

# 확률베타모형의 베이지안 분석

고봉찬\* · 예승민\*\*

## 〈요 약〉

본 논문은 한국 주식시장에서 CAPM 베타의 시간에 따른 변동패턴을 설명하는데 있어서 베이지안 분석기법에 기반을 둔 확률베타모형(stochastic beta model)이 기존의 조건부 베타모형이나 이변량 GARCH(1,1)모형보다 추정의 정확도나 베타의 설명력 측면에서 더 우월하다는 실증적 증거를 보여주었다. 확률베타모형으로 추정한 베타는 주식수익률의 횡단면 변동의 30~50%를 설명하는 반면, 다른 시변베타모형은 3% 이하의 설명력에 그쳤다. 이렇게 확률베타모형에서 추정된 베타의 높은 설명력은 흔히 시장이상현상으로 받아들여지고 있는 기업규모효과나 장부가/시가비율효과, 고유변동성효과들을 대부분 흡수하는 것으로 나타났다. 이것은 시장이상현상들이 베타 참값의 변동과 밀접하게 관련되어 있으며, 기대수익률 변동과 깊은 관련이 있다는 합리적 자산가격결정의 입장을 지지하는 것으로 해석된다.

주제어 : CAPM, 확률베타모형, 베이지안 분석, 시변베타모형, MCMC, 깃스샘플링

## I. 서 론

Sharpe(1964)와 Lintner(1965)에 의해 CAPM모형이 탄생한 이후 그 타당성과 유용성에 대하여 많은 연구와 논쟁을 거치면서 40여년이 지났다.<sup>1)</sup> 그 동안 CAPM에 대한 부정적인 증거들도 많이 제기되었으나 그에 상응할 만한 획기적인 대안을 찾지 못한 채 재무 실무에서는 자본비용의 계산이나 현금흐름의 평가, 펀드의 성과평가 등에 CAPM의 베타를 유용하게 사용하고 있다. 따라서 재무 실무라고 하는 실용적인 관점에서 보면 정확한 베타의 추정을 모색하는 것은 의미 있는 작업이라고 할 수 있으며, 궁극적으로 보다 정확하고 효율적인 재무의사결정을 통하여 금융시장 전체의 효율성 증진에도 기여하게

논문접수일 : 2005년 10월 21일    논문게재확정일 : 2005년 11월 13일

\* 서울대학교 경영대학

\*\* 시카고대학교 통계학과

\*\*\* 본 연구는 서울대학교 경영연구소의 지원으로 연구되었음. 유익한 코멘트를 해주신 두 분의 익명 심사자께 감사드립니다.

될 것이다.

CAPM은 포트폴리오 이론을 바탕으로 도출된 직관적이면서도 수학적으로 간결한 모형이다. 이는 개별 자산의 수익률 변동이 전체시장의 움직임, 즉 시장포트폴리오의 가치 변동에서 발생하는 위험에 대하여 간단한 선형관계(베타)로 표현될 수 있음을 보여준다. 그러나 이렇게 간결하고 명쾌한 구조를 갖는 모형이 특정 단일 기간 내에서는 의미가 있을 수도 있겠으나, 시간의 흐름을 놓고 볼 때 베타라고 하는 시장위험 요소만으로 시장의 모든 자산의 수익률 변동을 충분히 설명해주는 것은 어렵다고 할 수 있다. 실제로 현재까지의 많은 실증연구들에서 정적인 CAPM 베타는 현실 설명력이 떨어진다는 것을 보여주었으며, 기업규모나 장부가/시가비율(book-to-market ratio), 모멘텀 등과 같은 변수들이 높은 설명력을 가진다는 것을 보여주었다. 이러한 실증결과들을 시장이상현상(anomalies)으로 해석하는 연구자도 있는 반면, 또 다른 한편으로는 CAPM의 시장위험과 별개의 체계적 위험으로 간주하여 자산가격결정모형에 도입하려는 시도들도 있어 왔다.<sup>2)</sup>

그러나 이렇게 별도의 모형이나 이상현상들을 도입하기보다는 CAPM의 근본적인 문제점을 직시하고 해결하기 위하여 CAPM의 베타를 시간에 따라 변화하도록 허용함으로써 실제 데이터에 대한 CAPM의 설명력을 증가시킬 수 있음을 간과해서는 안될 것이다. 실제로 베타의 시변성을 허용하여 베타의 변동패턴을 효과적으로 모형화하는 것이 의미 있는 작업임을 최근 연구들에서 입증해주고 있다. 예컨대, Avramov and Chordia(2004)는 기업규모나 장부가/시가비율과 같은 기업 고유의 특성에 의한 효과가 베타의 변동성에 의해서 발생할 수 있음을 지적하였고, Berk, Green, and Naik(1999)는 베타의 지속성(persistence)이 모멘텀 효과를 발생시킨다고 주장하였으며, Ang and Chen(2003)은 베타의 지속성이 장부가/시가비율에 의한 효과를 발생시킨다고 주장하였다. 또한 Jagannathan and Wang(1996)은 매기 마다 발생하는 정보들에 의해 시변하는 계수를 갖는 다요인 모형을 설정하여 기업규모효과와 장부가/시가비율효과를 설명하였다.

이에 본 연구에서는 한국 주식시장에서 CAPM 베타의 시간에 따른 변동패턴을 효과적으로 포착해주는 모형으로서 확률베타모형(stochastic beta model)의 성과를 기존의 대체적인 모형들과 비교·분석하고자 한다. 이 모형은 최근 Ang and Chen(2003)과

1) Merton(1973), Ross(1976), Roll(1977), Breeden(1979), Shanken(1990, 1992), Fama and French(1992, 1993), Campbell(1993) 등.

2) Ross(1976), Basu(1977, 1983), Banz(1981), Jegadeesh and Titman(1993), Fama and French(1993, 1996) 등.

Jostova and Philipov(2005)에 의해 제안된 모형으로서 베타의 평균회귀 성향과 확률적 변동을 잘 묘사해주는 시변베타모형(time-varying beta model)의 하나이다. 여기서 베타의 평균회귀 성향을 모형에 포함시키는 것은 매우 중요한데, 그 이유는 안정적인(stationary) 시계열로 잘 알려져 있는 주식수익률과 선형관계를 갖는 베타가 또한 안정적이기 위해서는 평균회귀 성향을 보여야 하기 때문이다. 또한 확률베타모형은 베이지안 분석방법에 의하여 추정되는데 이것은 모수에 대한 사전확률분포의 설정에서부터 사후확률분포의 도출까지 과정이 투자자의 학습과정을 잘 묘사해준다는 점에서 장점을 지닌다. 또한 베타의 복잡한 확률과정을 추정하기 위하여 본 논문에서는 MCMC(Markov Chain Monte Carlo) 베이지안 추론방법을 사용하는데, 이 방법은 MLE나 GMM 추정과는 달리 점근적 근사에 의존하지 않고 유한표본에 대해서도 정확한 추론이 가능하며 추정과정에서 흔히 발생하는 수렴의 어려움을 극복할 수 있다는 장점을 갖는다.

이처럼 베타의 시간에 따른 변동패턴을 묘사하는데 적합한 것으로 알려진 확률베타모형의 추정성과를 국내 주식표본을 대상으로 분석한 결과, 기존의 조건부 베타모형이나 이변량 GARCH(1,1)모형보다 추정의 정확도나 베타의 설명력 측면에서 더 우월한 성과를 보여주었다. 특히 확률베타모형으로 추정한 베타를 주식수익률의 횡단면 회귀 분석에 이용할 경우 베타만으로 수익률 횡단면 변동의 30~50%를 설명하는 것으로 나타난 반면, 다른 시변베타모형은 3% 이하의 설명력에 그쳤다. 이렇게 확률베타모형에서 추정된 베타의 높은 설명력은 흔히 시장이상현상으로 받아들여지고 있는 기업규모 효과나 장부가/시가비율효과, 고유변동성(idiosyncratic volatility)효과들을 대부분 흡수하는 것으로 나타났다. 이것은 시장이상현상들이 베타 참값의 변동과 밀접하게 관련되어 있으며, 기대수익률 변동과 깊은 관련이 있다는 합리적 자산가격결정의 입장을 지지하는 것이다(Gomes, Kogan, and Zhang, 2001).

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 주식의 기대수익률과 CAPM 베타에 관한 기존 문헌 연구를 살펴보고, III장에서는 확률베타모형과 기존의 시변베타모형들의 연구방법론을 비교·분석하고, 확률베타모형을 이용하여 베타를 추정할 때 사용하는 베이지안 추정법과 MCMC 시뮬레이션, 깁스샘플링(Gibbs Sampling)에 대해 설명한다. IV장에서는 먼저 시뮬레이션 작업을 통해 확률베타모형의 기본적인 추정 성능을 확인하고, 확률베타모형이 한국 주식시장에서 다른 시변베타모형보다 우월한 설명력을 보이는지, 그리고 시장이상현상들을 시장 베타로써 설명할 수 있는지를 실증적으로 검증한다. V장에서는 연구결과의 요약 및 그 의의에 대해 언급함으로써 본 논문을 마무리한다.

## II. CAPM과 기존의 실증연구

Sharpe(1964)와 Lintner(1965)의 CAPM은 오랫동안 재무관리 분야의 중요한 연구주제가 되어왔으며, Merton(1973)과 Breeden(1979) 등에 의해 여러 모형들이 파생되었다. 그러나 다른 한편으로 Basu(1977), Banz(1981), Fama and French(1992) 등과 같은 연구들을 통해 주식의 기대수익률은 시장위험요인에 의해서만 결정되지 않고, 기업규모나 장부가/시가비율(book-to-market ratio), 과거 수익률 등의 요인들에 의해서 많은 부분이 설명된다는 실증 연구결과가 나오기 시작했고, 일부의 연구에선 이러한 증거가 시장효율성에 반하는 증거라고 주장하기도 하였다.<sup>3)</sup>

Fama and French(1993, 1996)는 기업규모나 장부가/시가비율 현상을 3요인 모형으로 설명할 수 있다는 사실을 근거로 시장효율성 옹호하였다. 그러나 그 이후에도 3요인 모형의 임의적인 위험요인 선택이 비판의 대상이 되어 과연 기대수익률이 3가지 위험요인에 의해서 설명되는 것인지, 아니면 기업 특성치에 의해서 설명되는 것인지에 대한 논쟁은 계속되었다. 특히, Fama and French(1993)의 3요인 모형은 과거 데이터에 대한 설명력은 좋으나, out-of-sample 테스트에서 미래 예측력이 상당히 떨어진다는 문제점이 지적되었다.

