 지금까지 고려한 순서는 부분적인 것이므로 이들에 대해 전체적으로 순서를 정하는 문제를 고려해야 한다. 즉 공간, 차원, 도형에 대해 순서를 정하는 문제이다. 그 이행은 '도형 → 공간 → 차원'으로 정한다. 먼저 공간을 유클리드 공간으로 하고 공간과 도형의 차원을 2차원으로 고정하여 다양한 도형의 유형에 따라 각의 개념을 고려한다. 다음에 공간을 유클리드 공간에서 2차원 다양체인 곡면으로 이행하여 각의 개념을 고려한다. 끝으로 차원을 확장하여 고차원 다양체의 경우에 대해 고려한다.

이러한 입장에 따르면 유클리드 평면 내에서 직선 도형을 고려한 뒤 곡선 도형을 고려한다. 다음에 곡면 내에서 곡선 도형을 고려한다. 물론 이 경우에는 직선 도형이 무의미한 것에 주의한다. 끝으로 고차원 다양체를 고려한다. 말하자면 '평면 직선 도형 → 평면 곡선 도형 → 곡면 곡선 도형 → 다양체'의 이행이 된다.

앞에서의 모든 고려를 바탕으로 각의 개념을 지도하는 도형의 강의적 체계 순서를 종합적으로 정리해보자. 닫힘성, 연결성, 유향성은 전제하므로 다음과 같은 8가지 유형과 순서가 가능하다.

볼록 다각형 → 오목 다각형 → 평면 비단순 직선 도형
→ 평면 정칙 곡선 도형 → 평면 비정칙 곡선 도형
→ 곡면 정칙 곡선 도형 → 곡면 비정칙 곡선 도형
→ 다양체

4. 각의 개념과 관련한 대역적 성질

가장 직관적인 각의 정의는 두 반직선으로 이루어진 정점에서의 교각의 개념이다. 이 각은 각도기를 통해 실제적으로 측정할 수 있다. 이것이 초등학교에서 배우는 각의 개념이며 이를 출발점으로 한다. 보다 고등적으로는 벡터의 개념을 이용하여 각의 개념을 정의할 수 있다.

대학에서 배우는 각은 내적 공간, 특히 유클리드 공간에서 정의되는 기하학적 1차원 측도의 하나로서 국소적인 기하학적 개념이다. 가령, 삼각형, 사각형, 원은 유클리드기하학의 입장에서 서로 다른 도형이다. 말하자면 삼각형이나 사각형에서의 각은 서로 다르며 심지어 원의 경우에는 각의 정의가 있을 수 있는지조차 불분명하다. 반면에 이들은 대역적으로는, 즉 위상적으로는 모두 콤팩트, 연결, 단순, 유향적인 평면곡선으로서 같다. 사실 이들 사이에는 공통적으로 성립하는 각의 대역적인 성질이 있다. 이제 각의 개념과 더불어 이 대역적인 성질에 대해서 4절에서 정한 도형의 강의적 체계 순서에 따라 자세히 살펴보자.

(1) 볼록 다각형

이 경우 내각이나 외각은 모두 명백하게 직관적으로 정의된다. 다만 내각은 일의적으로 정해지지만 외각은 2가지 정의 방법이 가능하다. 따라서 내각(내부에 있다는 의미로서 붙여진 이름이다)을 먼저 정의하고 외각(내각+외각=180°)은 2가지 정의 방법 중 하나를 선택한다. 통상 반시계 방향으로 외각을 정의한다.

각 정점 p_a에 대해 대응하는 내각과 외각을 각각 ι_a와 ε_a로 표기하자. 그러면 외각의 총합 $S_O=\sum_{a=1}^{n}\varepsilon_a$과 내각의 총합 $S_I=\sum_{a=1}^{n}\iota_a$을 쉽게 구할 수 있다. 공식에서 알 수 있듯이 S_O는 n에 무관하고 S_I는 변의 수 n에 의존하기 때문에 다음과 같이 나타낸다.

$$S_O=2\pi, \quad S_I(n)=(n-2)\pi$$

나중의 논의를 위해 외각부터 먼저 계산한다. 증명은 평행선 공리를 이용한다. 다음으로 내각의 총합 계산은 삼각 분할에 의해 구하거나 외각의 총합으로부터 구할 수 있다.

