한국소음진동공학회논문집 제 15 권 제 12 호, pp. 1355~1360, 2005.

강성 불균일이 조화가진을 받는 주기적 구조물의 동특성에 미치는 영향

The Effects of the Stiffness Mistuning on the Dynamic Response of Periodic Structures under a Harmonic Force

안 태 길† · A. M. Shkel*
T. K. Ahn and A. M. Shkel

(2005년 9월 12일 접수 ; 2005년 11월 23일 심사완료)

Key Words : Periodic Structure(주기적 구조물), Dynamic Behavior(동적 거동), Stiffness Mistuning(강성 불균일)

ABSTRACT

Periodic structures can be applied as a MEMS(micro-electro-mechanical system) sensor or actuator due to low energy loss and wideband frequency response. The dynamic behavior of a mistuned periodic structure is dramatically changed from that of a perfectly tuned periodic structure. The effects of mistuning, coupling stiffness, and driving point on the forced vibration responses of a simple periodic structure are investigated through numerical simulations. On the basis of that, one can design effective and reliable MEMS components using periodic structures.

1. 서 론

항공기 프로펠러, 터빈 블레이드, 인공위성 안테나와 같이 주기적인 대칭형상을 갖는 기계구조물들이 있다. 주기적 구조물을 구성하고 있는 각 부구조물(substructure)들은 현실적으로 가공오차나 물성의 차이에 의하여 미소하나마 항상 기계적 특성의 차이가 존재하게 된다. 그런데 반복되는 각 부구조물들의 미소한 특성 차이로도 전체 구조물의 동적 거동은 커다란 차이를 보일 수 있다. 이는 진동에너지가 특정 부구조물에 집중되어 예기치 않은 대 변형이나 조기 파손이 발생할 수 있으므로 이에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다.[1~6]

최근에 이러한 주기적 구조물의 공진현상과 주파수 특성을 이용하여 MEMS 소자에 적용하려는 연구가 시도되고 있다. Fig. 1은 기계적 필터에 주기적 구조물이 적용된 한 예이다.[7~8] 이 연구에서는 일반적인 기계시스템에 적용되는 주기적 구조물의 설계 시에 주의하여야 하는 강성 불균일 및 연성강성이 주기적 구조물의 동적 응답에 미치는 영향을 탐색하고자 한다. 이를 위하여 각 부구조물의 물성치 차이 및 연성 정도가 주기적 구조물의 강제 진동에 대한 응답에 미치는 영향을 파악하여 기계시스템에 적용되는 주기적 구조물의 효과적인 설계방안을 제시하고자 한다.

2. 간단한 주기적 구조물의 동특성

주기적 구조물은 반복되는 부구조물이 동일한 강성에 의하여 연결된 구조물이다. 이 연구에서는 이러한 주기적 구조물 중에 가장 간단한 형태인 Fig. 2와 같은 2 자유도계 모형을 이용하여 주기적 구조물의 동적 응답 특성을 살펴보고자 한다. 각 부구조물의 물성치 차이는 강성계수의 차이로 모델링 하였다.

이 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

† 책임저자 : 정회원, 호서대학교 자동차공학과
E-mail : tkahn@office.hoseo.ac.kr
Tel : (041) 540-5812, Fax : (041) 540-5818
* U.C. Irvine, Mech. Eng.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_1+k_c & -k_c \\ -k_c & K_2+k_c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

무차원 변수를 도입하면 이 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+w_{n1}^2\begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \beta+\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서

$$w_{n1}=\sqrt{\frac{K_1}{m}},\ \alpha=\frac{k_c}{K_1},\ \beta=\frac{K_2}{K_1}$$

이 무차원 방정식의 해는 다음과 같다.

$$r_1=\frac{w_1}{w_{n1}}=\left[\frac{1}{2}\{1+\beta+2\alpha-\delta\}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$r_2=\frac{w_2}{w_{n1}}=\left[\frac{1}{2}\{1+\beta+2\alpha+\delta\}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