한편 CAPM 각각의 원인이 CAPM의 정적인 특성에 비롯된 것이라는 인식과 함께, 이를 해결하기 위한 동적자산가격모형(dynamic asset pricing model)에 대한 연구가 진행되었다. Hansen and Richard(1987)는 정적인 CAPM이 실제 데이터를 설명하는데 실패하더라도 CAPM의 동적모형은 현실 설명력이 뛰어날 수 있음을 주장하였으며, Gomes, Kogan, and Zhang(2001)은 개별 주식의 기업규모 및 장부가/시가비율과 상관되어 있는 시장 베타를 이용하여 일반균형모형을 설정하였다. Avramov and Chordia(2004), Shanken(1990), Ferson and Harvey(1993)는 다른 경제변수 혹은 기업 특성에 따라 변화하는 조건부 베타(conditional beta)모형을 제시하였다. 이러한 시변베타모형은 시장이상현상들을 또 다른 위험요인이나 기업특성치의 추가가 아닌 베타의 변동성 개념만으로 주식수익률을 설명하는데 성공하였다. 예컨대, Avramov and Chordia(2004)는 기업규모효과와 장부가/시가비율효과와 같은 기업의 고유특성에 의한 효과가 베타의 변동성에 의해서 발생할 수 있음을 지적하였고, Berk, Green, and Naik(1999)는 베타의 지속성이 모멘텀 효과를 나타낸다고 주장하였으며, Ang and Chen(2003)은 장부

3) Ball(1978), Basu(1983), Banz(1981), Jegadeesh and Titman(1993), Lakonishok, Shleifer, and Vishny(1994) 등.

가/시가비율효과를 발생시킨다고 지적하였다. Jagannathan and Wang(1996)은 매 시점마다 발생하는 정보에 의해 시간에 따라 변동하는 계수를 갖는 다요인 모형을 설정함으로써 기업규모효과와 장부가/시가비율효과를 모형 내에서 설명하였다. 하지만 시변 베타모형을 적용할 때 주의할 점은 Ghysels(1998)이 지적하였듯이 시간에 따라 베타를 변동시키는 모형이 실제 시계열 자료와 부합하지 않게 적용되었을 경우 정적인 모형보다 오차가 더 커질 수 있다는 점이다.

Blume(1971)에 의하면 특정 기간에 높은 값을 가진 베타는 다음 기간에는 그 값이 낮아지면서 1에 접근하는 경향이 있으며, 반대로 낮은 베타는 다음 기간에 1에 접근하면서 그 값이 높아지는 경향이 있다. 따라서 시간의 경과에 따라 베타가 시장의 평균 베타 1에 회귀하려는 경향이 있기 때문에 과거의 자료를 바탕으로 계산된 베타를 사용할 때는 그 값을 1에 가깝게 조정하여 사용하는 것이 바람직하다. 더욱이 Petkova and Zhang(2005)는 베타가 경기변동에 따라 변하고 장기적으로 평균에 수렴한다는 사실을 실증적으로 입증하기도 하였다. 이러한 베타의 장기적 평균회귀현상은 다음 장에서 설명하게 될 확률베타모형의 평균회귀구조에 중요한 기반이 된다.

### Ⅲ. 시변베타모형의 연구방법론

본 장에서는 베타의 시변성을 효과적으로 설명함으로써 실제 데이터에 대한 CAPM의 설명력을 증가시킬 수 있는 모형으로서 확률베타모형과 기존의 대체적인 시변베타 모형(time-varying beta models)들의 연구방법론을 비교하여 설명하도록 한다.

#### 1. 확률베타모형(stochastic beta model)

확률베타모형은 최근에 Ang and Chen(2003)과 Jostova and Philipov(2005)에 의해 제안된 모형으로서 시간에 따른 베타의 변화패턴을 아래와 같이 비교적 간단한 확률과정으로 표현하는 시변베타모형이다.

$$r_{p,t} = \beta_{p,t} r_{m,t} + \sigma_p \varepsilon_{p,t} \quad \varepsilon_{p,t} \sim N(0, 1) \quad (1)$$

$$\beta_{p,t} = \alpha_p + \delta_p (\beta_{p,t-1} - \alpha_p) + \sigma_{\beta p} \nu_{p,t} \quad \nu_{p,t} \sim N(0, 1) \quad (2)$$

$$(\alpha_p, \delta_p, \sigma_{\beta p}^2, \sigma_p^2) \sim p(\alpha_p, \delta_p, \sigma_{\beta p}^2, \sigma_p^2) \quad (3)$$

여기서  $r_{p,t}$ 는 포트폴리오  $p$ 의 무위험수익률을 초과하는 초과수익률을 의미하고,  $r_{m,t}$

는 시장포트폴리오의 초과수익률을 뜻한다.  $\beta_{p,t}$ 는 포트폴리오  $p$ 의  $t$ 시점에서의 베타 값으로서, 베타의 확률적 변동패턴은 베타의 무조건부평균  $\alpha_p$ 와 베타의 지속성  $\delta_p$ , 그리고 베타의 조건부 변동성  $\sigma_{\beta p}$ 에 의하여 결정된다. 여기서 베타의 지속성을 나타내는  $\delta_p$ 값이 클수록 지속성이 강한 랜덤워크 경향을 나타내며,  $\delta_p$ 값이 작을수록 평균회귀 경향이 강하다고 할 수 있다. 일반적으로 수익률의 시계열이 안정적(stationary)이므로 수익률의 선형함수인 베타 또한 안정적인 시계열이 되기 위해서는  $|\delta_p| < 1$  조건을 만족해야 한다. 또한  $\sigma_p$ 는 포트폴리오  $p$ 의 고유변동성(idiosyncratic volatility)을 나타내며,  $\varepsilon_{p,t}$ 와  $\nu_{p,t}$ 는 포트폴리오 초과수익률과 베타의 확률적 변동부분을 나타낸다.<sup>4)</sup>

위의 확률베타모형은 다른 시변베타모형들을 포함하는 포괄적인 모형이라고 할 수 있다. 예컨대, 모형에서  $\delta_p = 0$ (완전 평균회귀)으로 설정하면 상수항과 화이트 노이즈만을 갖는 시변베타모형이 된다. 또한,  $\sigma_{\beta p} = 0$ 으로 설정하고 도구변수들을 추가한다면 Shanken (1990)과 Avramov and Chordia(2004) 등에서 사용된 조건부 베타모형으로 변형될 수 있다. 그리고,  $\delta_p = 0$ ,  $\sigma_{\beta p} = 0$ 으로 설정하면 상수베타모형으로서 표준적인 단일기간 CAPM 모형이 된다. 또한 위의 확률베타모형에서 보듯이 베타는 모수들  $(\alpha_p, \delta_p, \sigma_{\beta p}^2, \sigma_p^2)$ 에 의해서 확률적 변동과정을 따르게 되어 있으므로 본 연구에서는 이러한 모수의 추정에 적합한 베이지안 추론방법을 적용하기로 한다.<sup>5)</sup> 베이지안 추론방법은 먼저 모수의 사전확률분포  $p(\alpha_p, \delta_p, \sigma_{\beta p}^2, \sigma_p^2)$ 를 설정하고, 사전확률분포와 우도함수를 결합하여 사후확률분포를 도출하며, 사후확률분포를 이용하여 모수를 추정하게 된다.<sup>6)</sup> 이러한 과정에서 우도함수 설정을 위한 오차항의 정규분포 가정을 필요로 하지만 반복적인 표본추출을 통해 모수의 분포를 직접적으로 언급함으로써 표본크기와 상관없이 표본의 정보를 충분히 반영시킬 수 있다는 장점이 있다. 또한 베이지안 추정에 의한 추정치는 모수가 극단적인 값이 아닌 경우 전통적인 방법보다 효율적(efficient)이라고 일반적으로 알려져 있으며, 베이지안 추론에서 모수의 사전확률분포가 표본 정보에 의해 계속적으로 업데이트되어 사

4) 확률베타모형에서 베타의 장기 무조건부 평균  $E(\beta_p)$ 와 분산  $Var(\beta_p)$ 은 다음과 같이 계산된다. 따라서 베타의 평균회귀 경향이 강할수록(또는  $\delta_p$ 가 작을수록) 베타의 무조건부 분산은 작아짐을 알 수 있다.

$$E(\beta_p) = \frac{\alpha_p(1-\delta_p)}{1-\delta_p} = \alpha_p, \quad Var(\beta_p) = \frac{\sigma_{\beta p}^2}{1-\delta_p^2}$$

5) 전통적인 모수 추정방법에서는 모수를 고정되었으나 모르는 값(fixed but unknown value)로 취급하는 데 비해, 베이지안 추론방법에서는 모수가 확률분포로서 존재한다고 가정한다.

6) 논지의 원활한 흐름을 위하여 사전확률분포의 설정과 우도함수 및 사후확률분포의 도출 과정에 대한 자세한 수식과 설명은 부록에 별도로 정리하였다.

후확률분포가 도출되는 과정은 투자자의 학습과정을 모형에 반영한 것으로 볼 수 있다.

