

# 극한치이론을 이용한 VAR 추정치의 유용성과 한계 - 우리나라 주식시장을 중심으로 -

김규형\* · 이준행\*\*

## 〈요 약〉

본 연구는 극한치 이론을 적용하여 국내 주식시장에 대한 VAR값을 구하고 이의 유용성을 살펴보았다. 극한치모형으로는 블록최대값모형과 POT 모형을 이용하였고 백테스트를 통하여 이들 모형의 적정성을 알아보았다.

극한치모형 중 블록최대값 모형은 신뢰수준의 변화에 따라 VAR 추정치의 변동이 매우 큰 것으로 나타났으며, 블록의 크기를 어떻게 선택하는가에 따라 모수의 추정치가 크게 달라져 VAR값의 안정성이 떨어지는 것으로 나타났다. 이는 국내 주식시장에 대해 VAR 측정시 블록 최대값 모형을 사용하는 것은 적절치 않음을 시사하는 것이다.

반면 POT모형은 임계치의 선택에 따라서 VAR 값이 달라지기는 하나 상대적으로 안정적인 모습을 보이며, 또한 백테스트 결과 97.5% 이상의 신뢰수준에서 VAR값이 델타 VAR에 비하여 우수한 성과를 보이는 것으로 나타났다. 특히 POT모형은 신뢰수준이 높아질수록 그 우월성이 높은 것으로 나타나, 주로 99% 이상의 높은 신뢰수준의 VAR값을 이용하는 경우에 위험의 관리수단으로 유용한 모형임을 시사하고 있다.

또한 극한치모형은 수익률의 왼쪽 꼬리와 오른쪽 꼬리를 분리하여 추정하고 이를 VAR의 계산에 이용하기 때문에, 수익률분포가 비대칭적 특징을 보이는 우리나라 주식시장의 VAR 측정시 적절한 방법임을 확인할 수 있었다.

주제어 : 극한치이론(Extreme Value Theory), 블록최대값모형, POT(peak over threshold) 모형, QQ-plot, 평균초과 함수, Hill 추정치, VAR

논문접수일 : 2005년 4월 4일

논문게재확정일 : 2005년 5월 30일

\* 중앙대학교 상경학부

\*\* 서울여자대학교 경영경제학부

\*\*\* 이 연구는 2004년도 서울여대 교내 연구비의 지원을 받았다.

## I. 서론

1987년 10월에 발생한 주식시장의 붕괴, 1997년과 1998년에 발생한 아시아 시장의 금융위기 등은 발생빈도가 낮으면서도 금융기관의 파산 등의 극단적인 사태를 야기시킬 수 있는 사건이다. 금융기관의 위험관리자나 투자자의 입장에서는 이러한 극단적인 사건이 미칠 수 있는 영향을 측정하고 이를 관리하는 것이 일반적인 위험을 관리하는 것에 더하여 중요한 관심사가 되지 않을 수 없다.

위험관리 실무에서 널리 사용되는 있는 VAR(Value at Risk)는 대부분 정규분포를 가정하고 관찰된 모든 자료를 이용하여 모수를 구하여 추정한다. 그러나 주가의 과거 수익률 자료를 살펴보면 정규분포보다 꼬리부분이 훨씬 두터운 형태를 나타내는 것으로 알려져 있다. 이런 점에 비추어 볼 때 정규분포를 이용한 접근법은 두꺼운 꼬리 때문에 나타날 수 있는 위험에 대해 정확히 인식할 수 없는 문제점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 t분포나 변동성의 이분산성을 고려한 GARCH모형 등을 사용하는 방법들이 제시되기도 하였지만 이 방법들은 꼬리 모양을 분석할 수 있는 확실한 방법이 될 수는 없다. 극한치이론은 이러한 극단적인 사건을 분석하는데 적합한 분포이론으로서 일반적인 방법으로 측정된 VAR를 보완할 수 있는 수단이 될 수 있다.<sup>1)</sup>

극한치 이론을 적용한 접근방법의 장점으로서 우선 일반적인 VAR모형에서 위험을 측정하는 것은 대다수의 자료가 평균 근처에 위치하기 때문에 분포의 중심부 근처에서만 정확하게 측정되므로, 관찰치가 많지 않은 극한치들이 모여 있는 꼬리 부분의 통계적 성질을 규명하기에는 적절하지 않은 반면 극한치 모형에서는 이들 극한치들만을 따로 고려하기 때문에 꼬리부분에 관한 유용한 정보를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 특히 주식수익률을 비롯한 금융자료들은 대부분 꼬리 부분이 두터운 분포를 가지는 것이 알려져 있으므로 꼬리부분의 자료가 충분할 수 있다는 점에 비추어 볼 때 극한치들의 특징을 보다 정확히 파악할 수 있다는 장점이 있다.

