

# 부분 푸리에 영역과 선형 시간-주파수 분포의 옴김 불변 특성

정회원 두락루트피에\*, 준회원 강 현 구\*\*, 정회원 윤 석 호\*\*\*,  
준회원 이 주 미\*\*, 권 형 문\*\*, 최 상 원\*\*, 종신회원 송 익 호\*\*

## Fractional Fourier Domains and the Shift-Invariance Characteristics of Linear Time-Frequency Distributions

Lutfiye Durak\* *Regular Member*, Hyun Gu Kang\*\* *Associate Member*,  
Seokho Yoon\*\*\* *Regular Member*, Jumi Lee\*\*, Hyoungmoon Kwon\*\*,  
Sang Won Choi\*\* *Associate Member*, Iickho Song\*\* *Lifelong Member*

### 요 약

시간 영역과 주파수 영역을 사이의 공간을 뜻하는 부분 푸리에 영역으로 (fractional Fourier domains) 선형 시간-주파수 분포의 옴김 불변 특성을 일반화한다. 다른 선형 시간-주파수 분포와 달리 짧은 시간 푸리에 변환은 (short time Fourier transform: STFT) 부분 푸리에 영역에서 크기 (magnitude-wise) 옴김 불변을 지니는데, 이 짧은 시간 푸리에 변환을 쓰면 분포를 좀더 쉽게 해석할 수 있다. 특히, 부분 푸리에 영역에서 크기 옴김 불변인 선형 분포는 짧은 시간 푸리에 변환뿐이라는 것을 밝힌다.

**Key Words** : short time Fourier transform, shift-invariance, linear distribution, time-frequency, distribution, fractional Fourier transform.

### ABSTRACT

In this paper, we generalize the shift-invariance properties of linear time-frequency distributions to the fractional Fourier domains that interpolate between the time and frequency domains. Magnitude-wise shift invariance in arbitrary fractional Fourier domains distinguishes the short-time Fourier transform (STFT) among all linear time-frequency distributions and simplifies the interpretation of the resultant distribution. We prove that the STFT is the only linear distribution that satisfies the magnitude-wise shift-invariance property in the fractional Fourier domains.

### I. 머리말

신호의 시간-주파수 성분 특성을 나타내거나 시 변 주파수 성분이 있는 신호를 분석, 처리, 합성할 때 신호를 변환하여 시간-주파수 영역에서 자주 다

룬다. 이때, 가장 널리 쓰이는 시간-주파수 분포 가운데 하나가 짧은 시간 푸리에 변환이다<sup>[1]</sup>. 낮은 대역 단위 에너지 창문함수를  $h(t)$ 라 하면 시간 함수  $x(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환은

\* 일디즈 대학교 (lutfiye.durak@gmail.com)

\*\* 한국과학기술원 전자전신학과 ({lkhg, jmlee, kwon, swchoi}@Sejong.kaist.ac.kr, i.song@ieee.org)

\*\*\* 성균관대학교 정보통신공학부 (syoon@ece.skku.ac.kr)

논문번호 : KICS2005-02-062, 접수일자 : 2005년 2월 5일

※이 논문은 과학기술부에서 지원하고 한국과학재단이 주관하는 국가지정연구실 사업의 지원을 받아 연구한 것입니다.

$$\text{STFT}_x(t, f) = \int x(t')h^*(t-t')e^{-j2\pi ft'} dt' \quad (1)$$

로 뜻매김할 수 있다.

짧은 시간 푸리에 변환은 시간 영역과 주파수 영역 모두에서 선형이고 율김 불변인 분포이다. 시간 율김 또는 주파수 율김은 신호의 위치만 바꿀 뿐, 신호의 시간-주파수 성분은 바꾸지 않으므로, 시간-주파수 분포가 시간 영역과 주파수 영역에서 율김 불변인지 아닌지는 매우 중요한 성질이다. 율김 불변인 시간-주파수 분포를 쓰면 분포를 간단히 해석할 수 있을 뿐만 아니라, 시간-주파수 영역 전체에서 해상도가 일정하도록 신호를 분석할 수 있다. 시간 영역과 주파수 영역에서의 율김 불변 특성은 시간 영역과 주파수 영역 사이에 있는 공간을 뜻하는 부분 푸리에 영역에서의 율김 불변 특성으로 일반화할 수 있다.