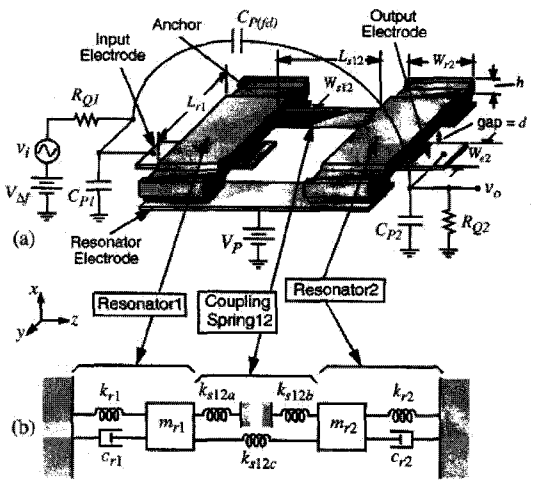


Fig. 1 (a) Schematic diagram of a MEMS filter (b) Equivalent mechanical model

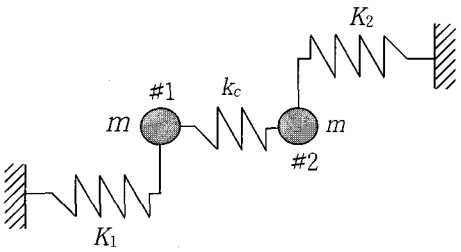


Fig. 2 A simple periodic structure

여기서 $\delta=\sqrt{4\alpha^2+(1-\beta)^2}$ 이고 w_1, w_2는 2자유도계 모형의 고유진동수이다.

이 때의 모달 행렬은 다음과 같다.

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2\alpha}(1-\beta+\delta) & \frac{1}{2\alpha}(1-\beta-\delta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

모달 행렬의 각 열은 각 고유진동수에서의 모드형상을 나타낸다.

2.1 균일한 주기적 구조물의 동특성

주기적 구조물이 균일한 부구조물로 이루어져 있다면 ($\beta=1$), 이 시스템의 무차원 고유진동수 r_1, r_2는 다음과 같다.

$$r_1=1 \quad (6)$$

$$r_2=\sqrt{1+2\alpha} \quad (7)$$

모달 행렬은 다음과 같다.

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (6)과 (7)에서 알 수 있듯이 첫 번째 고유진동수는 부구조물의 강성과 연성 강성의 비인 α와 무관하며, 첫 번째와 두 번째 고유진동수사이의 거리는 α의 영향을 받는다. 또한 첫 번째 모드는 두 질량이 같은 크기와 같은 방향으로 진동하며, 두 번째 모드는 두 질량이 같은 크기지만 반대 방향으로 진동한다.

2.2 불균일한 주기적 구조물의 동특성

불균일한 주기적 구조물의 동특성을 살펴보기 위하여 불균일한 정도를 나타내는 변수, 즉 부구조물들의 강성 비인 β에 대한 무차원 고유진동수의 변화를 살펴보기로 한다 (수식의 단순화를 위하여 무차원 고유진동수의 제곱에 대하여 살펴본다).

$$\frac{\partial(r_1^2)}{\partial\beta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{(1-\beta)}{\delta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{(1-\beta)}{|1-\beta|\sqrt{1+\left(\frac{2\alpha}{1-\beta}\right)^2}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial(r_2^2)}{\partial\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(1-\beta)}{|1-\beta|\sqrt{1+\left(\frac{2\alpha}{1-\beta}\right)^2}} \quad (10)$$

$\beta \gg 1+2\alpha$ 라면 (즉 $\beta > 1$ 이고 $\frac{2\alpha}{\beta-1} \ll 1$), $\frac{\partial(r_1^2)}{\partial\beta} \approx 0$ 이고 $\frac{\partial(r_2^2)}{\partial\beta} \approx 1$ 이 된다. 또한 $\beta \ll 1-2\alpha$ 라면 (즉 $\beta < 1$ 이고 $\frac{2\alpha}{1-\beta} \ll 1$), $\frac{\partial(r_1^2)}{\partial\beta} \approx 1$ 이고 $\frac{\partial(r_2^2)}{\partial\beta} \approx 0$ 이 된다. 이것은 불균일 정도(즉 부구조물들 사이의 강성비, β)가 연성정도(부구조물의 강성과 연성강성의 비, α)에 비하여 커지면 두 무차원 고유진동수중 하나는 불균일 정도의 변화에 무관하게 변화가 없으나, 다른 하나의 무차원 고유진동수 제곱의 변화는 부구조물 강성비의 변화와 같아진다는 의미이다.