또한 금융기관이나 정부규제기관이 관심을 갖는 부분은 재앙적 시장위험(catastrophic market risk)과 이들 위험에 대비한 자본금의 적정성을 파악하는데 유용하다. 앞으로도 일상적인 가격의 움직임과는 달리 급격한 자산의 움직임이 일어날 가능성이 있

1) 역사적 시뮬레이션 방법으로 정규분포를 가정한 VAR 추정치를 보완할 수 있으나 이 방법이 모수를 이용하여 VAR값을 추정하지 못하고 과거 발생한 사건에 지나치게 의존하는 문제점을 가지고 있다.

다는 점을 고려 할 때 금융자료의 꼬리 부분을 따로 분리하여 분석하는 것은 중요한데 극한치이론은 이에 대한 분석에 유용한 틀을 제공한다.

극한치 분포에 대한 해외의 연구는 비교적 활발하지만<sup>2)</sup> 국내의 연구는 아직 많이 이루어지지 않고 있다. Danielsson과 de Vries(1997)은 극한치분포 모형의 VAR 추정치를 모수적 방법과 역사적 시뮬레이션에 의해 추정된 VAR값과 비교하였다. Embrecht (1999)는 극단치 분포가 두터운 꼬리에 대해 중요한 방법론을 제공하지만 꼬리부분을 모형화하기 위해 필요한 수학적 가정들을 실제 적용하는 데는 어려움이 있음을 지적하면서 그 한계를 논하였다. 또한 Diebold et al.(2000)은 극한치 이론을 VAR 추정에 적용할 때 고려해야 될 문제점들을 지적하고 있다. 이들의 지적은 극한치이론을 이용해 구한 모수추정치 대한 통계적 이론이 아직 정립되지 않았음에 기인한다.

국내에서는 한상범(2000), 문성주 외(2003)등의 연구에서 극단치이론을 이용하여 VAR를 구하고 이들의 성과를 분석하였다. 한상범(2003)에서는 우리 주식시장에 대해 POT(peak over threshold) 모형을 이용하여 분석하고 극한치 모형이 VAR 추정에 유용한 모형임을 보였다. 그러나 임계치를 선택하는 방법이 자의적이고 VAR 결과치도 99% 신뢰수준에 대해서만 분석하고 있어 극한치 모형이 임계치의 선택에 따라 VAR 측정치가 얼마나 달라지는지 또 여러 신뢰수준의 VAR 수치는 어떻게 다른지에 대한 분석은 행해지지 않은 채 극한치 모형에 의한 VAR 측정이 델타노말 방법에 비해 적정하다고 결론을 내리고 있다. 문성주 외(2003)에서는 원-달러 환율에 대해 극한치이론에 의한 VAR 추정치를 분석하였다. 이 연구에서는 극한치분포로 GEV(generalized extreme value) 분포와 GPD(generalized Pareto distribution)이 이용되고 있지만 역시 신뢰수준 99%의 VAR 값만이 비교되고 있으며 극한치 이론에 따른 VAR 측정치의 특성을 보여주는 데는 미흡한 것으로 나타나고 있다.

따라서 본고에서는 우리나라의 주식시장에 대하여 극한치이론의 두 가지 접근법인 블록 최대값모형과 POT(peak over threshold) 모형을 적용하여 VAR를 구하고 이들을 서로 비교분석한다. 또한 POT 모형에서 임계치를 구하는 여러 가지 대체적인 방법들을 선택하여 모수와 VAR의 추정치가 얼마나 달라지는 지에 대해서도 알아보고, 신뢰수준의 변화에 따른 VAR의 변동을 살펴봄으로써 극한치이론의 유용성과 한계 및 실무적 시사점을 찾고자 한다.

2) McNeil(1999), McNeil and Frey(2000), Neftci(2000), Hosking and Wallis(1987), Gilli and Kellezi (2003) 등 참조.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 극한치 이론으로 일반극한치분포와 일반파레토분포에 대하여 살펴보고 이들 모형의 모수에 따른 VAR 추정치에 대하여 알아본다. 3장에서는 실증분석을 행한다. 우리나라의 종합주가지수의 수익률을 이용하여 극한치 분포의 모수와 VAR를 추정하고 백테스트를 통하여 각 모형의 적정성을 분석한다. 마지막으로 4장에서는 실증분석의 결과와 본 연구의 한계점 그리고 향후 연구방향에 대해 요약한다.