가장 많이 쓰는 위그너 분포를 (Wigner distribution) 포함하는 2차 분포 집합인 코헨 집합은 (Cohen's class)<sup>[2]</sup> 시간영역과 주파수 영역에서 율김 불변이다. 한편, 선형 분포 가운데에서는 짧은 시간 푸리에 변환만이 시간 영역과 주파수 영역에서 크기 율김 불변임이 알려져 있고, 2차 분포 가운데에서는 위그너 분포만이 부분 푸리에 영역에서 율김 불변 특성을 만족시킨다는 것이 알려져 있다<sup>[3]</sup>.

한편, 부분 푸리에 변환은 신호처리 뿐만 아니라 광학, 양자역학, 회절이론, 광 전달, 광학 신호처리와 같은 곳에서도 많이 쓴다<sup>[4,7]</sup>. 보기를 들면, [8]에서는 연속 시간 선형 부분 율김 불변 시스템을 수식으로 나타내었다.

이 논문에서는 선형 시간-주파수 분포에서 일반화된 크기 율김 불변 특성을 다룬다. 가장 일반적인 선형 분포에서 시작하여, 부분 푸리에 영역에서 크기 율김 불변인 선형 시간-주파수 분포를 찾아, 부분 푸리에 영역에서 크기 율김 불변인 선형 분포는 짧은 시간 푸리에 변환뿐만 아니라 이 논문에서 얻은 선형 시간-주파수 분포와 부분 푸리에 변환 사이의 관계는 실제 신호 해석과 설계 기술에 널리 응용할 수 있을 것이다.

## II. 부분 푸리에 변환과 부분 영역 율김 불변

시간 함수  $x(t)$ 의  $a$ 차 부분 푸리에 변환은

$$\begin{aligned} x_a(t) &= F^a\{x(t)\} \\ &= \int B_a(t, t')x(t')dt', \quad -2 < a < 2 \end{aligned} \quad (2)$$

인데<sup>[1]</sup>, 여기서

$$\begin{aligned} B_a(t, t') &= \frac{\exp\left\{-\frac{j\pi}{4}\{a + \text{sgn}(a)\}\right\}}{|\sin \phi|^{1/2}} \\ &\cdot \exp\{j\pi(t^2 \cot \phi - 2t't \csc \phi + t'^2 \cot \phi)\} \end{aligned} \quad (3)$$

은  $a$ 차 부분 푸리에 변환 핵이고 (kernel),  $\text{sgn}(\cdot)$ 은 부호함수이다. 곧,  $a$ 차 부분 푸리에 영역이란  $a$ 차 부분 푸리에 변환된 신호들이 이루는 공간을 뜻하는데,  $a=0$ 일 때 부분 푸리에 영역은 시간 영역을,  $a=1$ 일 때의 부분 푸리에 영역은 주파수 영역을 나타낸다. 부분 푸리에 영역의 보기로 그림 1에  $a_0$ 차 부분 푸리에 영역을 시간-주파수 평면에 나타내었다.

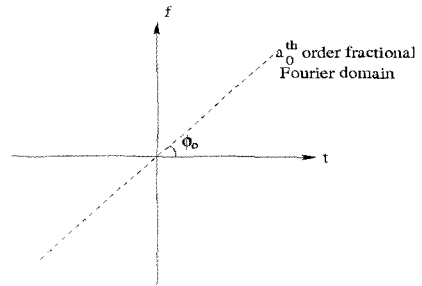


그림 1.  $a_0$ 차 부분 푸리에 영역 축은 시간 영역 축과 각  $\phi_0 = a_0\pi/2$ 를 이룬다고 나타낼 수 있다.

그림 1에서 볼 수 있듯이 부분 푸리에 영역은 시간-주파수 평면에서 시간 축과 어떤 각을 이루는 영역 연속체로 (continuum of domains) 뜻매김할 수 있다. 이때,  $a$ 차 부분 푸리에 변환은 시간 축에서 반시계 방향으로  $\phi = a\pi/2$ 만큼 기울인  $a$ 차 부분 푸리에 영역으로 신호를 변환한다. 곧, 1차 부분 푸리에 변환은 널리 쓰이는 푸리에 변환과 같고, 0차 부분 푸리에 변환은 함수 자신을 가리킨다. 일반적으로,  $a$ 차 부분 푸리에 변환은 함수가 가리키는 영역과 푸리에 변환이 가리키는 영역 사이로 함수를 변환한다. 한편, [9]에서는 부분 푸리에 변환을 구현할 수 있도록 연속시간 함수의 이산 표본을 써서  $O(\text{Log}N)$ 번 계산으로 부분 푸리에 변환을 어렵할 수 있는 빠른 계산 알고리즘을 다루었다. 특히, 부분 푸리에 변환 연산자  $F^a$ 는  $F^{a_1}F^{a_2} = F^{a_1+a_2}$ 를 만족시키고,  $n$ 이 정수이면  $F^{4n}$ 은 같음 (identity) 연산자  $I$ 이므로, (2)에서 뜻매김한 부분 푸리에 변