모드 형상의 변화를 살펴보면 다음과 같다.

$$\frac{\partial(u_{21})}{\partial\beta} = \frac{1}{2\alpha}\left(-1 - \frac{1-\beta}{|1-\beta|\sqrt{1+\left(\frac{2\alpha}{1-\beta}\right)^2}}\right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial(u_{22})}{\partial\beta} = \frac{1}{2\alpha}\left(-1 + \frac{1-\beta}{|1-\beta|\sqrt{1+\left(\frac{2\alpha}{1-\beta}\right)^2}}\right) \quad (12)$$

$\beta \gg 1+2\alpha$ 라면, $\frac{\partial(u_{21})}{\partial\beta} \approx 0$ 이고 $\frac{\partial(u_{22})}{\partial\beta} \approx -\frac{1}{\alpha}$ 이 된다. 이것은 불균일 정도가 연성강도 비에 비하여 커지면 첫 번째 모드형상은 불균일 정도의 변화와 무관하게 변화가 없으나, 두 번째 모드형상의 변화량은 부구조물 강성비의 변화의 $\frac{1}{\alpha}$ 배 정도가 된다는 의미이며, 결과적으로 1보다 큰 값이다. 또한 $\beta \ll 1-2\alpha$ 라면, $\frac{\partial(u_{21})}{\partial\beta} \approx -\frac{1}{\alpha}$ 이고 $\frac{\partial(u_{22})}{\partial\beta} \approx 0$ 이 된다. 이 경우는 무차원 고유진동수의 경우와 마찬가지로 앞의 경우의 대칭적인 의미이다.

식 (3)을 이용하여, α의 몇 가지 경우에 대하여 β에 대한 무차원 고유진동수 r_1의 변화를 살펴보면 Fig. 3과 같다. 위에서 예상하였듯이, 미소한 α에 대