(2) 오목 다각형

이 경우에는 내각은 여전하지만 외각의 정의가 볼록인 경우와는 달리 덜 명백하게 된다. 이를 명확히 하기 위해서는 다각형에 방향성을 고려해야 하고 이에 따라 각의 개념에 부호를 도입해야 한다. 외각에 대해 부호를 정한다. 내각은 할 필요가 없다. 반시계 방향은 양, 시계 방향은 음으로 한다.

반시계 방향으로 고려하면 여전히 외각과 내각의 총합은 (1)에서 얻은 볼록인 경우와 동일하다. 볼록인 경우는 반시계 방향일 때 모든 외각이 양인 경우이므로 (1)의 경우로 환원한다는 의미에서 외각의 개념이 볼록이나 오목에 상관없이 다각형에 일관되게 적용될 수 있도록 확장되었다. 하지만 아직까지는 방향성에 대해 명시적으로 할 필요가 없다. 통상 묵시적으로 반시계 방향을 택하면 된다.

(3) 평면 비단순 직선 도형

비단순인 경우로 나아가자. 이 경우는 더 이상 다각형이 아니므로 볼록과 오목의 구분이 의미가 없다. 대신 단순일 때와는 달리 회전수의 개념이 등장한다. 이때, 오목인 경우에서와 같이 방향성이 고려되어져야 한다. 통상 묵시적으로 반시계 방향을 택한다.

회전수의 개념은 대역적 성질임을 관찰한다. 이때 단순인 경우는 회전수가 방향에 따라 ± 1인 것으로 특징지을 수 있기 때문에 비단순인 경우는 단순을 포함하는 확장이라고 할 수 있다.

회전수를 m이라 할 때 외각과 내각의 총합을 구해보면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$S_O(m) = 2\pi m, \quad S_I(n,m) = (n-2m)\pi$$

이것은 위에서 얻어진 단순인 경우(묵시적으로 반시계 방향이므로 $m=1$인 경우)를 포함하는 일반화된 결과이다. 따라서 위의 공식은 모든 평면 직선 도형에 대해 성립한다.

한편 비단순인 경우에는 외각의 총합의 계산은 전과 동일하지만, 내각의 총합의 계산은 볼록인 경우와는 달리 (즉 삼각 분할이 아니라) 외각의 총합으로부터 구해지는 것에 주의한다. 그것은 비단순인 경우에는 삼각 분할이 무의미하기 때문이다.

물론 내각의 총합도 직접 구할 수 있는 여러 가지 방법이 있다. 다만 삼각 분할에 의한 방법을 적용할 수 없다는 의미이다. 가령, 별의 경우 평행선 공리에 따른 여러 가지 각의 성질을 이용하여 내각의 총합을 구할 수 있다.

(4) 평면 정칙 곡선 도형

이제 평면 정칙 폐곡선의 경우로 들어가자. 필요하다면 다시 이 폐곡선을 평면 직선 도형에서와 같이 볼록, 오목, 비단순인 경우로 세분하여 순서적으로 지도할 수 있음을 주의한다. 곡선의 경우에는 정점에서의 각과 같은 것은 존재하지 않기 때문에 더 이상 직선 도형에서의 각의 개념을 고집할 수 없다. 사실 곡선은 순간적(무한소적)으로 직선이기 때문에 이러한 맥락에서 순간적인 각의 개념을 고려하는 것은 자연스러운 발상이다. 이러한 각은 외각과 관련한다. 내각의 경우는 일반으로 고려하지 않는다. 그것은 원(무한 정다각형이라 간주)을 고려하면 쉽게 짐작할 수 있듯이 그 합이 무한이 될 수 있기 때문이다. 이쯤 되면 각의 개념은 내각보다는 외각이 더 본질적이라 할 수 있는 지경에 이르게 된다.