## II. 극한치이론과 VAR

실제 자료의 극한치에 대한 분석에는 크게 두 가지 접근방법이 있다. 하나는 오래 전부터 이용되었던 블록최대값 모형(block maxima model)이고 다른 하나는 최근 들어 각광을 받기 시작한 POT(peak over threshold)모형이다. 블록최대값 모형은 동일한 분포로부터 관찰된 대규모의 표본으로부터 추출된 최대값에 대한 모형이다. 예를 들어 특정상품을 거래하는데 따르는 이익과 손실을 시단위 또는 일단위로 측정했을 때 이들 값들의 분기단위 또는 년단위의 최대값을 선택하고 이들을 모형화하는 방법이다.

POT모형은 일정한 임계치를 넘어서는 관찰치들을 분석대상으로 하는 모형으로 극한치들에 대한 자료를 좀더 효율적으로 이용하는 방법론이다. 이 두 가지 모형 중에서는 어느 하나가 다른 것보다 확실히 더 나은 방법이라고 단정하기는 어렵다. 따라서 본고에서는 두 방법에 따라 우리나라의 주식시장의 극치분포를 추정하고 이에 따른 VAR 값을 비교해 보기로 한다.

### 1. 블록최대값 모형(block maxima model)

먼저 block maxima에 적용되는 Fisher-Tippet 정리에 대하여 살펴보자. Fisher-Tippet 정리는 표준화되고 중심화된 최대값(centered and normalized maxima)의 극한 분포(limiting distribution)가 어떤 형태를 갖는지에 대한 정리이다.

Fisher-Tippet 정리 :  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 동일하고 독립적인 (i.i.d)인 확률변수라고 할 때 이중에서의 최대값  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 은 적절하게 선택된  $c_n > 0, d_n \in R$ 에 대하여 비축중(非縮重) 분포함수(non degenerate distribution function)  $H$ 에 접근한다.

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \rightarrow H \quad (n \rightarrow \infty)$$

합이나 평균값에 대한 논의에서 중심극한정리가 중요하게 이용되는 것과 마찬가지로 Fisher-Tippett정리는 최대값에 대한 논의에서 중심적인 위치를 차지한다. Fisher-Tippett 정리에 의하면  $n$  값이 커짐에 따라 블록최대값(block maxima)은 다음의 일반 극한치분포(GEV ; generalized extreme value distribution)를 따른다. GEV분포함수는 아래와 같다.<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} H_{\xi, \mu, \sigma}(x) &= \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \xi \neq 0 \\ &= \exp\left(-e^{-\frac{x - \mu}{\sigma}}\right) & \xi = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0$ 이며  $\xi$ 는 모양을 결정하는 모수로서 꼬리의 두께를 측정하는 꼬리지수(tail index)이다.  $\mu$ 는 위치모수로서  $x$ 의 중심화경향을 측정하며,  $\sigma$ 는  $x$ 의 퍼짐의 정도를 측정하는 모수이다.

만약  $\xi > 0$ 이면 위의 분포는 Frechet분포라고 하고 자산수익률과 같은 재무관련 자료에 적합한 분포로서 일반적으로 재무관련 자료의  $\xi$  값은 0.25부터 0.5사이의 값을 갖는 것으로 알려져 있다. 이 범주에 속하는 분포로는 Pareto 분포, t 분포, Burr분포, log 감마분포, Cauchy분포 등이 있다.  $\xi < 0$ 이면 위의 분포는 Weibull분포라고 하고 이는 정규분포보다 더 얇은 꼬리를 갖는다. 이 범주에 속하는 분포로는 일양분포, 베타분포 등을 들 수 있다.  $\xi = 0$ 이면 이는 Gumbel분포라고 하고 꼬리의 모양은 정규분포와 일치한다. 이 범주에 속하는 분포로는 정규분포, 로그 정규분포, 감마 분포등을 들 수 있다.  $\xi$  값이 0에 가까워지면  $\left(\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \rightarrow e^{-\frac{x - \mu}{\sigma}}\right)$ 이 성립하므로 Frechet분포와 Weibull분포는 Gumbel분포에 접근한다. 즉 Gumbel분포는 Frechet 분포와 Weibull 분포의 극한형태이다.

