

비틀림 진동 변환기용 압전 원판의 진동특성 해석

Vibration Characteristics Analysis of a Piezoelectric Disc for Torsional Transducers

이 정 현* · 김 진 오†

Jung Hyun Lee and Jin Oh Kim

(2005년 10월 10일 접수 ; 2005년 11월 28일 심사완료)

Key Words : Piezoelectricity(압전), Transducer(변환기), Torsional Vibration(비틀림 진동), Natural Frequency(고유진동수), Characteristics Equation(특성방정식), Impedance(임피던스)

ABSTRACT

This paper presents an analytical approach for the vibration characteristics of a piezoelectric disc for torsional vibration transducers. The characteristic equation of the piezoelectric annular disc has been derived from Gibbs' free energy equations and mechanical and electrical equilibrium. With an anisotropic material properties of the disc, the characteristic equation has yielded resonance frequencies. Numerically-calculated results have been compared with the results obtained by the finite element analysis and experiments and have confirmed the validity of the theoretical analysis.

1. 서 론

역학적 양인 응력과 전기적 양인 전압간의 상호 변인인 압전 현상이 널리 활용되는 분야의 하나가 센서와 액추에이터이다.⁽¹⁾ 특히 비틀림 진동 변환기^(2,3)는 원형 봉의 비틀림 진동과 인접 점성유체의 상호작용의 영향을 감지하는 점도센서⁽⁴⁾에 활용되고, 종방향 진동체와 결합되어 작동하는 초음파 모터⁽⁵⁾에 활용되기도 한다. 이러한 용도로 활용되기 위해서는 설계 단계에서 변환기의 진동 특성을 해석할 수 있어야 한다. 앞선 연구⁽⁶⁾에서 이와 유사한 시도가 있었는데, 이방성 압전체를 등방성으로 단순화하여 다루었다.

이 논문은 비틀림 진동 변환기에 사용되는 압전 원판을 대상으로 한다. 압전 비틀림 변환기는 Fig. 1에 보인 바와 같은 구조로 되어 있다. 원주방향으로 분극된 압전 원판이 있고, 공진주파수를 낮추기 위하여

부가질량 효과를 내는 금속블록이 결합되며, 볼트로써 이들을 체결한다. 압전 원판에 대하여 이방성을 고려한 해석을 하여 진동 특성을 예측하는 이론적 연구를 제시한다. 특성방정식과 임피던스 식을 유도하여 공진주파수를 계산하고, 유한요소해석 및 실험과의 비교를 통해 해석의 타당성을 입증한다.

2. 비틀림 압전 원판의 진동 해석

2.1 압전 지배식

압전 현상을 나타내는 지배방정식은 Gibbs의 자유 에너지식으로부터 열역학 1, 2법칙을 적용하여 얻을 수 있고, 이를 역학적 에너지 항과 전기적 에너지 항을 고려하여 나타낸 식은 다음과 같다.⁽¹⁾

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m \quad (1)$$

$$D_m = d_{mi} T_i + \epsilon_{mk}^T E_k \quad (2)$$

여기서 T 와 E 는 응력과 전기장이고, S 와 D 는 변형률과 전기적 변위이다. 식 (1)과 식 (2)를 응력 T 와 전기적 변위 D 에 대한 식으로 바꾸고 행렬의

† 책임저자 : 정희원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

형태로 정리하면 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{T\} = [c^E]\{S\} - [e]^T\{E\} \quad (3)$$

$$\{D\} = [e]\{S\} + [\epsilon^S]\{E\} \quad (4)$$

여기서, $\{T\}$, $\{S\}$, $\{D\}$, $\{E\}$ 는 각각 응력, 변형률, 전기적 변위, 전기장의 행렬이다. 또한, $[c^E]$, $[e]$, $[\epsilon^S]$ 는 각각 일정한 전기장에서의 강성(stiffness), 압전 응력 상수(piezoelectric stress constant), 일정한 변형률에서의 유전율(permittivity)의 행렬들이며, 이 상수 행렬들은 다음과 같이 표현된다.

$$[c^E] = [s^E]^{-1} \quad (5)$$

$$[e] = [d][c^E] \quad (6)$$

$$[\epsilon^S] = [\epsilon^T] - [e][d]^T \quad (7)$$

여기서 $[s^E]$ 는 일정한 전기장에서의 유연성의 행렬이고, $[d]$ 는 압전 변형률 상수 행렬이며, $[\epsilon^T]$ 는 응력이 일정한 상태에서의 유전율의 행렬이다.