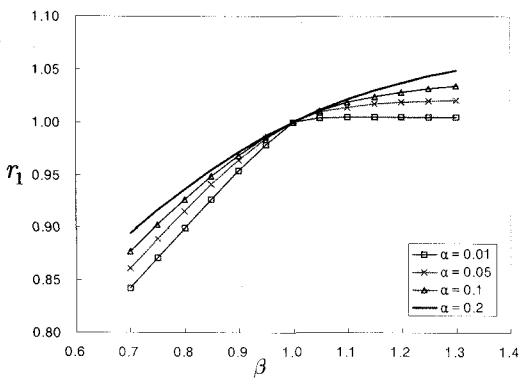


Fig. 3 Frequency ratio r_1 due to β

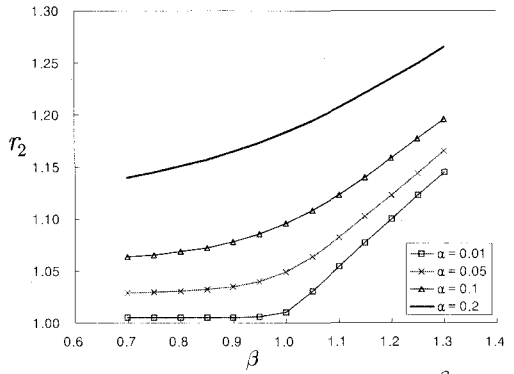


Fig. 4 Frequency ratio r_2 due to β

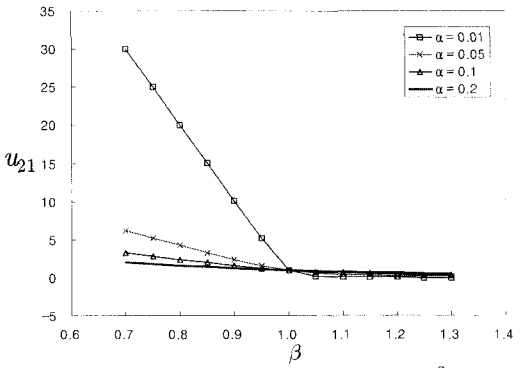


Fig. 5 Mode shape u_{21} due to β

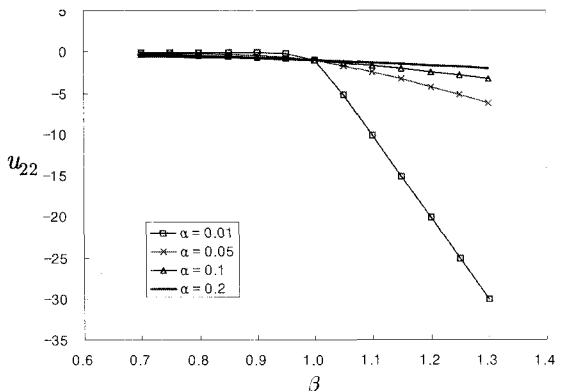


Fig. 6 Mode shape u_{22} due to β

하여 $\beta < 1$ 범위에서 r_1과 β 사이에 선형적인 관계를 보이나 $\beta > 1$ 범위에서는 r_1은 β의 변화와 무관하게 일정한 값을 갖는다.

식 (4) 로부터 r_2의 변화는 Fig. 4와 같으며, r_1과는 β가 1인 점을 기준으로 대칭적인 현상을 보여준다.

식 (5)를 이용하여 모드형상 u_{21}과 u_{22}를 나타낸 것이 Fig. 5와 Fig. 6이다. 전체적인 양상은 무차원 고유진동수와 비슷하나 α가 작을수록 β의 변화에 대하여 큰 진폭 비를 얻을 수 있다. 이것은 주기적 구조물에서 동적 거동의 국부화로 잘 알려진 현상이다.

이상과 같은 주기적 구조물의 특성을 센서의 기능에 적용하면, 즉 측정하고자 하는 물리량의 변화가 한 부구조물의 강성 변화를 유발하도록 하면 주기적 구조물의 고유진동수의 변화와 모드형상의 진폭 비로부터 그 변화량을 측정할 수 있다.

3. 간단한 주기적 구조물의 강제 응답

Fig. 2와 같은 구조물의 강제 응답을 살펴보기 위하여, 각 부구조물에 감쇠 C를 도입하고 각 질량에 동일한 주파수 ω를 갖는 조화 외부 가진력 F를 고려하면 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & K_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

앞에서와 마찬가지로 무차원 변수를 이용하면 이 시스템의 정상상태 동적 응답은 다음과 같이 얻을 수 있다.

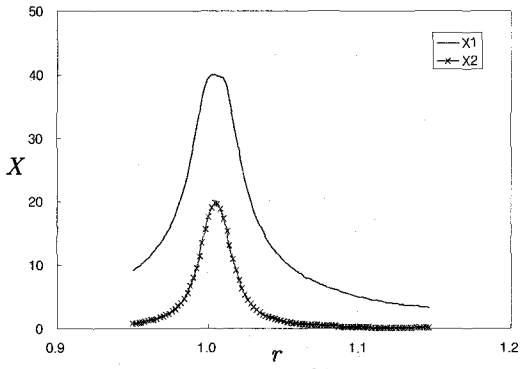
$$\begin{Bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\alpha) - r^2 + j2\zeta r & -\alpha \\ -\alpha & (\beta+\alpha) - r^2 + j2\zeta r \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서 $\zeta = \dfrac{C}{2\sqrt{mK_1}}$, $f_{1,2} = \dfrac{F_{1,2}}{K_1}$, $r = \dfrac{w}{w_{n1}}$ 이고 응답의 크기는 $X = \overline{X}$ 로 구할 수 있다.

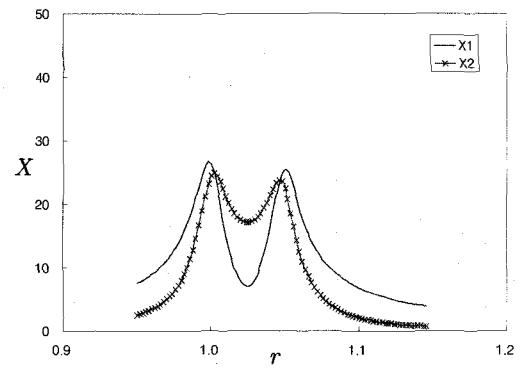
3.1 균일한 주기적 구조물의 강제 응답

우선 연성정도가 균일한 주기적 구조물의 응답 특성에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 #1 질량에만 가진력이 작용하고($f_1 = 1, f_2 = 0$) $\zeta = 0.01$인 경우에 대하여 연성정도에 따른 구조물의 응답을 살펴보았다.