이러한 베이지안 추론방법을 수행하는 과정에서 모수의 개수가 많고 사후확률분포의 형태가 복잡하게 도출되는 경우, 분석적인 방법으로 적분이 불가능한 상황이 발생하기도 한다. 이 때, 분석적인 방법 대신 수치적인 방법을 이용하여 모수의 사후확률분포를 근사할 수 있는데, 다변수의 결합확률분포함수와 같은 경우에는 종종 Monte Carlo Simulation과 같은 수치적인 기법조차 적용하기 어려울 수도 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 도입된 것이 Markov Chain이다. Markov Chain은  $t$ 시점의 확률변수가 오직  $t-1$ 시점의 실현된 확률변수 값에만 의존하는 확률변수의 시퀀스를 말한다. 우리가 찾고자 하는 사후확률분포로 분포 수렴하는 Markov Chain을 찾고, 이로부터 랜덤샘플을 추출하면, 이는 사후확률분포에서 랜덤샘플을 추출한 것과 같은 효과를 낼 수 있다. 이것을 MCMC(Markov Chain Monte Carlo)라고 하는데, 이 중 가장 간단하게 적용할 수 있는 알고리즘이 깃스샘플링(Gibbs sampling)이다. 이는 각 변수의 조건부 확률분포(conditional distribution)로부터 주변 확률분포(marginal distribution)의 표본을 추출하는 방법으로, 표본 수가 증가함에 따라 조건부 확률분포의 샘플로 이루어진 Markov Chain이 주변 확률분포에 분포 수렴 하게 되는 성질을 이용한 것이다.<sup>7)</sup> 본 연구에서 다루고 있는 확률베타모형도 매우 복잡한 다변량 사후확률분포를 갖기 때문에, 일반적인 수치해석법으로는 모수의 분포를 알아내기가 곤란하다. 그리하여 각각의 모수에 대해 조건부 사후확률분포를 구하고 깃스샘플링 알고리즘으로 샘플을 추출한다. 초기에 나온 샘플들을 버리고 나면 남은 샘플들은 주변 사후확률분포의 랜덤샘플이 된다(예 : 총 3,000개의 샘플을 뽑아서 초기 1,000개의 자료는 버리고 나머지 2,000개의 샘플로서 분포를 추정한다.).

## 2. 기업특성치조정 베타모형(characteristics-scaled beta model)

표준적인 CAPM의 베타를 이용하여 포트폴리오 수익률을 횡단면 분석하게 되면 시장위험요인 이외에도 기업규모나 장부가/시가비율과 같은 기업특성치가 포트폴리오 수익률에 기여하는 것으로 나타난다. 이를 시장이상현상으로 해석하고 차익거래 기회라고 주장하는 의견도 있고, 혹은 이들을 SMB나 HML과 같은 시장 공통위험요인으로 도입하여 이에 대한 위험프리미엄에 의한 결과라고 설명하기도 한다. 또한 Shanken(1990)과 Avramov and Chordia(2004)에서는 이러한 기업규모효과와 장부가/시가비율 효과를 시장베타에 미리 반영시켜 시장베타의 값을 조정하는 기업특성치조정 베타모형

7) 깃스샘플링의 수렴에 대한 보다 일반적인 논의는 Robert and Casella(1999)를 참조하길 바란다.

을 제안하였다. 이러한 모형은 시변베타모형의 일종으로서 포트폴리오간의 베타 변동 패턴의 차이가 기업특성치인 기업규모와 장부가/시가비율의 차이에서 기인한다고 보고, 시장베타 하나만으로 포트폴리오 수익률의 횡단면 차이를 설명하고자 한다.

$$r_{p,t} = \alpha_p + \beta_{p,t} r_{m,t} + u_{p,t} \quad (4)$$

$$\beta_{p,t} = \beta_{p1} + \beta_{p2} \text{Size}_{p,t-1} + \beta_{p3} \text{BM}_{p,t-1} \quad (5)$$

여기서 Size는 (포트폴리오의 시가총액/시장 전체의 시가총액)으로 계산하고, BM은 (각 주식의 자기자본 장부가/시가비율의 포트폴리오 평균)으로 구한다.  $u_{p,t}$ 는 회귀분석의 오차항이며, 식 (5)을 식 (4)에 대입하여 다중회귀분석을 통해 각 포트폴리오별  $\beta_{p1}$ ,  $\beta_{p2}$ ,  $\beta_{p3}$ 를 추정할 수 있으며, 이를 식 (5)에 재대입하면 포트폴리오별 베타의 시계열을 계산할 수 있다.

### 3. 조건부 베타모형(conditional beta model)

조건부 베타모형은 앞에서 본 기업특성치조정 베타모형과 유사한 형태이긴 하지만, 베타의 조정요소를 기업별 특성치가 아니라 모든 주식에 공통적으로 영향을 미치는 거시경제변수를 사용한다는 점에서 차이가 있다. 즉 조건부 베타모형은 공통적인 위험요인에 의해 베타를 조정하는 것으로, 기업특성치 조정모형보다 시장의 효율성을 더 지지한다고 할 수 있다. Shanken(1990)은 이러한 거시경제변수로서 무위험수익률과 그 변동성을 이용하여 아래와 같은 모형을 설정하였다.

$$r_{p,t} = \alpha_p + \beta_{p,t} r_{m,t} + \varepsilon_{p,t} \quad \varepsilon_{p,t} \sim N(0, \sigma^2) \quad (6)$$

$$\beta_{p,t} = \beta_{p1} + \beta_{p2} r_{ft-1} + \beta_{p3} \text{Vol}_{t-1} \quad (7)$$

여기서  $r_{ft-1}$ 은 무위험수익률이며, 본 연구에서는 1년 만기 통화안정채권 수익률을 사용하였다.  $\text{Vol}_{t-1}$ 은 무위험수익률의 지난 12개월 동안의 월별 변동치 절대값의 지수 이동평균치로 계산되었다.

### 4. 이변량 GARCH(1,1)모형

이변량 GARCH(1,1) 모형은 시장포트폴리오 수익률과 포트폴리오 수익률간의 분산-공분산행렬을 아래와 같이 추정함으로써 베타의 시계열 변동패턴을 계산한다.<sup>8)</sup>



$$r_t \sim N(0, H_t) \tag{8}$$

$$H_t = C + A \sum_{t-1} + B H_{t-1} \tag{9}$$

여기서  $r_t$ 는 2x1 벡터로서 시장포트폴리오 초과수익률  $r_{m,t}$ 와 포트폴리오  $p$ 의 초과수익률  $r_{p,t}$ 의 벡터를 나타낸다.  $H_t$ 는  $t$ 시점에서의  $r_{m,t}$ 와  $r_{p,t}$ 의 조건부 공분산행렬이며,  $\sum_{t-1}$ 는  $r_{m,t-1}$ 와  $r_{p,t-1}$ 간의 cross-product 행렬이며, A, B, C는 모두 2x2 계수행렬이다. 이러한 이변량 GARCH모형을 추정하는 방법으로서 본 연구에서는 시변 공분산행렬의 추정에 특히 우수한 것으로 알려진 Flexible 이변량 GARCH(1,1)모형을 사용하기로 한다. 이 모형은 Ledoit, Santa-Clara, and Wolf(2003)가 제안한 것으로서 기존의 일정상관관계(constant correlation) GARCH모형이나 BEKK GARCH 모형에 비해 공분산행렬의 예측 정확도와 표준잔차의 무상관성 등의 측면에서 더 우수한 성과를 보이는 것으로 알려져 있다.

## IV. 실증분석 결과

### 1. 시뮬레이션 연구

본 소절에서는 확률베타모형을 실제 데이터에 적용하기 전에 모형의 모수 추정성능을 확인하기 위하여 사전에 설정한 모수의 참값을 바탕으로 추출된 랜덤샘플에 대한 추정 결과를 살펴보기로 한다. 랜덤샘플의 추출과정은 다음과 같이 수행되었다. 먼저 식 (1)과 식 (2)에서 보듯이 시장포트폴리오의 초과수익률 자료는 1990년 1월부터 1999년 12월까지의 10년간의 실제의 KOSPI 200지수와 통화안정채권(1년 만기)의 월간 연속수익률을 이용하여 산출하였으며, 이를 바탕으로 확률베타모형의 모수  $\alpha_p$ ,  $\delta_p$ ,  $\sigma_{\beta p}^2$ 에 대한 참값을 가정한 상태에서 여러항의 랜덤넘버를 발생시켜 10년치(120개월)의 가상의 베타 시계열 100 세트를 추출하고, 각 베타 시계열 세트와 시장포트폴리오 초과수익률 및  $\sigma_p^2$  참값으로부터 가상의 포트폴리오 수익률 시계열 세트를 발생시킨다. 이렇게 추출된 가상의 포트폴리오 수익률 시계열 100 세트를 대상으로 확률베타모형의 모수를 추정하고, 다른 시변베타모형에 대한 추정결과와도 비교하도록 한다. 추정 결과의 비교는 모수의 참값과 추정치간의 평균적인 거리를 나타내는 RMSE(Root Mean Squared Error)를 기준으로 평가한다.

8) 즉,  $\beta = \text{Cov}(r_m, r_p) / \text{Var}(r_m) = h_{12} / h_{11}$ (단,  $h$ 는 H의 원소를 의미한다).

위와 같은 랜덤샘플 추출과정에서 사용된 모수의 참값은 다음과 같이 설정하였다. 우선 베타의 무조건부 평균을 나타내는  $\alpha_p$ 는 0.7과 1.3의 두 가지로 설정하였고, 베타의 지속성을 나타내는  $\delta_p$ 는 0.1부터 0.4, 0.6, 0.8, 0.95까지의 다섯 가지로 설정하였으며, 베타와 수익률의 변동성을 나타내는  $\sigma_{\beta p}$ 와  $\sigma_p$ 는 모두 0.13으로 설정하였다. 따라서 모수의 참값은 모두 10가지 세트가 가능해지며, 각 모수의 세트별로 위에서 설명한 100세트의 가상의 시계열 자료를 대상으로 모형을 추정하였다.