환을  $|d| > 2$ 일 때에도 생각할 수 있다.

이제, 변환 핵이  $K(t, f, t')$ 일 때 일반적인 선형 시간-주파수 분포

$$D_x(t, f) = \int K(t, f, t')x(t')dt' \quad (4)$$

를 생각하자. 선형 시간-주파수 분포 (4)에서

$$|D_{x_s}(t, f)| = |D_x(t - \rho \cos \phi, f - \rho \sin \phi)| \quad (5)$$

이면 이 선형 시간-주파수 분포를 부분 영역 옮김 불변이라 한다. 여기서,  $x_{s_s}(t) = S_{\phi, \rho}\{x\}(t)$ 는 부분 영역 옮김 연산자

$$S_{\phi, \rho} = F^{-a} S_{0, \rho} F^a \quad (6)$$

을 써서 신호  $x(t)$ 를  $a$ 차 부분 푸리에 영역에서  $\rho$ 만큼 옮긴 것이고,  $\rho$ 는  $a$ 차 부분 푸리에 영역에서 옮김값이다. 한편, (6)에서 연산자  $S_{0, \rho}$ 는

$$\begin{aligned} S_{0, \rho}\{x\}(t) &= \delta(t - \rho) * x(t) \\ &= x(t - \rho) \end{aligned} \quad (7)$$

로 뜻매김한다. 곧, (6)과 (7)을 바탕으로 신호  $x(t)$ 를  $a$ 차 부분 푸리에 영역에서  $\rho$ 만큼 옮긴  $x_{s_s}(t) = S_{\phi, \rho}\{x\}(t)$ 를 구체적으로 얻으면

$$\begin{aligned} x_{s_s}(t) &= S_{\phi, \rho}\{x\}(t) \\ &= F^{-a} S_{0, \rho}\{F^a\{x\}\}(t) \\ &= F^{-a}\{\delta(t - \rho) * x_a(t)\} \\ &= e^{-j\pi(\rho^2 \sin \phi \cos \phi - 2t\rho \sin \phi)} x(t - \rho \cos \phi) \end{aligned} \quad (8)$$

이다.

### III. 부분 푸리에 영역에서 선형 옮김 불변 시스템

**정리 1:** 선형 시스템  $T$ 가 부분 푸리에 영역에서 크기 옮김 불변이면, 입력이  $x(t)$ 일 때 이 시스템  $T$ 의 출력을 아래와 같이 쓸 수 있는 함수  $\tilde{x}(t)$ 와  $h(t)$ 가 있다.

$$T\{x\}(t) = e^{j\theta(t)} [h(t) * x(t)]. \quad (9)$$

**증명:** 선형 시스템  $T$ 의 핵을  $K(\cdot, \cdot)$ 라 두고

리즈 (Riesz) 정리를 [10] 쓰면, 입력이  $x(t)$ 일 때 출력은

$$T\{x\}(t) = \int K(t, t')x(t')dt' \quad (10)$$

이다. 따라서, 입력이 충격함수  $\delta(t)$ 이면 시스템  $T$ 의 출력은

$$\begin{aligned} y(t) &= T\{\delta\}(t) \\ &= \int K(t, t')\delta(t')dt' \\ &= K(t, 0) \end{aligned} \quad (11)$$

이고, 입력이  $\delta_{s_s}(t) = S_{\phi, \rho}\{\delta\}(t)$ 이면 시스템  $T$ 의 출력은 (8)과 (10)에서

$$\begin{aligned} y_{s_s}(t) &= T\{S_{\phi, \rho}\{\delta\}\}(t) \\ &= \int K(t, t')e^{-j\pi(\rho^2 \sin \phi \cos \phi - 2t'\rho \sin \phi)} \\ &\quad \cdot \delta(t' - \rho \cos \phi) dt' \\ &= e^{j\pi\rho^2 \cos \phi \sin \phi} K(t, \rho \cos \phi) \end{aligned} \quad (12)$$