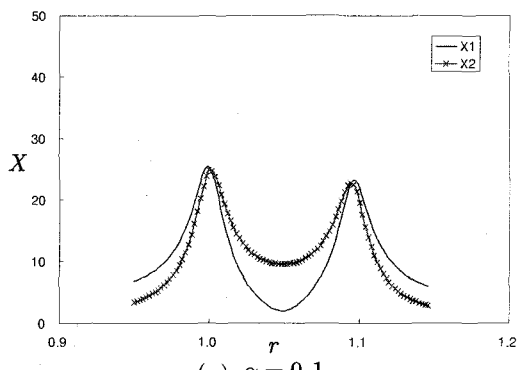
연성정도가 미약한 1 % 경우에 있어서 Fig. 7(a)에서 알 수 있듯이 각 질량의 응답이 큰 차이를 보이고



(a) $\alpha = 0.01$



(b) $\alpha = 0.05$



(c) $\alpha = 0.1$

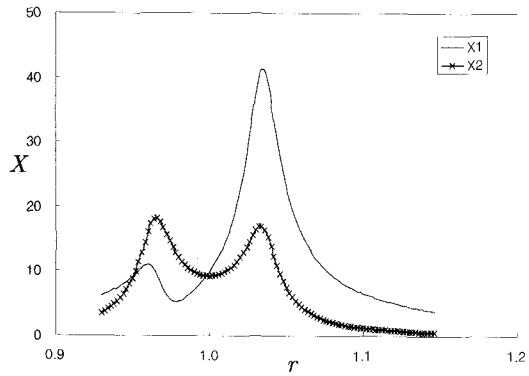
Fig. 7 Forced responses of the tuned system due to α

있으며, 연성정도가 커짐에 따라 각 고유진동수에서 동일한 크기의 응답을 나타낸다. 이것은 주기적 구조물이 균일할지라도 감쇠에 비하여 연성정도가 미약하면 가진 에너지가 다른 부구조물로 전달되지 못하기 때문에 발생하는 현상이다. 따라서 주기적 구조물을 기계적 필터와 같은 소자에 적용하는 경우에 연성정도에 비하여 감쇠가 커지면 구조물이 균일하게 제작되었어도 불균일한 주기적 구조물에서 발생할 수 있는 동적 응답 국부화 현상이 발생할 수 있으므로 주의를 기울여야 한다.

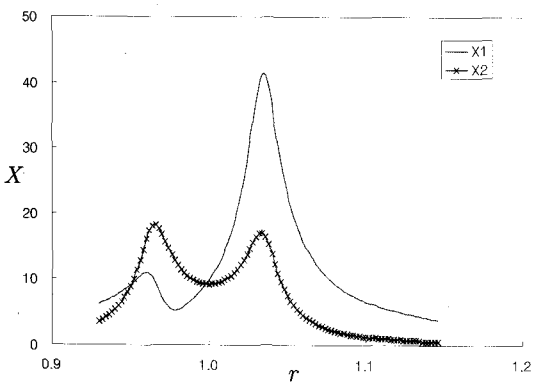
3.2 불균일한 주기적 구조물의 강제 응답

불균일 정도가 주기적 구조물의 응답특성에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 #1 질량에만 가진력이 작용하고 $\alpha = 0.05$, $\zeta = 0.01$인 경우에 대하여 불균일 정도에 따른 구조물의 응답을 살펴보았다.