<표 1> 랜덤샘플에 대한 확률베타모형의 모수 추정성능 검증

아래 확률베타모형의 모수에 대한 참값을  $\alpha_p = 0.7, 1.3$ ,  $\delta_p = 0.1, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95$ , 그리고  $\sigma_{\beta p} = 0.13$ ,  $\sigma_p = 0.13$ 으로 설정하여, 120개월의 가상의 베타와 수익률 시계열 자료 100세트를 발생시킨다. 각각의 수익률시계열 세트에 대하여 깃샘플링을 적용하여 3,000번 랜덤샘플을 반복 추출한 후, 초기 1,000개는 버리고 나머지 2,000개 샘플로 모수의 사후분포 평균을 추정한다.

$$r_{p,t} = \beta_{p,t} r_{m,t} + \sigma_p \varepsilon_{p,t} \quad \varepsilon_{p,t} \sim N(0,1) \quad (1)$$

$$\beta_{p,t} = \alpha_p + \delta_p (\beta_{p,t-1} - \alpha_p) + \sigma_{\beta p} \nu_{p,t} \quad \nu_{p,t} \sim N(0,1) \quad (2)$$

$r_{p,t}$ 는 포트폴리오  $p$ 의 무위험 초과수익률이고,  $r_{m,t}$ 는 시장포트폴리오의 초과수익률이다. 아래 표의 숫자는 모수에 대한 추정치이며, 괄호 안의 숫자는 RMSE(Root mean squared error)이다.  $\hat{\theta}_i$ 는 모수 ( $\alpha_p, \delta_p, \sigma_{\beta p}^2, \sigma_p^2$ )에 대한 추정량을 의미하며,  $\theta_i$ 는 사전에 설정한 모수의 참값을 의미한다.

$$RMSE_{\hat{\theta}_i} = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2}$$

True $\alpha_p$	True $\delta_p$			True $\sigma_{\beta p}=0.13$	True $\sigma_p=0.13$
		$\hat{\alpha}_p$	$\hat{\delta}_p$	$\hat{\sigma}_{\beta p}$	$\hat{\sigma}_p$
0.7	0.10	0.6940 (0.071)	0.1273 (0.104)	0.1303 (0.048)	0.1343 (0.047)
	0.40	0.6997 (0.017)	0.4140 (0.096)	0.1312 (0.039)	0.1345 (0.038)
	0.60	0.6961 (0.030)	0.5902 (0.091)	0.1299 (0.036)	0.1343 (0.037)
	0.80	0.7033 (0.065)	0.7984 (0.063)	0.1298 (0.034)	0.1339 (0.035)
	0.95	0.5820 (0.427)	0.9339 (0.046)	0.1310 (0.037)	0.1339 (0.034)
1.3	0.10	1.3005 (0.014)	0.1327 (0.121)	0.1296 (0.039)	0.1348 (0.038)
	0.40	1.2954 (0.019)	0.3975 (0.085)	0.1301 (0.037)	0.1343 (0.037)
	0.60	1.3017 (0.030)	0.5866 (0.084)	0.1307 (0.036)	0.1343 (0.037)
	0.80	1.3120 (0.076)	0.8096 (0.057)	0.1301 (0.036)	0.1340 (0.035)
	0.95	1.4221 (0.395)	0.9376 (0.042)	0.1305 (0.035)	0.1332 (0.033)

우선 확률베타모형에 대한 추정결과가 <표 1>에 보고되어 있다. 확률베타모형은 앞 절에서 설명한 것처럼 베이지안 추론방법에 따라 깃스샘플링 알고리즘을 이용하여 추정하였다. 즉, 위에서 추출한 100개의 베타시계열 세트 각각에 대하여 깃스샘플링을 적용하여 3,000번 랜덤샘플을 반복 추출한 후, 초기에 나온 1,000개 샘플은 버리고 (burn-in 단계) 나머지 2,000개의 샘플(monitoring 단계)로 모수의 사후분포 평균을 추정하였다. 이렇게 계산된 모수의 사후분포 평균이 모수의 참값과 얼마나 가까운가를 측정하기 위하여 아래와 같이 RMSE를 계산하여 평가하였다.

$$RMSE_{\hat{\theta}_i} = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2} \quad (10)$$

여기서  $\hat{\theta}_i$ 는  $i$ 번째 베타 시계열 세트에서 추정된 모수의 사후분포 평균을 의미하며,  $\theta_i$ 는 모수의 참값을 의미한다. <표 1>의 추정결과를 살펴보면, 베타의 무조건부 평균에 대한 추정치인  $\hat{\alpha}_p$ 와, 베타의 지속성 모수에 대한 추정치인  $\hat{\delta}_p$ 는 RMSE 측면에서 비교적 정확하게 추정되고 있음을 알 수 있다. 특히  $\hat{\alpha}_p$ 는 참값에 매우 근사한 값을 보이고 있으며, 베타의 지속성 모수인  $\hat{\delta}_p$ 가 0.95와 같은 큰 값을 가질 경우에만  $\hat{\alpha}_p$ 의 편이가 커지는 양상을 보이고 있다. 이것은 베타의 지속성이 클수록 어떤 충격에 대하여 베타 값이 무조건부 평균으로부터 더 오래 동안 괴리를 보이게 됨을 의미하는 것으로서 확률베타모형의 확률적 변동특성을 잘 나타내는 결과라고 하겠다. 또한 베타와 수익률의 변동성 모수에 대한 추정치인  $\hat{\sigma}_{\beta\beta}$ 와  $\hat{\sigma}_p$ 도 매우 정확하게 참값에 근접한 값으로 추정되고 있으며 10개의 모든 모수 세트에 대해서 편이가 거의 없는 것으로 나타나고 있다.

<표 2>에서는 위에서 논의된 확률베타모형의 베타 추정치를 60개월 Rolling OLS 및 이변량 GARCH(1,1)모형과 같은 대체적인 시변베타모형의 베타추정치와 비교하고 있다. 표에서 보면, 확률베타모형의 베타추정치는 다른 모형에 비해 매우 우수한 추정능력을 보인다. 즉, 확률베타모형(SBETA)의 경우 베타추정치의 평균 편이가  $\pm 0.001$  범위 안에 들면서 다른 모형들의 편이보다 현저하게 적은 값을 보이고 있다. 평균 RMSE도 대부분의 모수 조합에 대해서 0.1 이하의 값을 가지는데 반해, Rolling OLS 나 GARCH 모형의 경우에는 확률베타모형보다 3~7배 큰 값을 보이고 있다. 또한

<표 2> 랜덤샘플에 대한 확률베타모형의 베타 추정치 편 의 분석

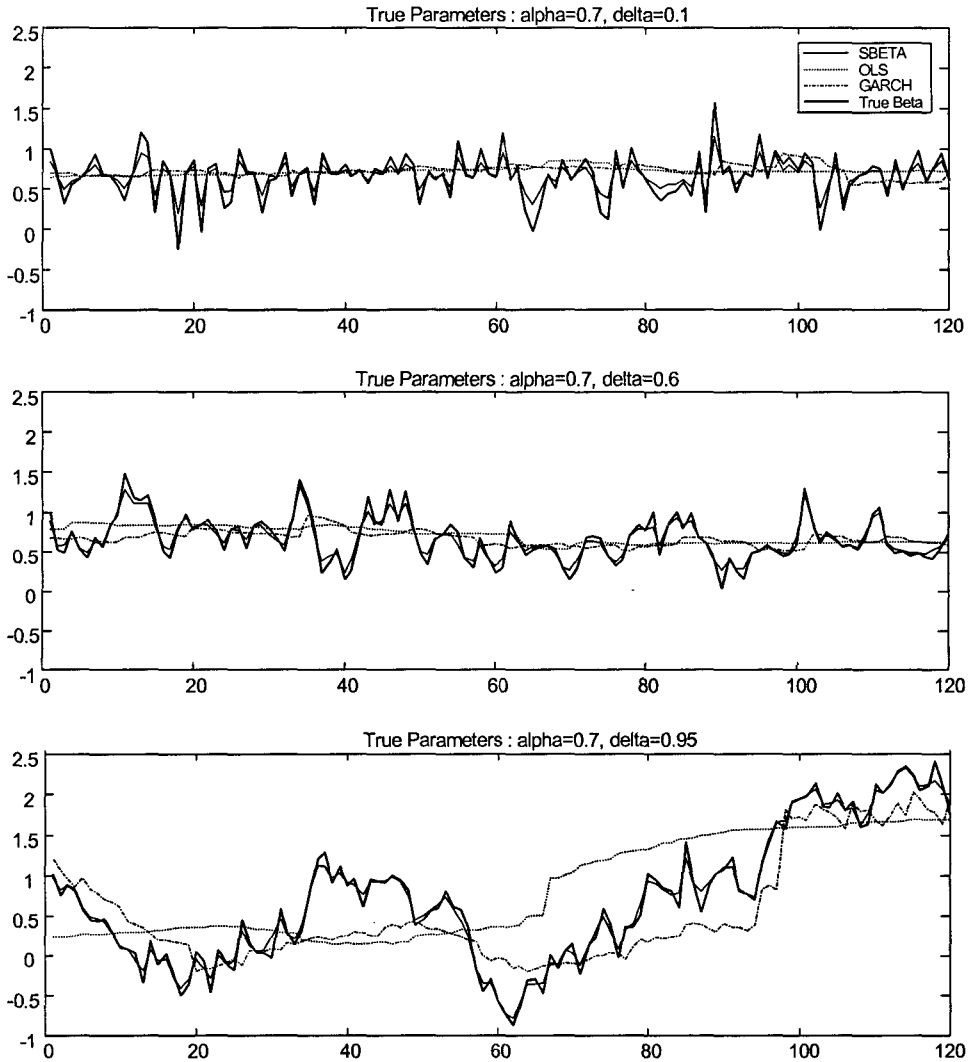
<표 1>의 랜덤샘플을 대상으로 확률베타모형(SBETA), 60개월 Rolling OLS, 이변량 GARCH(1,1)모형 각각에 의한 베타를 추정된 결과를 비교하고 있다. 확률베타모형과 이변량 GARCH(1,1)모형은 본문의 방법론에서 설명한 모형이며, 60개월 Rolling OLS는 추정 시점 t에서 (t-29, t+30) 기간의 자료에 대해 단순회귀 분석하여 베타 시계열을 얻는 방법이다. 확률베타모형은 각각의 베타 시계열 세트에 대하여 김스샘플링을 적용하여 3,000번 랜덤샘플을 반복 추출한 후, 초기 1,000개는 버리고 나머지 샘플을 이용하여 베타를 추정한다.

$$Average\ RMSE_{\hat{\beta}} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{\beta}_{M,i,t} - \beta_{i,t})^2}$$

True $\alpha_p$	True $\delta_p$	Average Bias of $\hat{\beta}$			Average RMSE of $\hat{\beta}$		
		SBETA	OLS	GARCH	SBETA	OLS	GARCH
0.7	0.10	-0.0002	0.0015	-0.0029	0.1107	0.2606	0.2673
	0.40	-0.0010	-0.0067	-0.0252	0.0982	0.2737	0.2825
	0.60	-0.0008	0.0020	-0.0268	0.0885	0.3075	0.3053
	0.80	-0.0003	-0.0033	-0.0763	0.0782	0.4066	0.3749
	0.95	0.0002	0.0218	0.0963	0.0746	0.5607	0.5064
1.3	0.10	0.0001	-0.0053	-0.0066	0.1094	0.2527	0.2602
	0.40	0.0013	0.0035	-0.0028	0.0970	0.2736	0.2757
	0.60	0.0007	0.0100	-0.0048	0.0882	0.3088	0.3034
	0.80	0.0001	-0.0166	-0.0490	0.0792	0.3842	0.3631
	0.95	0.0005	-0.0063	-0.1281	0.0734	0.5363	0.5061

베타의 지속성 모수  $\delta_p$ 의 값이 커질수록 확률베타모형의 베타 추정치에 대한 평균 RMSE는 감소하는 반면, Rolling OLS와 이변량 GARCH(1,1)모형의 경우에는 평균 RMSE가 증가하는 양상을 보이고 있어 이들 모형은 베타 지속성이 높은 경우 오차가 크게 됨을 알 수 있다. 이러한 결과는 [그림 1]에서 모형별로 베타 추정치 시계열을 그림으로 보여줌으로써 확률베타모형이 여타 시변베타모형들보다 베타의 참값에 더욱 가까운 변동패턴을 갖는다는 것을 시각적으로 확인할 수 있다. 결론적으로 확률베타모형이 다른 시변베타모형들보다 더 우수한 베타 추정치를 제공해준다고 할 수 있으며, 특히 베타의 지속성이 높은 수익률 자료에서는 그 우수성이 더욱 두드러진다고 할 수 있다.