이다. 이제, 시스템  $T$ 가 부분 푸리에 영역에서 크기 옮김 불변이면 (5)에서

$$|S_{\phi, \rho}\{T\{x\}\}(t)| = |T\{S_{\phi, \rho}\{x\}\}(t)| \quad (13)$$

인데, 이 식에서  $x(t)$ 를  $\delta(t)$ 로 두고 (11)과 (12)를 쓰면

$$|S_{\phi, \rho}\{K(t, 0)\}(t)| = |e^{j\pi\rho^2 \cos \phi \sin \phi} K(t, \rho \cos \phi)| \quad (14)$$

이고 위 식의 왼쪽에 (8)을 쓰면

$$|K(t - \rho \cos \phi, 0)| = |K(t, \rho \cos \phi)| \quad (15)$$

이다. 그런데, 시스템  $T$ 의 핵은 일반적으로

$$K(t, t') = e(t, t')e^{j\theta(t, t')} \quad (16)$$

과 같이 크기함수  $e(t, t')$ 와 위상함수  $\theta(t, t')$ 로 쓸 수 있는데, (15)는  $e(t, t) = e(t - t)$ 임을 뜻하므로, 시스템  $T$ 의 핵을

$$K(t, t) = e(t - t)e^{j\theta(t, t)} \quad (17)$$

로 쓸 수 있다.

다음에, 위 (17)에 나온 위상함수  $\theta(t, t')$ 를

$$\theta(t, t') = -\Psi(t-t') + \hat{\theta}(t) \quad (18)$$

과 같이 쓸 수 있음을 보이자. 충격함수의 선형 조합인  $x(t) = a_1\delta(t) + a_2S_{\phi, \tau}\{\delta\}(t)$ 가 입력일 때 시스템  $T$ 의 출력  $y(t)$ 는 (11)과 (12)에서

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 T\{\delta\}(t) + a_2 T\{S_{\phi, \tau}\{\delta\}\}(t) \\ &= a_1 K(t, 0) + a_2 e^{j\pi\tau^2 \sin\phi \cos\phi} K(t, \tau \cos\phi) \end{aligned} \quad (19)$$

이다. 한편,  $x(t) = a_1\delta(t) + a_2S_{\phi, \tau}\{\delta\}(t)$ 를  $a$ 차 부분 푸리에 영역에서  $\rho$ 만큼 옮긴  $x_{s_a}(t) = S_{\phi, \rho}\{x\}(t)$ 가 입력이면 시스템  $T$ 의 출력  $y_{s_a}(t)$ 는 (12)에서

$$\begin{aligned} y_{s_a}(t) &= T\{S_{\phi, \rho}\{x\}\}(t) \\ &= a_1 T\{S_{\phi, \rho}\{\delta\}\}(t) + a_2 T\{S_{\phi, \rho+\tau}\{\delta\}\}(t) \\ &= a_1 T\{x_{s_a}\}(t) + a_2 T\{S_{\phi, \tau}\{x_{s_a}\}\}(t) \\ &= a_1 e^{j\pi\rho^2 \sin\phi \cos\phi} K(t, \rho \cos\phi) \\ &\quad + a_2 e^{j\pi(\rho+\tau)^2 \sin\phi \cos\phi} K(t, (\rho+\tau) \cos\phi) \end{aligned} \quad (20)$$

이다. 이제, 시스템  $T$ 가 크기 옮김 불변이므로  $|y_{s_a}(t)| = |S_{\phi, \rho}\{y\}(t)|$ 이고, (8), (19), (20)에서 핵은

$$\begin{aligned} &|a_1 e^{j\pi\rho^2 \sin\phi \cos\phi} K(t, \rho \cos\phi) \\ &\quad + a_2 e^{j\pi(\rho+\tau)^2 \sin\phi \cos\phi} K(t, (\rho+\tau) \cos\phi)| \\ &= |a_1 e^{-j\pi\rho^2 \sin\phi \cos\phi + j2\pi\rho \cos\phi} K(t-\rho \cos\phi, 0) \\ &\quad + a_2 e^{j\pi(\tau^2 - \rho^2) \sin\phi \cos\phi + j2\pi\rho \sin\phi} \\ &\quad \cdot K(t-\rho \cos\phi, \tau \cos\phi)| \end{aligned} \quad (21)$$