비틀림 변환기의 압전 세라믹은 원주방향으로 분극 처리되고 두께방향으로 전극이 배치된다.⁽³⁾ 이에 대한 좌표 설정에서 r 방향을 2번, θ 방향을 3번, z 방향을 1번 방향으로 하고, $r\theta$ 방향을 4번, θz 방향을 5번, zr 방향을 6번으로 한다.^(7,8) 변환기의 원주방향 비틀림 진동에 대한 전단응력 T_5 와 전기적 변위 D_1 은 식 (3)과 식 (4)로부터 다음과 같이 정리된다.

$$T_5 = c_{55}^E S_5 - e_{15} E_1 \quad (8)$$

$$D_1 = e_{15} S_5 + \epsilon_{11}^S E_1 \quad (9)$$

식 (8)~(9)가 비틀림 진동하는 압전 세라믹에 대한 지배식이다.

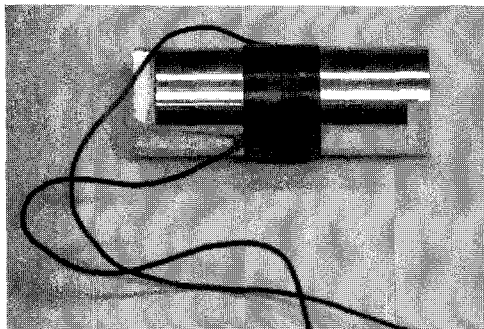


Fig. 1 Bolt-clamped piezoelectric torsional transducer

2.2 운동방정식

단층의 압전 세라믹 원판의 내부를 개략적으로 도시하면 Fig. 2(a)와 같다. 분극 작업 시 전극이 배열되었던 영역과 원주방향으로 분극 된 영역이 교대로 배치되고, 원판의 양쪽 평면에 전극이 설치된다.⁽³⁾ 이러한 변환기를 모델링하면 Fig. 2(b)와 같다.

원통좌표계 (r, θ, z) 에서 위치 좌표와 시간 t 의 함수인 반경방향 변위 u , 원주방향 변위 v , 두께방향 변위 w 와 전기 퍼텐셜 ϕ 로써 식 (8)과 식 (9)를 나타내면, 압전 변환기의 원형단면에 작용하는 전단응력 $\tau_{\theta z}$ 와 전기적 변위 D_z 가 각각 다음과 같다.

$$\tau_{\theta z} = c_{55}^E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (10)$$

$$D_z = e_{15} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \epsilon_{11}^S \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (11)$$

또한, 원주방향의 비틀림 운동만 존재하므로 반경방향 변위 u 와 두께방향 변위 w 는 0이고, 원주방향 변위 v 만 남는다. 그래서 식 (10)과 식 (11)을 다시 정리하면 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\tau_{\theta z} = c_{55}^E \frac{\partial v}{\partial z} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (12)$$

$$D_z = e_{15} \frac{\partial v}{\partial z} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (13)$$