[그림 1] 랜덤샘플에 대한 확률베타모형의 베타 추정치 시계열



## 2. 산업별 베타의 변동패턴 분석결과

본 소절에서는 확률베타모형에 의한 본격적인 CAPM 검증에 앞서 국내 주식시장의 전반적인 베타 변동패턴을 파악하기 위하여 KOSPI200 산업별 지수의 월간 초과수익률 자료를 바탕으로 확률베타모형에 의한 산업별 베타 변동패턴을 추정하도록 한다. 확률베타모형의 모수 추정치에 대한 유의도 검증은 Geweke(1992)의 수치적 표준오차

(numerical standard errors : NSE)에 의해 깃샘플링 과정에서 초래될 수 있는 랜덤 추출 상의 자기상관성을 조정한 표준오차를 사용하도록 한다.

<표 3> 확률베타모형으로 추정된 산업지수별 베타의 변동패턴 분석(1990.1~2005.4)

아래 표는 KOSPI200 산업지수별 월간 초과수익률 자료에 대하여 확률베타모형의 모수 평균값을 추정한 결과이다. NSE는 Geweke(1992)의 Numerical Standard Error를 의미하고, BCI(90%)는 90% 베이지안 신뢰 구간으로서, 최종 산출된 모수의 사후분포에서 상위 5%와 하위 5% 사이의 구간을 뜻한다. 각 모수의 조건부 사후분포에서 50,000번 반복하여 랜덤샘플을 추출한 후에 초기 5,000개는 버리고 나머지 45,000개 샘플을 이용하여 모수의 분포를 추정하였다.

모수 추정치		제조업	전기통신업	건설업	서비스업	금융업
$\hat{\alpha}_p$	Mean	0.9051	0.8223	0.1138	0.9192	0.8983
	NSE	[0.021]	[0.006]	[0.048]	[0.010]	[0.013]
	BCI(90%)	(0.8751, 0.9401)	(0.8161, 0.8341)	(0.0590, 0.1661)	(0.9076, 0.9329)	(0.8740, 0.9151)
$\hat{\delta}_p$	Mean	0.2719	-0.0075	-0.0064	-0.2462	-0.0391
	NSE	[0.102]	[0.005]	[0.007]	[0.072]	[0.003]
	BCI(90%)	(0.1639, 0.3956)	(-0.0135, 0.0027)	(-0.0161, 0.0028)	(-0.3217, -0.1721)	(-0.0445, -0.0348)
$\hat{\sigma}_{\beta p}$	Mean	0.0172	0.0071	0.2148	0.0118	0.0076
	NSE	[0.013]	[0.001]	[0.400]	[0.009]	[0.001]
	BCI(90%)	(0.0036, 0.0333)	(0.0059, 0.0084)	(0.0013, 0.7952)	(0.0029, 0.0220)	(0.0061, 0.0094)
$\hat{\sigma}_p$	Mean	0.0362	0.0067	1.4623	0.0242	0.0079
	NSE	[0.034]	[0.001]	[1.511]	[0.022]	[0.001]
	BCI(90%)	(0.0022, 0.0798)	(0.0057, 0.0077)	(0.0008, 3.3395)	(0.0019, 0.0516)	(0.0061, 0.0098)

<표 3>에는 이러한 산업별 베타의 변동패턴을 결정하는 모수들에 대한 추정치가 보고되고 있다. 산업별 베타의 장기 무조건부 평균인  $\hat{\alpha}_p$  값은 대부분의 산업에서 1에 가깝지만, 건설업은 0.1138로서 매우 작은 값을 보이고 있다. 또한 건설업의 베타 지속성 추정치  $\hat{\delta}_p$ 는 -0.0064로서 업종 중에서 가장 작은 값을 가지나, 베타의 변동성 추정치  $\hat{\sigma}_{\beta p}$ 는 가장 큰 값을 가지고 있다. 이것은 건설업의 베타 또는 체계적 위험이 평균적으로 낮아서 시장의 충격이 건설업 주식수익률에 비교적 적은 영향을 주지만, 자체적인 변동요인에 의해 건설업 베타의 등락이 발생함을 의미한다. 이는 건설업의 경기 사이클이 전체 경기 사이클보다는 정부 정책에 따라 바뀌는 경우가 많아 시장 포트폴리오와의 상관관계가 작다는 사실을 반영하는 것이다.

한편 제조업은 건설업과는 대조적으로 베타의 장기 평균은 1에 가까운 0.9051이며, 베타의 지속성은 0.2719로 업종 중 가장 높고, 베타 변동성은 0.0172로 매우 낮게 나타

나고 있다. 따라서 제조업 주식수익률은 시장수익률의 변화에 지속적으로 많은 영향을 받으며 자체적인 베타 변동요인은 약한 것으로 파악되며, 이것은 제조업이 KOSPI200 지수에서 가장 큰 비중을 차지하는 업종이라는 점에서 당연한 결과라고 하겠다. 서비스업의 경우에도 베타의 장기 평균은 0.9192로서 업종 중 가장 높은 수치를 보이나, 베타의 지속성은 -0.2462인 음수로서 베타가 장기 평균을 중심으로 진동하는 양상을 보이고 있다. 또한 전기통신업과 금융업의 경우에는 베타의 지속성과 변동성이 모두 낮게 나타나고 있어 베타가 장기 평균을 중심으로 안정된 변동행태를 보이는 것으로 이해된다.

이처럼 확률베타모형은 산업별 베타의 변동패턴을 베타의 평균회귀, 지속성, 그리고 확률적 변동과 같은 성분으로 나누어 설명해주고 있다. 또한 확률베타모형은 주식수익률의 변동패턴에 대해서도 시장수익률의 변동, 베타의 변동, 고유변동성과 같이 세가지 성분으로 나누어 설명해준다는 점에서 자산가격결정 및 위험관리 측면에서 유용하게 사용될 수 있다. 다음 소절에서는 확률베타모형에 의한 CAPM 검증을 수행함으로써 확률베타모형에 의한 CAPM 베타의 설명력이 얼마나 증가되는지를 살펴보도록 한다.

### 3. 기업규모와 장부가/시가비율에 따른 포트폴리오 분석결과

지금까지 앞에서 확률베타모형에 의한 베타 추정치의 우수함과 유용성에 대하여 랜덤샘플과 산업별지수를 이용하여 살펴보았다. 본 소절에서는 기업규모와 장부가/시가비율에 따라 매월 구성된 5×5의 25개 포트폴리오에 대하여 Fama and MacBeth(1973)의 2단계 횡단면 회귀분석으로 CAPM 테스트를 수행하도록 한다. 횡단면 회귀분석에 필요한 각 포트폴리오별 베타 시계열 추정치는 앞에서 살펴본 확률베타모형과 60개월 Rolling OLS, 기업특성치조정 베타모형, 조건부 베타모형, 이변량 GARCH(1,1)모형을 포함하여 모두 다섯 가지의 대체적인 모형에 의하여 산출하였고, 이렇게 추정된 베타 시계열  $\hat{\beta}_{p,t}$ 는 아래와 같이 매월의 횡단면 회귀식에 설명변수로 투입되어 회귀식 추정에 사용된다.

$$r_{p,t} = \alpha_t + \lambda_t \hat{\beta}_{p,t} + r_t C_{p,t} + e_{p,t} \quad (11)$$

여기서  $r_{p,t}$ 는 포트폴리오  $p$ 의  $t$ 월의 초과수익률이고,  $C_{p,t}$ 는 포트폴리오  $p$ 의  $t$ 월의 포트폴리오 특성치로서 규모, 장부가/시가비율, 수익률의 고유변동성( $\sigma_p$ ), 베타 지속성

( $\delta_p$ ) 등을 차례로 회귀분석에 설명변수로 추가하면서 설명력을 분석하도록 한다. 여기서 포트폴리오의 규모는 (포트폴리오의 시가총액/시장 전체의 시가총액)으로 계산하였고, 포트폴리오의 장부가/시가비율은 (구성 주식의 자기자본 장부가/ 시가비율의 포트폴리오 평균)으로 구하였으며, 수익률의 고유변동성과 베타 지속성은 확률베타모형에서 추정된 모수의 시계열 자료를 사용하였다. 주식수익률 자료는 FnGuide Inc.의 DataGuide Pro에서 1981년 1월부터 2004년 12월까지(288개월) 한국증권거래소의 모든 상장 주식을 대상으로 추출하였고, 이를 바탕으로 25개 포트폴리오의 월간 초과수익률, 기업규모, 장부가/시가비율의 패널자료를 구성하였다.<sup>9)</sup> 무위험수익률로는 1987년 1월부터 표본기간 말까지는 1년 만기 통화안정채권의 수익률 자료를 사용하였고, 그 이전 기간에 대해서는 1년 만기 정기예금 금리를 사용하였다.