을 만족시킨다. 이때, 식 (17)을 (21)에 쓰면

$$\begin{aligned} &|a_1 e^{j\pi\rho^2 \sin\phi \cos\phi} e^{j\theta(t-\rho \cos\phi)} e^{j\theta(t, \rho \cos\phi)} \\ &\quad + a_2 e^{j\pi(\rho+\tau)^2 \sin\phi \cos\phi} e^{j\theta(t-(\rho+\tau) \cos\phi)} \\ &\quad \cdot e^{j\theta(t, (\rho+\tau) \cos\phi)}| \\ &= |a_1 e^{-j\pi\rho^2 \sin\phi \cos\phi + j2\pi\rho \cos\phi} e^{j\theta(t-\rho \cos\phi)} \\ &\quad \cdot e^{j\theta(t-\rho \cos\phi, 0)} \\ &\quad + a_2 e^{j\pi(\tau^2 - \rho^2) \sin\phi \cos\phi + j2\pi\rho \sin\phi} \end{aligned}$$

$$\cdot e^{j\theta(t-(\rho+\tau) \cos\phi)} e^{j\theta(t-\rho \cos\phi, \tau \cos\phi)}| \quad (22)$$

를 얻는데, 여기서,  $e(t)$ 가 0이 아니라 두면,  $t, \rho, \tau$ 를 어떻게 잡더라도 (22)를 만족시키려면

$$\begin{aligned} &[\pi\rho^2 \sin\phi \cos\phi + \theta(t, \rho \cos\phi)] \\ &\quad - [2\pi\rho \sin\phi - \pi\rho^2 \sin\phi \cos\phi + \theta(t-\rho \cos\phi, 0)] \\ &= [\pi(\rho+\tau)^2 \sin\phi \cos\phi + \theta(t, (\rho+\tau) \cos\phi)] \\ &\quad - [\pi(\tau^2 - \rho^2) \sin\phi \cos\phi + 2\pi\rho \sin\phi \\ &\quad + \theta(t-\rho \cos\phi, \tau \cos\phi)] \end{aligned} \quad (23)$$

이어야 한다. 식 (23)을 간단히 하면,

$$\begin{aligned} &\theta(t, \rho \cos\phi) - \theta(t-\rho \cos\phi, 0) \\ &= \theta(t, (\rho+\tau) \cos\phi) - \theta(t-\rho \cos\phi, \tau \cos\phi) \\ &\quad + 2\pi\rho \sin\phi \cos\phi \end{aligned} \quad (24)$$

가 된다. 이제,  $\theta(t, t')$ 가 (24)를 만족시킨다고 두면,  $\frac{\partial \theta(t, t')}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} \theta(t, t')$ 인  $\psi(t, t')$ 이 존재함을 보일 수 있다. 따라서,  $\tau \rightarrow 0$ 일 때 (24)는

$$\begin{aligned} \psi(t, \rho \cos\phi) &= \psi(t-\rho \cos\phi, 0) \\ &= \psi(t-\rho \cos\phi) \end{aligned} \quad (25)$$

를 뜻하므로,  $\theta(t, t')$ 가

$$\frac{\partial}{\partial t'} \theta(t, t') = \psi(t-t') \quad (26)$$

을 만족시키고 이를 풀면

$$\theta(t, t') = -\Psi(t-t') + \hat{\theta}(t) \quad (27)$$

이다. 여기서,  $\psi(t) = \frac{d}{dt} \Psi(t)$ 이고 위상함수  $\hat{\theta}(t)$ 는 어떻게든 잡을 수 있다. 곧 (17)과 (27)에서 시스템  $T$ 의 핵은

$$K(t, t') = e(t-t') e^{-j\Psi(t-t')} e^{j\hat{\theta}(t)} \quad (28)$$

과 같이 쓸 수 있고, 부분 영역 옮김 불변 특성을 만족시키는 선형 시스템의 입력과 출력 관계는

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int K(t, t')x(t')dt' \\
 &= \int e(t-t')e^{-j\omega(t-t')}e^{j\tilde{\theta}(t)}x(t')dt' \quad (29) \\
 &= e^{j\tilde{\theta}(t)}[h(t) * x(t)]
 \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. (증명 끝)

정리 1을 어떠한 두 변수 분포  $D_x(t, f)$ 에서도 말할 수 있다. 곧, (4)에서 뜻매김한 두 변수 선형 분포  $D_x(t, f)$ 가 변수  $t$ 에서 크기 옮김 불변이면

$$D_x(t, f) = e^{j\tilde{\theta}(t, f)} \int x(t-t', f)x(t')dt' \quad (30)$$

이다.