한편, 비틀림 진동에 관한 응력 운동방정식은 원주방향 힘의 평형으로부터 다음과 같이 유도된다.⁽⁹⁾

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (14)$$

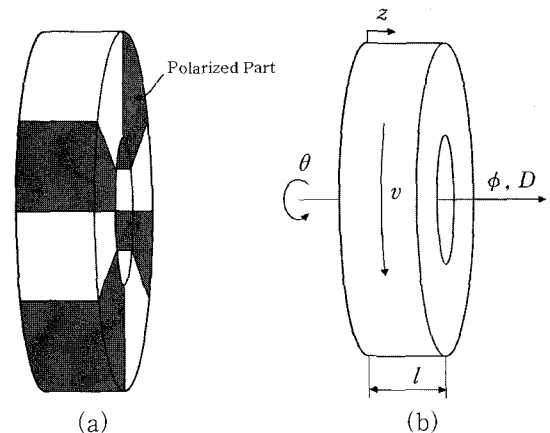


Fig. 2 Piezoelectric disc for torsional transducers

여기서 ρ 는 밀도이다. 또한, 전기적 방정식은 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

식 (15)는 정적(static) 상태를 표현한다. 실제로는 동적(dynamic) 상태이지만, 전자기파의 전파속도가 탄성파의 전파속도에 비해 상당히 크기 때문에 전기적 운동은 역학적 운동에 비해 정적인 상태로 간주되기 때문이다.

식 (12)와 식 (13)을 식 (14)와 식 (15)에 각각 대입하여 정리하면, 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$e_{15} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \epsilon_{11}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (17)$$

여기서 $c(=\sqrt{G/\rho})$ 는 비틀림 파동의 전파속도이며, $G(=c_{55}^E + e_{15}^2/\epsilon_{11}^S)$ 는 압전성이 포함된 전단탄성계수이다. 각주파수 ω 인 전기 신호가 전극에 가해져 생기는 조화진동을 염두에 두고 변수분리를 위해 $v(r, \theta, z, t) = R(r)\Theta(\theta) \cdot \tilde{v}(z)e^{i\omega t}$ 와 $\phi(r, \theta, z, t) = R(r)\Theta(\theta) \tilde{\phi}(z)e^{i\omega t}$ 로 하여, 식 (16)과 식 (17)에 대입하면 $\tilde{v}(z)$ 와 $\tilde{\phi}(z)$ 에 대한 식을 각각 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{dz^2} + k^2 \tilde{v} = 0 \quad (18)$$

$$e_{51} \frac{d^2 \tilde{v}}{dz^2} = \epsilon_{11}^S \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} \quad (19)$$

여기서 $k(=\omega/c)$ 는 파동수이다. 식 (18)과 식 (19)의 해는 각각 다음과 같은 형태로 된다.

$$\tilde{v}(z) = A \sin kz + B \cos kz \quad (20)$$

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} (A \sin kz + B \cos kz) + az + b \quad (21)$$

식 (20)과 (21)의 미정계수는 경계조건에 의해 결정된다.

2.3 특성방정식

압전 비틀림 원판은 두께가 l 이고, 전극에 가해지는 전압 $V_0 e^{i\omega t}$ 에 의해 구동된다. 변환기의 양단이

자유로울 때 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서, } \quad \tilde{\tau}_{\theta z} = 0 \quad (22-a)$$

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (22-b)$$

$$z=l \text{ 에서, } \quad \tilde{\tau}_{\theta z} = 0 \quad (22-c)$$

$$\tilde{\phi} = V_0 \quad (22-d)$$

식 (20)과 식 (21)에 경계조건 (22)를 적용하여 미정계수를 결정하고, $\tilde{v}(z)$ 와 $\tilde{\phi}(z)$ 의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{v}(z) = \frac{V_0 e_{15}}{2 \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} (1 - \cos kl) - Gkl \cos kl} \cdot [\cos k(l-z) - \cos kz] \quad (23)$$

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{V_0}{2 \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} (1 - \cos kl) - Gkl \cos kl} \cdot \left\{ \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} [\cos k(l-z) - \cos kz - \cos kl + 1] - (Gk \sin kl)z \right\} \quad (24)$$

식 (23)과 식 (24)에서 분모를 0으로 하는 특성방정식은 다음과 같다.

$$2 \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} (1 - \cos kl) - Gkl \cos kl = 0 \quad (25)$$

단, $\cos kl \neq 1$ 이다.