식 (11)의 횡단면 회귀분석에서 추정되는 회귀계수  $\alpha_i$ 는 베타나 포트폴리오 특성치로서 설명되지 않는 포트폴리오 수익률 부분이고,  $\lambda_i$ 는 베타에 의해 설명되는 수익률 부분으로서 시장위험프리미엄이 되며,  $\gamma_i$ 는 포트폴리오 특성치로서 설명되는 수익률 부분이 된다. 따라서 대체적인 시변베타모형에서 추정된 베타를 위의 횡단면 회귀식에 투입하여 추정하고 회귀계수  $\gamma_i$ 의 유의성을 검증함으로써 과연 포트폴리오 특성치 또는 시장이상현상에 의한 수익률 변동부분을 시변베타가 충분히 설명하는가를 검증할 수 있게 된다. 횡단면 회귀분석 결과는 <표 4>에 보고되어 있다. Panel A와 B에서 보면, 확률베타모형은 다음과 같은 측면에서 다른 대체적인 시변베타모형보다 우월하다고 할 수 있다. 첫째, 확률베타모형의 베타로 설명되지 않는 수익률 부분이라고 할 수 있는  $\alpha_i$ 의 값이 0과 다르지 않은 반면, 다른 시변베타모형들은  $\alpha_i$ 의 값이 1또는 그 이상의 0과 유의하게 다른 값을 갖는다. 둘째, 확률베타모형의 베타를 사용한 횡단면 회귀분석의 설명력이 61.2%로서 다른 모형에 비해 다섯 배 이상의 높은 설명력을 보이고 있다. 셋째, 확률베타모형의 베타는 장부가/시가비율에 대한 회귀계수를 유의하지 않게 만듦으로써 다른 모형에 비해 장부가/시가비율에 의한 시장이상현상을 잘 설명하고 있다.

기업특성치조정 베타모형은 베타 추정 시 포트폴리오의 특성치인 기업규모와 장부가/시가비율을 설명변수로 이용하기 때문에, 이렇게 추정된 베타를 횡단면 회귀분석에 설명변수로 사용할 경우 기업규모와 장부가/시가비율에 의한 효과를 베타가 설명할 수

9) 25개 포트폴리오의 수익률을 구성주식에 대한 산술평균 또는 가치가중평균으로 하여도 결과에는 큰 차이가 없으므로, 본 논문에서는 산술평균 수익률을 사용한 분석결과를 표에 보고하였다.



<표 4> 대체적인 시변베타모형에서 추정된 베타를 이용한 횡단면 CAPM 검증

아래 표는 1981년 1월부터 2004년 12월까지(288개월) 한국증권거래소 상장 주식을 대상으로 매월 기업규모와 장부가/시가비율에 따라 5×5로 구성된 25개 포트폴리오의 월간 초과수익률 자료에 대하여 아래 식과 같은 Fama and MacBeth(1973)의 2단계 횡단면 회귀식을 추정한 후, 추정된 회귀계수의 평균값과 p-value (괄호 안)를 보여주고 있다. 설명변수로서  $\hat{\beta}_{p,i}$ 는 베타 추정치로서 확률베타모형(SBETA), Rolling OLS, 기업특성치조정 베타모형(Char-Scaled), 조건부 베타모형(Conditional), 이변량 GARCH(1,1)모형에 의해서 각각 추정되었고,  $C_{p,i}$ 는 포트폴리오 특성치로서 규모, 장부가/시가비율, 수익률의 고유변동성( $\sigma_p$ ), 베타 지속성( $\delta_p$ )이 사용되었다(고유변동성과 베타 지속성 값은 확률베타모형에 의해 추정됨). Adjusted R<sup>2</sup>는 횡단면 회귀식 조정결정계수의 평균값이다.

$$r_{p,t} = \alpha_t + \lambda_t \hat{\beta}_{p,t} + \gamma_t C_{p,t} + e_{p,t} \quad (11)$$

	SBETA	OLS	Char-Scaled	Conditional	GARCH
Panel A.					
$\hat{\alpha}_t$	-0.1512 (0.48)	1.4425 (0.05)	1.4589 (0.08)	5.0271 (0.00)	0.8322 (0.26)
$\lambda_t$	0.0764 (0.86)	-1.1746 (0.23)	-0.8353 (0.42)	-5.1573 (0.00)	-0.3961 (0.58)
Adjusted R <sup>2</sup>	61.2%	12.6%	11.6%	11.7%	9.1%
Panel B.					
$\hat{\alpha}_t$	0.3306 (0.22)	2.5903 (0.00)	2.5956 (0.00)	3.8253 (0.00)	2.2008 (0.00)
$\lambda_t$	0.0868 (0.81)	-1.0868 (0.20)	-0.7737 (0.40)	-2.4499 (0.02)	-0.4122 (0.55)
$\hat{\gamma}_t$ (기업규모)	0.0156 (0.38)	0.0364 (0.20)	0.0164 (0.56)	0.046 (0.11)	0.0361 (0.19)
$\hat{\gamma}_t$ (장부가/시가비율)	-0.8280 (0.09)	-2.0531 (0.01)	-2.1423 (0.01)	-2.0241 (0.01)	-2.5791 (0.00)
Adjusted R <sup>2</sup>	70.4%	37.9%	38.6%	38.7%	36.1%
Panel C.					
$\hat{\alpha}_t$	0.6180 (0.03)	3.5479 (0.00)	3.6108 (0.00)	4.6796 (0.00)	2.7219 (0.00)
$\lambda_t$	0.0672 (0.84)	-1.7974 (0.03)	-1.7095 (0.09)	-3.1297 (0.01)	-0.7579 (0.23)
$\hat{\gamma}_t$ (기업규모)	0.0203 (0.22)	0.0417 (0.10)	0.0281 (0.31)	0.0495 (0.08)	0.0488 (0.07)
$\hat{\gamma}_t$ (장부가/시가비율)	-1.5042 (0.03)	-2.6210 (0.01)	-2.6802 (0.01)	-2.3102 (0.01)	-3.3314 (0.00)
$\hat{\gamma}_t$ (고유변동성)	-0.0014 (0.75)	-0.0075 (0.29)	-0.0070 (0.34)	-0.0057 (0.43)	-0.0050 (0.46)
Adjusted R <sup>2</sup>	72.8%	41.9%	41.4%	42.1%	40.5%
Panel D.					
$\hat{\alpha}_t$	0.5829 (0.05)	3.6976 (0.00)	3.7334 (0.00)	4.9173 (0.00)	2.8391 (0.00)
$\lambda_t$	0.0480 (0.89)	-1.9382 (0.02)	-1.8002 (0.07)	-3.3893 (0.00)	-0.8351 (0.18)
$\hat{\gamma}_t$ (기업규모)	0.0331 (0.04)	0.0329 (0.23)	0.0176 (0.54)	0.0442 (0.12)	0.0369 (0.19)
$\hat{\gamma}_t$ (장부가/시가비율)	-1.6345 (0.02)	-2.4399 (0.01)	-2.5753 (0.01)	-1.9763 (0.03)	-3.1871 (0.00)
$\hat{\gamma}_t$ (고유변동성)	0.0001 (0.99)	-0.0099 (0.18)	-0.0092 (0.23)	-0.0087 (0.24)	-0.0072 (0.30)
$\hat{\gamma}_t$ (베타 지속성)	-0.9279 (0.07)	1.5790 (0.05)	1.5631 (0.06)	1.1711 (0.14)	1.8123 (0.03)
Adjusted R <sup>2</sup>	72.6%	42.0%	41.6%	42.1%	40.7%

있어야 하는 것으로 예상되었다. 하지만 실증 분석 결과, 기업규모효과에 대해서는 기업특성치조정 베타모형에 의한 베타가 가장 잘 설명하지만, 장부가/시가비율에 의한 효과는 오히려 확률베타모형이 더 잘 설명하고 있다. 한편 Panel C와 D에서 보면, 수익률의 고유변동성인  $\sigma_b$ 는 대부분의 모형에서 무의미한 음의 계수값을 갖고 있는 반면, 베타의 지속성인  $\delta_b$ 는 대부분의 모형(확률베타모형은 제외)에서 유의미한 양의 계수값을 보이고 있다. 따라서 베타의 지속성 패턴이 수익률의 일부를 설명한다는 사실을 암시하고 있다.

여기서 CAPM 검증과 관련하여 한계점으로 지적할만한 것은 시장위험프리미엄을 나타내는 회귀계수  $\lambda_i$ 값이 거의 모든 모형에서 유의하지 않으며, 또한 음의 값을 보이는 경우도 많다는 점이다. 외환위기 동안(1997.9~1998.9) 음의 시장수익률이 지속되었다는 점을 고려하여 동 기간을 제외한 회귀분석 결과에서도(표에 보고되지 않음)  $\lambda_i$  값이 조금 양의 값에 가까워지긴 하였지만, 유의하지 않은 점은 마찬가지였다. 그러나 이러한 현상은 한국 주식시장에서 시장포트폴리오의 월간 초과수익률이 지난 24년 동안 월평균 -0.31%로 음수였다는 점을 고려하면 당연한 결과라고 할 수 있다. 그나마 베타확률모형에서는  $\lambda_i$  값이 유의하지는 않지만 일관되게 양수로 나오고 있는 점은 위험과 수익간의 관계 측면에서 바람직한 추정결과라고 할 수 있다.

끝으로 확률베타모형과 여타의 시변베타모형에서 추정한 베타가 횡단면 회귀분석에서 포트폴리오의 수익률을 얼마나 많이 설명하는지를 확인해보도록 한다. 이를 위하여 식 (11)에서 각 설명변수들이 독립이라고 가정하면, 각 설명변수들이 포트폴리오 수익률의 변동을 설명하는 능력은 각 설명변수의 분산에 해당 회귀계수의 제곱을 곱한 값과 같게 되며, 설명변수들의 설명력 총합은 조정결정계수와 동일하게 된다. 이러한 방식으로 매월마다 설명력을 측정하고, 그 평균과 표준편차를 살펴보면 어떠한 설명변수가 포트폴리오 수익률 변동을 가장 많이 설명해주는지 확인할 수 있다. <표 5>는 앞의 <표 4>와 동일한 자료에 대해서 계산된 각 변수별로 설명력의 평균과 조정결정계수를 나타내고 있다. 확률베타모형의 베타는 포트폴리오 수익률 변동의 30~50% 정도를 설명하는데 비해, 다른 시변베타모형은 3% 이하로밖에 설명하지 못한다. 결론적으로 과거의 수익률 자료를 이용하여 과거의 베타를 추정하고, 이를 학문적 혹은 실무적인 목적에 이용할 때에는 확률베타모형이 다른 시변베타모형에 비해 우월한 성능을 보임을 확인할 수 있다.