순간적인 각의 개념으로서 곡률의 개념이 등장한다. 즉 호장을 매개변수로 할 때, 회전각의 순간변화율은 바로 곡률 χ이다. 더욱이 이 곡률을 적분함으로써 전곡률

$\int \chi ds$ (여기서 s는 곡선의 호장 함수)을 정의할 수 있다. 이 개념은 다음의 성질에서 알 수 있듯이 바로 평면 직선도형에서의 외각의 총합에 대응한다. 이러한 의미에서 곡률은 순간적인 외각의 개념에 대응된다. 말하자면 외각이 이산판 개념이라면 곡률은 외각의 연속판 개념이라고 할 수 있다. 그러면 회전수 m인 정칙 평면 폐곡선의 전곡률은 다음과 같다.

$$\int \chi \, ds = 2\pi m \, (= S_O(m))$$

그러므로 평면 직선 도형의 외각의 총합과 같다. 앞서 언급한 바와 같이 내각의 총합은 의미가 없다.

결론적으로 평면 직선 도형이나 정칙 평면 폐곡선의 외각의 총합은 모두 회전수에 관련하여 같은 공식을 가진다. 말하자면 직선 도형에서 곡선 도형으로 변화하는 동안에도 대응하는 각의 개념을 이산적인 것에서 연속적인 것으로 잘 정의하면 외각의 총합의 개념이 그대로 살아있으면서 만족하는 성질도 보존됨을 알 수 있다.

(5) 평면 비정칙 곡선 도형

정칙인 경우를 더욱 확장해보자. 여기에는 정칙성의 확장과 공간의 확장이라는 2가지 방법이 가능하다. 전자는 평면 비정칙 곡선 도형이고 후자는 곡면 정칙 곡선 도형이다. 4절에서 언급한 바와 같이 공간의 변화보다 도형의 변화를 우선으로 하여 평면 비정칙 곡선 도형을 먼저 고려한다.

이것은 (3)과 (4)의 혼합된 형태이므로 각 경우마다 해당하는 각의 개념을 혼합해서 적용하면 될 것이다. 그러면 그 결과도 혼합된 형태로 나타남을 쉽게 추측할 수 있다. 즉 회전수 m인 평면 비정칙 폐곡선의 전곡률과 정점에서의 외각의 총합은 $2\pi m$이다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\int \chi \, ds + \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a = 2\pi m$$

여기서 정점의 경우에는 접선에 의해 외각을 정의한다. 좌변은 국소적인 기하학적 성질이며 우변은 대역적인 위상적 성질임을 다시 상기한다. 이렇게 하여 평면 도형에 대한 각의 개념이 완전히 규정되었다.

(6) 곡면 정칙 곡선 도형

이제 곡면 정칙 곡선 도형에 대해 고려하자. 여기서부터 공간은 유클리드 평면에서 곡면으로 이행한다. 앞에서의 모든 논의는 공간이 유클리드 평면인 경우였다. 유클리

드 평면은 가우스 곡률이 0이므로 곡면인 경우는 이 정보를 반영하여 일반화하는 것이 된다.

여기서 논의하는 곡면의 개념은 정칙이고 경계가 없으며 자기 교차가 없는 단순인 것으로 한다. 보다 전문적으로는 이러한 곡면의 정의를 확장할 수 있고 이에 따른 이론도 가능하지만 더 이상의 논의는 매우 깊은 전문성을 요하기 때문에 피하기로 한다.

공간이 곡면일 경우에는 2가지 형태의 결과가 가능하다. 하나는 곡면 내의 도형에 관한 결과이며 다른 하나는 곡면 자체에 관한 결과이다. 전자는 소위 외각에 관한 가우스 · 보네 정리의 특수한 형태인데, 즉 곡면 M 위에 놓인 회전수 m인 정칙 폐곡선에 대해 다음이 성립한다.

$$\int K\, dM + \int \chi_g\, ds = 2\pi m$$

여기서 K는 곡면의 가우스 곡률이고, χ_g는 곡선의 측지 곡률을 나타내는데 평면 정칙 폐곡선일 경우에는 앞서 정의한 곡률 κ와 일치한다.