시간-주파수평면에서 신호의 에너지 분포와 관계 있는 것은 시간-주파수 분포의 크기이므로, 앞으로는  $e^{j\tilde{\theta}(t, f)}$ 를 생각하지 않도록 한다. 이제, 시간 변수  $t$ 와 주파수 변수  $f$ 의 관계를 써서, 부분 푸리에 영역에서 크기 옮김 불변인 분포는 짧은 시간 푸리에 변환뿐만 아니라

**정리 2:** 선형 분포 가운데, 모든 부분 푸리에 영역에서 크기 옮김 불변인 분포는 짧은 시간 푸리에 변환뿐이다.

**증명:** 어떤 분포가 부분 푸리에 영역에서 옮김 불변이면 (30)과 같은 꼴이어야 하므로 크기 옮김 불변 성질을 주파수영역에서 다룰 수 있다. 이제,  $x(t)$ 의 푸리에 변환을  $X(f)$ 라 두고, 앞에서 말한 것처럼 위상 함수  $e^{j\tilde{\theta}(t)}$ 는 분포  $D_x(t, f)$ 의 크기를 바꾸지 않으므로 생각하지 않으면, (30)을

$$\begin{aligned}
 D_x(t, f) &= \int x(t-t', f) \int X(f')e^{j2\pi f' t'} df' dt' \\
 &= e^{j2\pi f t} \int \Gamma(f, f')e^{-j2\pi(f-f')t} X(f') df' \quad (31)
 \end{aligned}$$

과 같이 다시 쓸 수 있다. 여기서,  $\Gamma(f, f')$ 는

$$\Gamma(f, f') = \int x(t', f)e^{-j2\pi f' t'} dt' \quad (32)$$

이다. 그런데, 분포  $D_x(t, f)$ 가 주파수 영역에서 크기 옮김 불변이면

$$\Gamma(f, f') = G(f-f')e^{j\tilde{\theta}(f)} \quad (33)$$

이어야 하므로, (32)와 (33)에서

$$\begin{aligned}
 &\int G(f-f')e^{j\tilde{\theta}(f)}e^{j2\pi f' t'} df' \\
 &= \int \int x(t'', f)e^{j2\pi f' t''} dt'' e^{j2\pi f' t'} df' \quad (34) \\
 &= \int \int x(t'', f)e^{j2\pi f' (t''-t')} dt'' df' \\
 &= x(t, f)
 \end{aligned}$$

이다. 따라서, 함수  $G(f)$ 의 역 푸리에 변환을  $g(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 x(t, f) &= e^{j\tilde{\theta}(f)} \int G(f-f')e^{j2\pi f' t'} df' \\
 &= g(-t)e^{j2\pi f t} e^{j\tilde{\theta}(f)} \quad (35)
 \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. 앞서서도 말한 것처럼 위상함수  $e^{j2\pi f t}$ 와  $e^{j\tilde{\theta}(f)}$ 는 분포  $D_x(t, f)$ 의 크기를 바꾸지 않으므로 생각하지 않는다. 그러면, 크기 옮김 불변 선형 시간-주파수 분포는

$$D_x(t, f) = \int g(t-t)x(t')e^{-j2\pi f t'} dt' \quad (36)$$

이라 쓸 수 있다. 식 (36)은 핵이  $g(t)$ 인 짧은 시간 푸리에 변환 (1)과 같은 꼴이다. 곧, 선형 분포 가운데에서 짧은 시간 푸리에 변환만이 모든 부분 푸리에 영역에서 선형이고 크기 옮김 불변이다. (증명 끝)

한편, 함수  $D(u, v)$ 의 회전연산자를

$$\begin{aligned}
 R_\phi\{D(u, v)\} \\
 = D(u \cos \phi + v \sin \phi, -u \sin \phi + v \cos \phi) \quad (37)
 \end{aligned}$$

이라 둘 때,  $x(t)$ 를 어떻게 잡더라도 시간-주파수 분포  $D_x(t, f)$ 가

$$|D_{x_\phi}(t, f)| = |R_{-\phi}\{D_x(t, f)\}| \quad (38)$$

이면 이 시간-주파수 분포는 회전특성을 만족시킨다고 한다<sup>[11]</sup>. 회전특성은 다음과 같은 까닭에서 실제로 매우 중요하다<sup>[12]</sup>. 곧, 어떤 분포가 회전특성을 만족시키면 신호의 시간-주파수 영역 특성은 어떤 부분 푸리에 영역에서도 바뀌지 않는다는 것이다.