<표 5> 대체적인 시변베타모형에서 추정된 베타의 수익률 횡단면 설명력 비교

아래 표는 <표 4>의 추정결과를 바탕으로 매월 계산된 각 설명변수들의 설명력에 대한 평균값을 보여주고 있다. 각 설명변수들이 독립이라고 가정하면, 포트폴리오 수익률의 횡단면 변동을 설명하는 능력은 각 설명변수의 분산과 회귀계수 제곱의 곱과 같게 되며, 오차항을 제외한 설명변수들의 설명력 총합은 Adjusted R<sup>2</sup> 값과 같게 된다. 예컨대, 아래 횡단면 회귀식의 설명변수인 베타  $\hat{\beta}_{p,t}$ 의 설명력은  $\lambda_i^2 Var(\hat{\beta}_{p,t}) / Var(r_{p,t})$ 와 같이 계산된다.

$$r_{p,t} = \alpha_t + \lambda_i \hat{\beta}_{p,t} + \gamma_i C_{p,t} + e_{p,t} \tag{11}$$

	SBETA	OLS	Char-Scaled	Conditional	GARCH
Panel A.					
$\hat{\alpha}_t$ 의 설명력	17.8%	10.6%	9.7%	10.3%	7.7%
$\hat{\beta}_{p,t}$ 의 설명력	43.4%	2.0%	1.9%	1.4%	1.4%
Adjusted R <sup>2</sup>	61.2%	12.6%	11.6%	11.7%	9.1%
Panel B.					
$\hat{\alpha}_t$ 의 설명력	25.1%	25.5%	26.3%	28.3%	23.9%
$\hat{\beta}_{p,t}$ 의 설명력	35.2%	3.1%	3.0%	2.1%	2.6%
$C_{p,t}$ (규모)의 설명력	3.7%	2.4%	2.5%	2.2%	2.5%
$C_{p,t}$ (장부가/시가)의 설명력	6.4%	7.0%	6.8%	6.1%	7.1%
Adjusted R <sup>2</sup>	70.4%	37.9%	38.6%	38.7%	36.1%
Panel C.					
$\hat{\alpha}_t$ 의 설명력	22.7%	23.8%	25.4%	27.1%	23.6%
$\hat{\beta}_{p,t}$ 의 설명력	30.7%	2.8%	2.1%	1.8%	1.7%
$C_{p,t}$ (규모)의 설명력	2.4%	1.6%	1.8%	1.7%	1.7%
$C_{p,t}$ (장부가/시가)의 설명력	10.4%	8.0%	7.4%	6.8%	7.8%
$C_{p,t}$ (고유변동성)의 설명력	6.6%	5.7%	4.8%	4.6%	5.7%
Adjusted R <sup>2</sup>	72.8%	41.9%	41.4%	42.1%	40.5%
Panel D.					
$\hat{\alpha}_t$ 의 설명력	22.5%	23.4%	24.9%	27.0%	23.4%
$\hat{\beta}_{p,t}$ 의 설명력	29.9%	2.6%	1.9%	1.6%	1.7%
$C_{p,t}$ (규모)의 설명력	2.2%	1.6%	1.9%	1.8%	1.7%
$C_{p,t}$ (장부가/시가)의 설명력	10.4%	7.9%	7.3%	6.5%	7.4%
$C_{p,t}$ (고유변동성)의 설명력	6.8%	5.7%	5.0%	4.6%	5.6%
$C_{p,t}$ (베타지속성)의 설명력	0.8%	0.8%	0.7%	0.7%	0.8%
Adjusted R <sup>2</sup>	72.6%	42.0%	41.6%	42.1%	40.7%

## V. 결 론

본 논문은 국내 주식표본을 대상으로 CAPM 베타의 시간에 따른 변동패턴을 설명하는데 있어서 베이지안 분석기법에 기반을 둔 확률베타모형이 기존의 조건부 베타모형

이나 이변량 GARCH(1,1)모형보다 추정의 정확도나 베타의 설명력 측면에서 더 우월하다는 실증적 증거를 보여주었다. 특히 확률베타모형으로 추정된 베타를 주식수익률의 횡단면 회귀분석에 이용할 경우 베타만으로 수익률 횡단면 변동의 30~50%를 설명하는 반면, 다른 시변베타모형은 3% 이하의 설명력에 그쳤다. 이렇게 확률베타모형에서 추정된 베타의 높은 설명력은 흔히 시장이상현상으로 받아들여지고 있는 기업규모 효과나 장부가/시가비율효과, 고유변동성효과들을 대부분 흡수하는 것으로 나타났다. 이것은 시장이상현상들이 베타 참값의 변동과 밀접하게 관련되어 있으며, 기대수익률 변동과 깊은 관련이 있다는 합리적 자산가격결정의 입장을 지지하는 것이다.

결론적으로 과거 주식수익률 자료를 이용하여 베타 시계열을 추정하고, 이를 학문적 혹은 실무적인 목적에 이용하는데 확률베타모형이 다른 시변베타모형에 비해 우월한 모형임을 확인할 수 있었다. 이러한 대체적인 시변베타모형에 대한 비교연구는 각 모형의 일반적인 성격을 파악하고 목적에 적합한 시변베타모형을 선택하고자 할 때 도움을 줄 것이다. 또한 모델 간의 특성 차이뿐만 아니라 한국 주식시장의 수익률 및 베타의 변동패턴을 다각도로 이해할 수 있는 실증적 근거를 제공할 것으로 사료된다.

## 참 고 문 헌

- Ang, A. and J. Chen, "CAPM over the Long-Run : 1926-2001," Working Paper, Columbia University and University of Southern California, 2003.
- Avramov, D. and T. Chordia, "Predicting Stock Returns," Working Paper, University of Maryland, 2004.
- Ball, R., "Anomalies in Relationships between Securities' Yields and Yield-Surrogates," *Journal of Financial Economics*, 6, (1978), 103-126.
- Banz, R. W., "The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks," *Journal of Financial Economics*, 9, (1981), 3-18.
- Basu, S., "Investment Performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earnings Ratios : A Test of The Efficient Market Hypothesis," *Journal of Finance*, 32, (1977), 663-682.
- Basu, S., "The Relationship between Earnings Yield, Market Value, and Return for NYSE Common Stocks : Further Evidence," *Journal of Financial Economics*, 12, (1983), 129-156.
- Berk, J., R. Green, and V. Naik, "Optimal Investment, Growth Options, and Security Returns," *Journal of Finance*, 54, (1999), 1553-1607.
- Blume, M. E., "On the Assessment of Risk," *Journal of Finance*, 26, (1971), 177-181.
- Breeden, D. T., "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities," *Journal of Financial Economics*, 7, (1979), 265-296.
- Campbell, J. Y., "Intertemporal Asset Pricing without Consumption Data," *American Economic Review*, 83, (1993), 487-512.
- Casella, G. and E. I. George, "Explaining the Gibbs Sampler," *American Statistician*, 46, (1992), 167-174.
- Fama, E. F. and K. R. French, "The Cross-Section of Expected Stock Returns," *Journal of Finance*, 47, (1992), 427-465.
- Fama, E. F. and K. R. French, "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds," *Journal of Financial Economics*, 33, (1993), 3-56.
- Fama, E. F. and K. R. French, "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies," *Journal of Finance*, 51, (1996), 55-84.

- Fama, E. F. and J. D. MacBeth, "Risk, Return, and Equilibrium : Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, 81, (1973), 607-636.
- Person, W. E. and C. R. Harvey, "The Risk and Predictability of International Equity Returns," *Review of Financial Studies*, 6, (1993), 527-566.
- Gelfand, A. E. and A. F. M. Smith, "Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities," *Journal of the American Statistical Association*, 85, (1990), 398-409.
- Gelman, A., J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis*, 1st ed., Chapman & Hall : London, 1995.
- Geweke, J., "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," in J. O. Berger, J. M. Bernardo, A. P. David, and A. F. M. Smith, eds. : *Bayesian Statistics 4*, Oxford University Press : Oxford, 1992.
- Ghysels, E., "On Stable Factor Structures in the Pricing : Do Time-Varying Betas Help or Hurt?" *Journal of Finance*, 53, (1998), 549-573.
- Gomes, J., L. Kogan, and L. Zhang, "Equilibrium Cross-Section of Returns," Working Paper, University of Pennsylvania, 2001.
- Hansen, L. P. and S. F. Richard, "The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models," *Econometrica*, 50, (1987), 1029-1054.
- Jagannathan, R. and Z. Wang, "The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns," *Journal of Finance*, 51, (1996), 3-53.
- Jegadeesh, N. and S. Titman, "Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency," *Journal of Finance*, 48, (1993), 65-91.
- Jostova, G. and A. Philipov, "Bayesian Analysis of Stochastic Betas," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40, (2005).
- Lakonishok, Shleifer, and Vishny, "Contrarian Investment, Extrapolation, and Risk," *Journal of Finance*, 49, (1994), 1541-1578.
- Ledoit, O., P. Santa-Clara, and M. Wolf, "Flexible Multivariate GARCH Modeling with an Application to International Stock Markets," *Review of Economics and Statistics*, 85, (2003), 735-747.

- Lintner, J., "Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification," *Journal of Finance*, 20, (1965), 587-615.
- Merton, R. C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, 41, (1973), 867-887.
- Petkova, R. and L. Zhang, "Is Value Riskier than Growth?" *Journal of Financial Economics*, 78, (2005), 187-202.
- Technical Report CRG-TR-93-1, Department of Computer Science, University of Toronto.
- Robert, C. P. and G. Casella, *Monte Carlo statistical methods*, Springer-Verlag : New York, 1999.
- Roll, R., "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests : Part I," *Journal of Financial Economics*, 4, (1977), 129-176.
- Ross, S. A., "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, 13, (1976), 341-360.
- Shanken, J., "Intertemporal Asset Pricing : An Empirical Investigation," *Journal of Econometrics*, 45, (1990), 99-120.
- Shanken, J., "On the Estimation of Beta-Pricing Models," *Review of Financial Studies*, 5, (1992), 1-33.
- Sharpe, W. F., "Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, 19, (1964), 425-442.