후자는 소위 가우스 · 보네 정리인데, 즉 M이 정칙이고 유향인 폐곡면이면 다음이 성립한다.

$$\int K dM = 2\pi\chi(M)$$

여기서 $\chi(M)$은 M의 오일러 · 푸앵카레 표수이다. 이것 또한 m과 마찬가지로 대역적 위상적 성질이다. $\chi(M) = 2-2g$가 성립한다(g는 종수(genus)이다).

(7) 곡면 비정칙 곡선 도형

다음은 (5)와 (6)의 혼합된 형태라 할 수 있는 곡면 비정칙 곡선 도형이다. 이 경우는 소위 외각에 관한 가우스 · 보네 정리를 얻는다. 사실 비정칙인 정점으로 인해 가우스 곡률이 곡면 전체에서 정의되지 않기 때문에 가우스 · 보네 정리는 무의미하다. 즉 정칙이고 유향인 폐곡면 M 위에 놓인 회전수 m인 비정칙 폐곡선에 대해 다음이 성립한다.

$$\int K dM + \int \chi_g\, ds + \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a = 2\pi m$$

이것은 최초의 볼록 다각형에 비해 공간의 일반화와 직선 도형과 곡선 도형을 혼합한 도형의 일반화를 보여준다.

이러한 성과는 이전에는 마치 중간에 큰 장벽이 있어서 전혀 무관하게 여겨져서 별개의 대상으로 고려하고 별개의 방법으로 취급되어 왔던 직선 도형과 곡선 도형의 세

계가 그들 사이에 놓여있던 벽이 허물어지거나 분리된 곳에 가교가 생겨났다고 할 수 있다.

(8) 다양체

이후 가우스 · 보네 정리는 우수 차원의 리만 다양체로 확장되어 소위 일반화된 가우스 · 보네 정리가 얻어졌다[Gamkrelidze, 1991]. 즉 $2n$차원 정칙이고 유향인 폐리만 다양체에 대해 다음이 성립한다.

$$\int \frac{1}{n!}(-\Omega)^n = (2\pi)^n \chi(M)$$

여기서 Ω는 레비 · 치비타 접속의 곡률 형식이다. $n=1$일 때에는 $\Omega = -K\,dM$이 됨을 주의한다.

이것은 기하학의 대역적 이론의 대표 주자가 되었고 이로부터 다양하게 파생되고 확장된 성과가 얻어졌다. 그 중 몇 가지를 간단히 소개하고자 한다.

먼저 일반화된 가우스 · 보네 정리는 자연스럽게 주속(principal bundle)으로 확장된다. 이를 포함하여 보다 일반적으로 불변 다항식 이론이 개발되어 있다. 여기서 얻어지는 불변다항식에 대응하는 코호몰로지류를 특성류(characteristic class)라고 한다. 그것에는 오일러류를 비롯해 폰트리야긴류, 천류 등이 있다. 또한 계량의 입장에서는 리만 계량이 아닌 경우에도 연구되어 있으며 폐다양체가 아닌 경우에도 유사한 결과가 밝혀져 있다.

한편 위의 불변 다항식 이론과도 관련되어 있지만 가장 중요한 대역적 성질로서 다양체 상에는 코호몰로지 또는 호몰로지가 정의될 수 있다[Poor(1981)]. 이 분야는 드람과 호지에 의해 연구된 소위 조화적 분론이다. 그러면 일반화된 가우스 · 보네 정리와 관련하여 n차원 정칙이고 폐 다양체에 대해 다음이 성립한다.

$$\chi(M) = \sum_{a=0}^{n}(-1)^a b_a(M)$$

여기서 $b_a(M)$은 M의 a차 베티수이다. 더욱 나아가면 이것은 지수 이론으로 이어진다. 이 이론은 해석학의 이론과 연결하여 타원적 연산자의 기하학으로 알려져 있다.