따라서, 신호를 시간 영역과 주파수 영역에 나타내거나 어떤 부분 푸리에 영역에 나타내어도 마찬가지이다. 그런데, [3]에서 시간-주파수 분포의 회전특성을 만족시키는 옮김 불변 분포는 에르미트-가우스 (Hermit-Gaussian) 핵을 쓴 짧은 시간 푸리에 변환뿐만 아니라

와 합치면, 부분 푸리에 영역에서 선형이며 움직임 불변인 시간-주파수 분포 가운데, 회전특성을 만족시키는 변환은 에르미트-가우스 핵을 쓴 짧은 시간 푸리에 변환이라는 것을 알 수 있다.

#### IV. 보기

먼저, 시간과 주파수는 다른 단위이므로, 계산하기에 앞서서 시간-주파수 평면의 차원을 표준화해야 (scaling) 한다. 시간-주파수 영역에서 신호를 시간 영역 구간  $[-\Delta t/2, \Delta t/2]$ 과 주파수 영역은 구간  $[-\Delta f/2, \Delta f/2]$  안에서 나타낸다고 하자. 그러면, 차원이 시간인 표준화 변수  $s$ 를 써서 시간과 주파수를 각각  $t/s$ 와  $f/s$ 로 표준화한 새로운 좌표 변수를 쓸 수 있다. 이때, 신호는  $t/s$ 축에서 본 길이가  $\Delta t/s$ 이고  $f/s$ 축에서 본 길이는  $\Delta f/s$ 인 영역에 나타난다. 따라서,  $s = \sqrt{\Delta t/\Delta f}$ 로 잡으면  $t/s$ 축에서 본 길이와  $f/s$ 축에서 본 길이가 둘 다  $\sqrt{\Delta t \Delta f}$ 로 같고 차원이 없다. 수치 보기에서는, 신호를  $t/s$ 축이나  $f/s$ 축에서 사이가  $1/\sqrt{N}$ 인 표본  $N = \Delta t \Delta f$ 개로 꽤 잘 어림할 수 있다. 이 논문에서는, 신호를 차원 표준화했다고 두고, 모든 좌표를 차원이 없는 양으로 나타내었다.

짧은 시간 푸리에 변환의 부분 푸리에 영역 움직임 불변 특성을 그림 2에 나타내었다. 이 그림은 신호가 여러 성분 주파수가 빠르게 바뀌는 (chirp) 신호인

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left\{\frac{\pi t^2}{18}\right\} \cdot \sum_{k=1}^2 \exp\{j\pi \tan^{-1}(\phi_k) t^2\} \quad (39)$$

일 때인데  $\phi_1 = \pi/6$ 이고  $\phi_2 = -\pi/6$ 이다. 신호  $x(t)$ 와  $x(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환을 그림 2(a)와 (b)에 각각 보였다. 신호  $x(t)$ 를 차수  $a=0.5$ 인 (곧,  $\phi = \pi/4$ 인) 부분 푸리에 영역에서  $\rho=4$ 만큼 옮긴 신호  $S_{\phi, \rho}\{x\}(t)$ 와  $S_{\phi, \rho}\{x\}(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환을 그림 2(c)와 (d)에 보였다. 이 그림에서  $x(t)$ 는 차수  $a=0.5$ 인 부분 푸리에 영역에서 위치만 바뀌었을 뿐, 그 시간-주파수 성분은 처음과 마찬가지로 하는 것을 알 수 있다.