## <부록 A> 확률베타모형의 베이지안 추정법

확률베타모형의 베이지안 추정법은 아래와 같은 일반적인 베이지안 추정 절차를 따른다.

- i) 확률베타모형의 모수의 사전정보를 반영하여 사전확률분포를 설정한다.
- ii) 우도함수를 계산하고 사전확률분포와 우도함수를 결합하여 사후확률분포를 도출한다.
- iii) 사후확률분포를 이용하여 모수를 추정한다.

$$r_{p,t} = \beta_{p,t} r_{m,t} + \sigma_p \varepsilon_{p,t} \quad \varepsilon_{p,t} \sim N(0,1) \quad (A1)$$

$$\beta_{p,t} = \alpha_p + \delta_p (\beta_{p,t-1} - \alpha_p) + \sigma_{\beta p} \nu_{p,t} \quad \nu_{p,t} \sim N(0,1) \quad (A2)$$

본 모형의 모수 ( $\alpha_p, \delta_p, \sigma_{\beta p}^2, \sigma_p^2$ )에 대하여 아래와 같이 사전확률분포를 설정한다.  $\alpha_p$ 는 베타의 장기 무조건부 평균을 의미하는데, 모든 주식의 베타를 가치가중평균하면 1이 되므로 평균이 1인 정규분포를 사전확률분포로 가정한다. 단, 분산에 대해서는 정보가 없으므로  $10^2$ 을 초기값으로 정한다.  $\delta_p$ 는 베타의 지속성을 의미하는데, 베타와 수익률이 발산하지 않기 위해서  $|\delta_p| < 1$ 을 만족해야 하므로 (-1, 1)의 범위 내로 잘린 정규분포를 가정하되,  $\delta_p$ 가 양의 값을 갖는 것이 보편적이므로 평균이 0.5이고 분산에 대해선 마찬가지로 정보가 없으므로  $10^2$ 을 초기값으로 정한다.  $\sigma_p^2$ 와  $\sigma_{\beta p}^2$ 는 각각 포트폴리오 초과수익률 분산과 베타의 조건부 분산을 의미하는데, 이에 대한 사전정보가 없으므로 분산의 사전확률분포 설정시 균등분포의 대응으로 흔히 사용하는 역감마(Inverse-Gamma) 분포를 사전확률분포로 설정한다. 단, 균등분포의 형태를 띠기 위해 형태 모수와 크기모수는 모두 0.001로 한다. 이러한 사전분포의 설정은 연구자의 주관 이 개입되긴 하지만, 샘플의 수가 증가하면 사전분포의 영향은 무시할 만큼 작아지므로 큰 문제가 되지 않는다.

$$p(\alpha_p) = Normal(1, 10^2)$$

$$p(\delta_p) = Truncated_{(-1,1)} - Normal(0.5, 10^2)$$

$$p(\sigma_p^2) = Inverse - Gamma(0.001, 0.001)$$

$$p(\sigma_{\beta p}^2) = Inverse - Gamma(0.001, 0.001)$$



또한 위의 네 가지 모수가 모두 독립이라고 가정한다면 전체 모수의 사전확률분포는 아래와 같은 형태로 표시할 수 있다.

$$\text{prior}(\alpha_p, \delta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2) = p(\alpha_p) \times p(\delta_p) \times p(\sigma_p^2) \times p(\sigma_{\beta p}^2)$$

또한 식 (A1)과 식 (A2)로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$\beta_{p,t} | \beta_{p,t-1} \sim N(\alpha_p + \delta_p(\beta_{p,t-1} - \alpha_p), \sigma_{\beta p}^2)$$

$$r_{p,t} | \beta_{p,t}, r_{m,t} \sim N(\beta_{p,t} r_{m,t}, \sigma_p^2)$$

이를 이용하여 우도함수를 아래와 같이 계산해 낼 수 있다.

$$L(\beta_p, \alpha_p, \delta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2 | r_p, r_m) = \prod_{t=1}^T N(\alpha_p + \delta_p(\beta_{p,t-1} - \alpha_p), \sigma_{\beta p}^2) \times \prod_{t=1}^T N(\beta_{p,t} r_{m,t}, \sigma_p^2)$$

$$\beta_p = (\beta_{p,1}, \beta_{p,2}, \dots, \beta_{p,T})' \quad r_m = (r_{m,1}, r_{m,2}, \dots, r_{m,T})' \quad r_p = (r_{p,1}, r_{p,2}, \dots, r_{p,T})'$$

위와 같이 사전확률분포와 우도함수가 결정되면 베이즈 정리에 의해 사후확률분포는 다음과 같이 표시할 수 있다. 또한 사후확률분포에서 전체 확률의 실수 배를 의미하는 상수항은 계산시 아무런 상관이 없으므로 이를 생략하고 등호 대신 비례 기호를 이용하여 표현한다.

$$h(\beta_p, \alpha_p, \delta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2 | r_p, r_m) \propto \text{prior}(\alpha_p, \delta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2) \times L(\beta_p, \alpha_p, \delta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2 | r_p, r_m)$$

이제 위의 사후확률분포를 이용하여 각 모수를 추정하면 되는데, 위의 분포는 복수의 확률변수를 포함하며 매우 복잡한 형태이기 때문에 Closed-form Solution이 존재하지 않고, 일반적인 수치해석법으로도 분포의 형태를 파악할 수 없기 때문에 아래의 <부록 B>에서 설명하는 깃스샘플링(Gibbs Sampling)이라는 방법을 사용해야 한다.<sup>10)</sup>

## <부록 B> 깃스샘플링(Gibbs Sampling)

깃스샘플링이란  $N$ 개의 확률변수에 대한 결합확률분포함수  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ 가 있을 때,  $f$ 의 조건부 확률분포함수에서 주변확률분포함수의 표본을 추출해내는 기법이며 다음과 같은 알고리즘을 말한다.

10) 확률베타모형의 사후확률분포에 대한 보다 자세한 수식은 Jostova and Philipov(2005)에 기술되어 있으며, 베이지안 추정에 대한 일반적인 해설은 Gelman et al.(1995)을 참조하길 바란다.

$X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_N^{(0)}$ 를 초기화한다.  
 for (i=1 to M) {  
 $X_1$ 의 조건부확률분포함수  $f_1(X_1|X_2^{(i-1)}, \dots, X_N^{(i-1)})$ 로부터  $X_1^{(i)}$ 를 랜덤 추출한다.  
 $X_2$ 의 조건부확률분포함수  $f_2(X_2|X_1^{(i)}, X_3^{(i-1)}, \dots, X_N^{(i-1)})$ 로부터  $X_2^{(i)}$ 를 랜덤 추출한다.  
 .  
 .  
 $X_N$ 의 조건부확률분포함수  $f_N(X_N|X_1^{(i)}, \dots, X_{N-1}^{(i)})$ 로부터  $X_N^{(i)}$ 를 랜덤 추출한다.  
 $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_N^{(i)}$ 를 저장한다. }

사후확률분포 식에서 구하고자 하는 모수만을 변수로 고려하고 나머지 모수들은 모두 실현된 값으로 보게 되면, 일변량 조건부 사후분포를 쉽게 구할 수 있다. 또한 실현된 값으로 고려하는 나머지 모수들 중 확률분포의 실수 배를 의미하는 상수항들은 계산에서 불필요한 부분이므로 모두 생략할 수 있어 수식이 더욱 간단해진다. 이렇게 도출된 각 모수별 조건부 사후확률분포로부터 랜덤샘플을 추출한다. 이를 위와 같이 Markov Chain 형태로 샘플링하면, 각 모수의 주변사후확률분포(Marginal posterior probability distribution)의 랜덤샘플을 조건부 사후확률분포(Conditional posterior probability distribution)로부터 얻어낼 수 있으며, 따라서 각 모수의 점추정치와 표본오차, 신뢰구간 등을 구할 수 있다. 아래의 다섯 가지 모수별 조건부 사후확률분포의 자세한 수식은 Jostova and Philipov(2005)에 수록되어 있다.

$$\begin{aligned}
 &h(\beta_p | \alpha_p, \delta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2, r_p, r_m), \\
 &h(\alpha_p | \beta_p, \delta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2, r_p, r_m), \\
 &h(\delta_p | \alpha_p, \beta_p, \sigma_p^2, \sigma_{\beta p}^2, r_p, r_m), \\
 &h(\sigma_p^2 | \alpha_p, \beta_p, \delta_p, \sigma_{\beta p}^2, r_p, r_m), \\
 &h(\sigma_{\beta p}^2 | \alpha_p, \beta_p, \delta_p, \sigma_p^2, r_p, r_m).
 \end{aligned}$$

깃스샘플링에 대한 보다 자세한 이론적 배경은 Casella and George(1992)와 Gelfand and Smith(1990)에 수록되어 있으며, Matlab 코딩에 관한 사항은 Technical Report (CRG-TR-93-1, University of Toronto)을 참고하길 바란다.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT  
Volume 22, Number 2, Dec. 2005

# Bayesian Analysis of a Stochastic Beta Model in Korean Stock Markets

Bong-Chan Kho\* · Seung-Min Yae\*\*

〈abstract〉

This study provides empirical evidence that the stochastic beta model based on Bayesian analysis outperforms the existing conditional beta model and GARCH model in terms of the estimation accuracy and the explanatory power in the cross-section of stock returns in Korea. Betas estimated by the stochastic beta model explain 30~50% of the cross-sectional variation in stock-returns, whereas other time-varying beta models account for less than 3%. Such a difference in explanatory power across models turns out to come from the fact that the stochastic beta model absorbs the variation due to the market anomalies such as size, BE/ME, and idiosyncratic volatility. These results support the rational asset pricing model in that market anomalies are closely related to the variation of expected returns generated by time-varying betas.

Keywords : CAPM, Stochastic Beta Model, Bayesian Analysis, Time-varying Beta Model, MCMC, Gibbs Sampling

---

\* College of Business Administration, Seoul National University

\*\* Department of Statistics, University of Chicago