압전 원판의 비틀림 진동에 대한 공진 특성을 알아보는 또 하나의 방법으로, 주파수의 함수로 표현되는 임피던스 식을 유도한다. 변환기의 양단이 자유로운 경우의 전기적 변위에 대한 식을 구하기 위해서 식 (23)과 식 (24)를 식 (13)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$D_z = \frac{V_0 \epsilon_{11}^S Gk \sin kl}{2 \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} (1 - \cos kl) - Gkl \sin kl} \quad (26)$$

그리고 전류 I 는 다음과 같이 정의 된다.

$$I = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A D_z da \quad (27)$$

여기서 A 는 압전 원판의 전극 면적이다. 식 (26)

을 식 (27)에 대입하여 적분하고, $Z = V_0/I$ 에 대입하여 임피던스 Z 를 구한다. 이렇게 구해진 임피던스의 크기는 다음과 같다.

$$|Z| = \left| \frac{1}{\omega C} \left(1 - \frac{2e_{15}^2(1 - \cos kl)}{Gkl \epsilon_{11}^S \sin kl} \right) \right| \quad (28)$$

여기서, $C (= \epsilon_{11}^S A/l)$ 는 커패시턴스에 해당한다.

3. 해석 결과 및 고찰

3.1 수치 계산

이 논문에서 실험에 사용한 압전 원판은 미국 EDO사의 EC-65라는 PZT소재로 만들어졌다.⁽³⁾ 이 소재에 대한 물성치^(11,12)를 Table 1에 기재하였고, 이

Table 1 Material properties of PZT (EC-65)

Properties		Values	
Mechanical	Mass density, ρ	$7.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	
	Elastic compliance	s_{11}^E	$15.2 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$
		s_{12}^E	$-5.3 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$
		s_{33}^E	$-5.3 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$
		s_{55}^E	$46.8 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$
Dielectric	Relative permittivity $k_{33}^T (= \epsilon_{33}^T / \epsilon_0)$	1725	
Electro-mechanical	Piezoelectric strain constants	d_{31}	$-173 \times 10^{-12} \text{ C/N}$
		d_{33}	$380 \times 10^{-12} \text{ C/N}$
		d_{15}	$584 \times 10^{-12} \text{ C/N}$

Table 2 Converted properties of PZT(EC-65)

Properties		Values	
Mechanical	Mass density, ρ	$7.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	
	Elastic stiffness	c_{11}^E	$97.6 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
		c_{12}^E	$48.8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
		c_{33}^E	$79.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
		c_{55}^E	$21.4 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Dielectric	Permittivity $\epsilon_{33}^T (= k_{33}^T \epsilon_0)$	$15.2 \times 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}$	
Electro-mechanical	Piezoelectric stress constants	e_{31}	-9.2 C/m^2
		e_{33}	15.4 C/m^2
		e_{15}	12.5 C/m^2

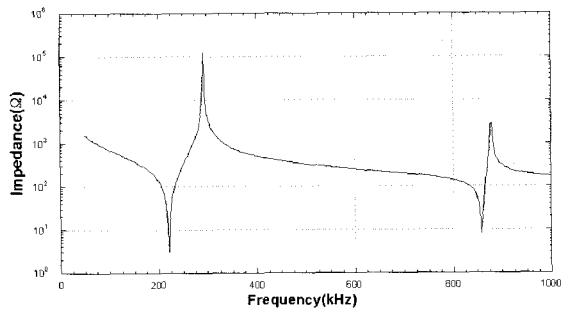
들로부터 환산한 물성치를 Table 2에 정리하였다. 압전체의 크기는 외부 지름 30 mm, 내부 지름 15 mm, 두께 4 mm이며, 원환 형상을 하고 있다. 이들이 수치 계산과 유한요소 해석에 사용되었다.

해석 결과를 확인하기 위하여, 앞 절에 유도된 식들에 Table 2의 물성치와 크기를 대입하여 수치 계산을 하였다. 파동수 k 와 진동수 f 는 다음과 같은 관계가 있다.