$\beta = 1.1$인 경우에 식 (3), (4), (5)에서 무차원 고유진동수 r 은 1.015, 1.082 이고 모달 행렬의 u_{21}



(a) $\beta = 1.1$



(b) $\beta = 0.9$

Fig. 8 Forced responses of the mistuned system due to β

은 0.4, u_{22}는 -2.4이다. Fig. 8(a)에서 시스템의 응답을 살펴보면 #1 질량은 첫 번째 고유진동수에서 두 번째 고유진동수보다 응답이 더 큰데 이것은 불균일에 의하여 #1 질량이 포함된 부구조물의 강성이 #2 질량이 포함된 부구조물의 강성보다 적기 때문에 시스템의 첫 번째 고유진동수와 부구조물의 고유진동수가 근사하게 되어 공진현상이 발생하여 나타나는 현상이다. 두 번째 고유진동수에서는 구동되는 부구조물의 고유진동수와 차이가 있으므로 응답이 상대적으로 작아지게 된다. 모드 형상을 살펴보면 첫 번째 고유진동수에서의 두 질량의 변위 비는 이론값과 잘 일치하나 두 번째 고유진동수에서는 이론값과 차이를 보인다. 이것은 구동되는 질량의 변위가 작아지면 감쇠에 의하여 에너지가 다른 부구조물로 충분히 전달되지 못해서 발생되는 현상으로 보인다. Fig. 8(b)는 $\beta = 0.9$인 경우를 나타내는데 (a)의 결과와 대칭되는 현상을 보인다.

결과적으로 가진되는 부구조물의 고유진동수에 가진 주파수가 근접할 때 가진되는 부구조물의 응답이 더 커지며 다른 부구조물에 충분한 운동에너지를 전달하여 시스템의 거동이 이론적인 모드형상과 일치하게 된다. 따라서 주기적 구조물을 센서로 이용할 때 측정하는 물리량과 연관된 부구조물의 강성변화가 기준 부구조물의 강성보다 큰 범위든, 작은 범위든 한 범위를 선택하여 구동 질량의 응답이 최대가 되는 모드를 이용하는 것이 효율적이다.

4. 결 론

주기적 구조물을 기계시스템에 적용할 때에 효과적인 설계를 위하여 연성정도와 불균일 정도에 따른 주기적 구조물의 동적 응답특성을 고찰하였다.

주기적 구조물을 센서로 이용하려면 측정하고자 하는 물리량의 변화가 한 부구조물의 강성 변화를 유발하도록 하여 주기적 구조물의 고유진동수의 변화와 모드형상의 진폭 비로부터 그 변화량을 측정할 수 있다. 이 때 연성정도가 작을수록 강성 변화에 따른 고유진동수의 변화량과 진폭비가 커지게 된다. 또한 구동되는 부구조물의 고유진동수에 근접하는 시스템의 고유진동수로 가진할 때 구동부의 더 큰 응답을 얻을 수 있으며, 연성정도에 비하여 감쇠가 작을수록 이론값에 가까운 결과를 얻을 수 있다.

주기적 구조물을 기계적 필터로 이용하려면 주기적 구조물을 균일하게 제작하여야 하며, 연성정도가 커짐에 따라 공진특성을 보이는 주파수 범위가 증가하지만 균일한 응답특성을 얻기는 어려워진다. 또한 연성정도보다 감쇠가 커지면 균일한 주기적 구조물일지라도 응답의 국부화 특성을 나타낼 수 있다.

후 기

이 논문은 2004년도 호서대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Wei, S. T., 1988, "Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part I: Free Vibrations, Part II: Forced Vibrations," Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 110, pp. 429~449.

(2) Mester, S., 1995, "A Review of Periodic and Near-Periodic Structures," Shock and Vibration, Vol. 2, pp. 69~95.

(3) Mester, S., 1996, "A Parameter Study of Localization," Shock and Vibration, Vol. 3, pp. 1~10.

(4) Yoo, H. H., 2003, "Vibration Localization of Simplified Mistuned Cyclic Structures undertaking External Harmonic Force," Journal of Sound and Vibration, Vol. 261, pp. 859~870.

(5) 김재영 등, 2001, "조화외력을 받는 간단한 주기적 구조물의 동적 응답 국부화", 한국소음진동공학회논문집, 제 11 권, 제 6 호, pp. 175~180.

(6) 강민규 등, 2002, "주기적 순환 구조물의 진동 국부화에 미치는 강성 불균일 및 가진력 위상차의 효과", 대한기계학회 춘계학술대회논문집, pp. 700~705.

(7) Bannon, F. D., 2000, "High-Q HF Microelectromechanical Filters," IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. 35, pp. 512~526.

(8) Nguyen, T. C., 2000, "Mechanical Circuits for Wireless Communications," Proceedings 2000 European Solid-State Device Research Conference, pp. 2~12.