짧은 시간 푸리에 변환의 회전특성은 그림 3과 4에 나타나 있다. 신호  $x(t)$ 와 핵이  $h(t) = \exp\{-\pi t^2/3\}$ 일 때  $x(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환을 그림 3(a)와 (c)에 각각 보였다. 비슷하게, 신호

$x_{0.5}(t)$ 와 핵이  $h(t) = \exp\{-\pi t^2/3\}$ 일 때  $x_{0.5}(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환을 그림 3(b)와 (d)에 각각 보였다. 이 그림에서  $h(t) = \exp\{-\pi t^2/3\}$ 을 핵으로 쓰면 회전특성을 만족시키지 못한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 곧,  $x_{0.5}(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환은  $x(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환을 돌린 꼴이 아니다. 한편, 그림 4에서 보인 것처럼, 에르미트-가우스 핵  $h_0(t) = \exp\{-\pi t^2\}$ 을 쓰면 회전특성을 얻을 수 있다. 곧, 핵이  $h_0(t) = \exp\{-\pi t^2\}$ 일 때  $x_{0.5}(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환은  $x(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환을  $\phi = \pi/4$ 만큼 돌린 꼴임을 그림 4(a)와 (b)에서 바로 알 수 있다.

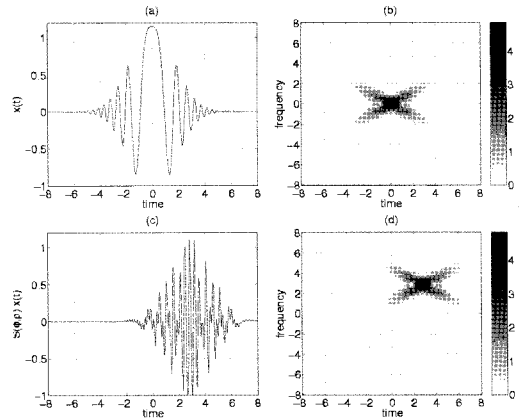


그림 2. (a) 신호  $x(t)$ . (b) 신호  $x(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환. (c)  $a=0.5$ 이고  $\rho=4$ 일 때 신호  $S_{\phi, \rho}\{x\}(t)$ . (d)  $S_{\phi, \rho}\{x\}(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환.

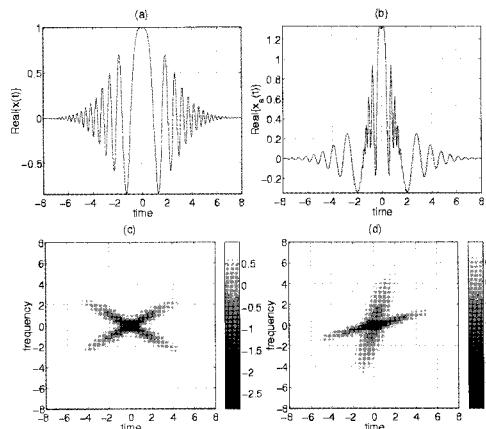


그림 3. (a) 신호  $x(t)$ 의 실수 부분. (b) 신호  $x_{0.5}(t)$ 의 실수 부분. (c) 핵이  $h(t) = e^{-\pi t^2/3}$ 일 때 신호  $x(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환. (d) 핵이  $h(t) = e^{-\pi t^2/3}$ 일 때  $x_{0.5}(t)$ 의 짧은 시간 푸리에 변환.



강 현 구 (Hyun Gu Kang)

준회원



2004년 8월 고려대학교 전자 및 정보공학부 공학사  
2004년 9월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 석사과정  
<관심분야> 이동통신, 정보이론, 검파와 추정

권 형 문 (Hyoungmoon Kwon)

준회원



2002년 2월 연세대학교 기계전자공학부 전기전자전공(공학사)  
2002년 3월 한국과학기술원 전자전산학과(공학석사)  
2002년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 박사과정  
<관심분야> 이동통신, 통계학적 신호처리, 검파와 추정

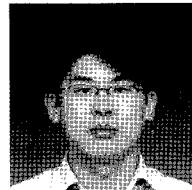
윤 석 호 (Seokho Yoon)

정회원

한국통신학회 논문지 제30권 4C호 참조

최 상 원 (Sang Won Choi)

정회원



2002년 2월 고려대학교 전기전자전공공학부 공학사  
2004년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학석사  
2004년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 박사과정  
<관심분야> 이동통신, 통계학적 신호처리, 검파와 추정

이 주 미 (Jumi Lee)

준회원



1998년 2월 이화여자대학교 수학과 이학사, 전자공학과 공학사  
2000년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학석사  
2000년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 박사과정

<관심분야> 이동통신, 정보이론

송 익 호 (Ickho Song)

중신회원

한국통신학회 논문지 제30권 5C호 참조