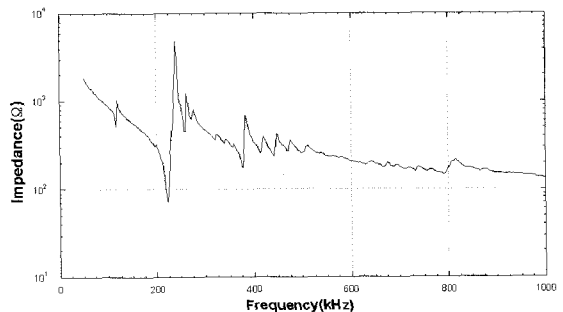
$$f = \frac{kc}{2\pi} \quad (29)$$

식 (28)로부터 진동수 f 의 함수로 임피던스 크기 $|Z|$ 를 계산하고, 그 결과를 Fig. 3(a)에 그래프로 나타내었다. 이 그래프에서 극소점의 위치가 공진주파수이다.

공진주파수는 식 (25)로부터 구할 수도 있다. Mathematica⁽¹³⁾의 FindRoot 기능을 사용하여 근을 구하였고, 파동수 k 와 압전체의 두께 l 이 곱해진 무차원수를 구한 후 진동수 f 를 얻는다. 이렇게 계산된 고유진동수를 Table 3의 'theoretical analysis'에 기재하였고, 원형단면에서의 모드 m 과 원주면에서의 모드 n 으로 구분하였다.



(a) Calculation



(b) Measurement

Fig. 3 Impedance curves

탄성체로 간주하여 해석한 결과와 달리 압전성이 고려된 진동 해석 결과에서는 짝수 차 모드의 결과를 얻을 수 없다. 그것은 식 (25)에서 $\cos kl \neq 1$ 이기 때문에, 강제 진동을 포함하여 짝수 모드의 공진 주파수가 압전 진동 해석에서는 나타나지 않기 때문이다.

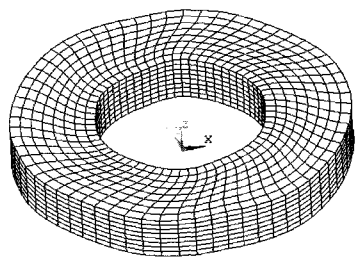
3.2 유한요소해석 결과와 비교

Fig. 2(a)와 같은 변환기를 Fig. 2(b)와 같이 단순화하여 이론적으로 해석한 것이 타당한지 확인하기 위하여, 유한요소 해석으로 비틀림 진동의 공진 주파수를 결정하고 이론적 해석 결과와 비교한다. 유한요소 해석에 ANSYS⁽¹⁴⁾를 이용하였으며, 유한요소 모델은 8 절점 육면체(SOLID5)로 두께방향과 반경방향으로 8등분, 원주방향으로 64등분해서 4096개 요소와 5472개 절점으로 구성되도록 하였다.

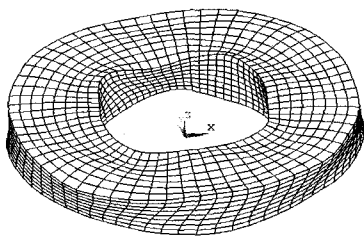
유한요소해석 결과로 얻은 공진주파수를 Table 3

Table 3 Comparison of natural frequencies

Mode (m, n)	Resonance frequency, f (kHz)			
	Theoretical analysis		FEM	Experiment
	Elastic	Piezoelectric	Piezoelectric	
(0, 0)	0	-	-	-
(1, 0)	-	-	129	119
(0, 1)	211	221	228	235
(0, 2)	422	-	-	-



(a) (1, 0) mode



(b) (0, 1) mode

Fig. 4 Mode shapes obtained by FEM

의 'FEM'에 기재하였다. 그리고 이에 해당하는 모드 형상을 Fig. 4에 나타내었다. 여기서 알 수 있다시피, 압전 원판의 원주면에서의 비틀림진동만을 고려하여 모드해석 결과를 살펴보면, (1, 0)모드는 강제 모드처럼 진동하며, (0, 1)모드는 비틀림 진동의 기본 모드이다.