5. 결론

지금까지 우리는 각의 개념을 지도하기 위하여 각의 강의적 체계 순서를 수립하였

다. 이러한 수립을 위하여 각의 개념과 관련하여 도형의 강의적 체계 순서를 정하는 문제를 고려하였다. 도형의 순서를 정함에 있어서는 극단적인 두 순서인 역사적 순서와 이론적 체계를 고찰하고 이를 바탕으로 문제 해결 측면에서 도형의 강의적 체계 순서를 정하였다. 문제 해결 측면이란 개념이나 문제가 보다 쉽고, 보다 단순하고, 보다 자연스러운 방향에서 출발함으로써 학생들에게 동기부여를 주는 것과 동시에 학생들의 문제 의식과 문제 해결 능력이 더불어 성장할 수 있도록 하는 것을 의미한다.

우리는 초등적인 수준에서 고등적인 수준에 이르기까지 각의 개념을 통찰하였다. 이것은 각의 개념에 대해 [MacLane(1981)]의 의미에서 깊이와 넓이를 파악하려는 시도라고 볼 수 있다. 말하자면 우리의 시도는 각의 근원적인 개념을 파악하려는 것이며 각과 관련한 다양한 상황에의 적용 범위를 넓히는 것이라 할 수 있다. 따라서 본 논문은 실제 각의 개념에 대한 수업지도에 있어서 개개의 학생들의 정성적인 능력이나 성과를 정량적으로 평가하는 데 지도용 지침서로서 아주 유용할 것으로 기대된다.

참고 문헌

1. 김용운(1986), "수학사학과 수학교육," 한국수학사학회지 제3권 제1호, pp 21-33.
2. 김용운 · 김용국(1986), 수학사대전, 서울: 우성문화사.
3. 박홍경(1994), "수학적 진리관의 탐색," 경산대학교논문집 12, 경산대학교, pp 1-16.
5. 박홍경 · 장이채 · 김태균 · 임석훈(2002), "수학사를 활용한 수학교육," *Proceeding of Jangjeon Mathematical Society* 5, 장전수리과학회, pp. 73-86.
6. 박홍경 · 김태완(2004), "수학사를 활용한 수학교육 II," 한국수학사학회지 제17권 제4호, pp. 101-122.
7. 이종우(1998), 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.
8. R.V. Gamkrelidze(1991), *Geometry I*, Encyclopaedia of Math. Sci. vol. 28.
9. A. Gray(1993), *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Tokyo: CRC Press, Inc.
10. M. Kurita(1972), 現代幾何學, 東京: 筑摩書房.
11. S. MacLane(1981), "*Mathematical models*," Amer. Math. Monthly 88, pp. 462-472.
12. R.S. Millman · G.D. Parker(1977), *Elements of Differential Geometry*, New Jersey: Printice-Hall, Inc.
13. W.A. Poor(1981), *Differential Geometric Structures*, New York: McGraw-Hill. Inc.

On Teaching of the Concept of Angle in Education of Mathematics

Dept. of Computer & Information Security, Daegu Haany Univ. **Hong Kyung Pak**
Dept. of Mathematics Education, Shilla Univ. **Tae Wan Kim**
Dept. of Mathematics Education, Chonnam National Univ. **In chul Jung**

In recent papers [Pak et al., Pak and Kim], it was suggested to positively use the history of mathematics for the education of mathematics and discussed the determining problem of the order of instruction in mathematics. There are three kinds of order of instruction - historical order, theoretical organization, lecturing organization. Lecturing organization order is a combination of historical order and theoretical organization order. It basically depends on his or her own value of education of each teacher.

The present paper considers a concrete problem determining the order of instruction for the concept of angle. Since the concept of angle is defined in relation to figures, we have to solve the determining problem of the order of instruction for the concept of figure. In order to do this, we first investigate a historical order of the concept of figure by reviewing it in the history of mathematics. And then we introduce a theoretical organization order of the concept of figure. From these basic data we establish a lecturing organization order of the concept of figure from the viewpoint of problem-solving. According to this order we finally develop the concept of angle and a related global property which leads to the so-called Gauss-Bonnet theorem.

Key words : concept of angle, concept of figure, order of instruction, Gauss-Bonnet theorem

2000 Mathematics Subject Classification : 97B50, ZDM Classification : G89

논문 접수 : 2005년 8월 26일 심사 완료 : 2005년 9월