유한요소 모델은 Fig. 2(a)와 같이 8등분하여 4곳만을 선택하여 분극 처리된 압전체와 비압전체가 결합된 구조이다. 이론적 해석에서는 분극 영역을 구분하지 않았는데 (0,1) 모드의 진동수로 계산된 221 kHz는 분극 영역을 제대로 구분한 유한요소해석의 결과인 228 kHz와 매우 유사하다.

3.3 실험결과와 비교

이론적 해석 결과를 확인하기 위해 압전 비틀림 원판을 사용하여 실험을 하였다. Impedance Gain/Phase Analyzer(HP 4194A)를 사용하여 주파수의 함수로 임피던스를 측정된 결과를 Fig. 3(b)에 도시하였다. 이 그래프에서 뚜렷한 극소점 위치인 235 kHz가 해석결과인 221 kHz에 대응된다. 그 외에도 극소점들이 실험 결과에는 나타나지만 비틀림 진동 해석 결과와는 대응하지 않는다. 이 결과들을 Table 3의 'experiment'에 기재하여 계산결과들과 비교하였다.

4. 결 론

비틀림 변환기용 압전 원판의 이방성을 고려한 진동 해석을 하여 특성방정식과 임피던스 식을 유도하였다. 물성치를 대입하여 공진주파수를 계산하고, 유한요소해석 및 실험 결과와 비교하였다.

원주방향으로 균일하게 분극된 압전체를 이론적 해석의 모델로 삼았고, 8등분하여 4곳을 선택하여 분극한 구조를 유한요소해석 모델로 삼았는데, 이론적 해석에 의한 수치계산 결과와 유한요소해석 결과가 유사하게 나타났다. 제작된 압전체로 임피던스 곡선 측정 실험을 통해 공진주파수를 측정된 결과가 해석을 통해 계산한 결과와 잘 맞는 것을 확인하였다. 이와 같이 검증된 해석 결과를 토대로, 두께 방향의 1차 모드 진동의 압전 비틀림 공진주파수를 계산하는 이론적 과정을 정립하였다.

후 기

이 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 이루어 졌습니다.

참 고 문 헌

- (1) Busch-Vishniac, I. J., 1999, Electromechanical Sensors and Actuators, New York, Chapter 5.
- (2) Mishiro, S., 1987, "Torsional Vibration Apparatus", United States Patent 4,652,786
- (3) 권오수, 김진오, 2001, "압전 비틀림 파동 변환기 제작 및 평가", 비파괴검사학회지, 제 21 권, 제 4 호, pp. 434~438.
- (4) 전한용, 김진오, 2002, "원형 봉의 비틀림 진동에 의한 유체 점도 측정 연구", 대한기계학회논문집A, 제 26 권, 제 6 호, pp.1016~1025.
- (5) Ueha, S., Tomikawa, Y., Kurosawa, M., Nakamura, N., 1993, Ultrasonic Motors, Clarendon Press, Oxford, Chapter 4.
- (6) 권오수, 김진오, 2000, "압전 비틀림 변환기의 진동특성 해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 10 권, 제 6 호, pp. 995~962.
- (7) Brissaud, M., Aurelle, N., Roche, D., Richard, C., 1996, "Two-dimensional Model for Shear Piezoceramic Characterization", Ultrasonics, Vol. 34, pp. 83~86.
- (8) IEEE Standard on Piezoelectricity, 1987, ANSI/IEEE Std. 176.
- (9) Graff, K. F., 1991, Wave Motion in Elastic Solids, Dover, New York, Chapter 2.
- (10) Miu, D. K., 1993, Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics, Springer-Verlag, New York, Chapter 6.
- (11) EDO Corporation, 2003, Piezoelectric Ceramic Materials and Shapes, <http://www.edoceramic.com/downloads/downloads.htm>, p. 2.
- (12) 이경희 역, 1991, 세라믹 유전체 공학, 대광문화사, 서울, 제 8장.
- (13) Wolfram, S., 1999, The Mathematica Book, 4th ed., Wolfram Media Inc., Cambridge University Press.
- (14) TaeSung Software & Engineering Inc., 2003, Introduction to Finite Element Analysis using Ansys, 4rd ed, Gye-Lim.