일반적으로 표본최대값의 극한분포의 형태를 미리 알 수는 없다. 따라서 일반적인 형태로 극한분포를 나타내고 이에 대하여 각 모수들을 추정함으로써 어떤 분포를 따르는지를 결정한다.

3) Jenkinson(1955) 참조.

일단 해당분포에 대한 모수가 구해지면 EV-VAR를 구할 수 있다.  $p$  백분위수를  $x^*$  라하면(즉  $x$ 가  $x^*$ 보다 작을 확률을  $p$ 라 하면) 다음의 관계식이 성립한다.

$$\ln(p) = -\left(1 + \xi \frac{x^* - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad \text{if } \xi \neq 0 \quad (2)$$

$$\ln(p) = -\exp\left(-\frac{x^* - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{if } \xi = 0$$

이를  $x^*$ 에 관하여 정리하면 신뢰수준  $p$ 하에서 EV-VAR값 ( $1 = x^*$ )은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$VAR_p = \mu + \frac{\sigma}{\xi} [(-\ln(p))^{-\xi} - 1] \quad \text{if } \xi \neq 0 \quad (3)$$

$$VAR_p = \mu - \sigma \ln[-\ln(p)] \quad \text{if } \xi = 0$$

꼬리지수  $\xi$ 값에 따라 VAR값이 어떻게 달라지는가를 보기 위해 평균을 0, 분산을 1 로 고정시켜 놓고 꼬리 지수에 따른 VAR를 구하여 보았다.

<표 1> GEV분포에서 꼬리지수  $\xi$ 의 크기와 VAR와의 관계

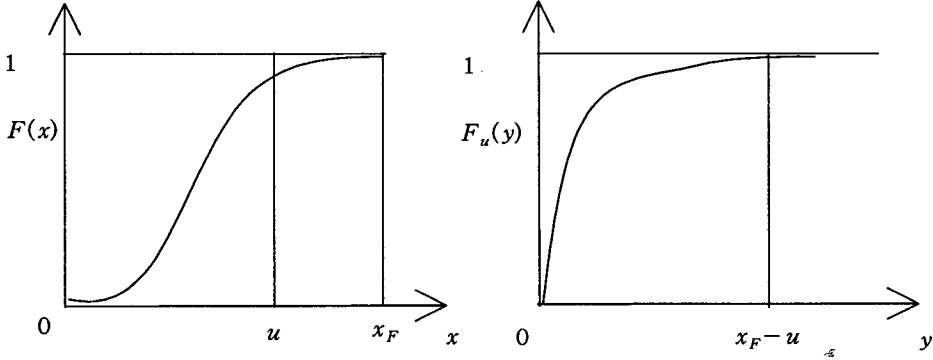
신뢰수준	모양모수 $\xi$ 의 크기						
	0	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
95%	2.9702	4.41	5.74	9.63	11.44	15.86	18.28
96%	3.19853	5.90	6.33	11.79	12.81	18.94	20.71
99%	4.60015	8.63	10.91	20.07	24.15	35.46	42.10
99.50%	5.29581	11.03	13.99	26.41	32.28	48.27	58.53

<표 1> 에서 알 수 있듯이  $\xi$ 값이 클수록 꼬리가 더 두꺼운 모양을 가지므로 신뢰수준의 변화에 대하여 VAR의 변화가  $\xi$ 값이 낮은 경우에 비하여 더 큰 것을 볼 수 있다.

## 2. POT(peak over threshold)모형

확률변수  $X$ 에 대한 확률분포  $F$ 가 [그림 1]과 같이 주어질 때 어떤 특정한 임계치  $u$ 를 넘어서는  $x$ 에 대한 확률분포함수  $F_u$ 를 추정하는 것에 대하여 생각해보자.

[그림 1] 확률분포함수  $F$ 와 조건부 확률분포함수  $F_u$



확률분포함수  $F_u$ 는 조건부 초과분포함수(cedf : conditional excess distribution function)로서 식 (4)와 같이 정의된다.

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad 0 \leq y \leq x_F - u \quad (4)$$

$F_u$ 와  $F$ 의 사이에는 다음의 식이 성립한다.

$$F_u(y) \equiv \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (5)$$

확률변수  $X$ 가 실현되는 주요구역은 0부터  $u$  사이이므로 이 구간에서의  $F$ 를 추정하는 것은 아무런 문제가 없다. 그러나  $F_u$ 를 추정하는 것은 관찰치의 수가 아주 적기 때문에 상당히 어려운 문제가 따른다.

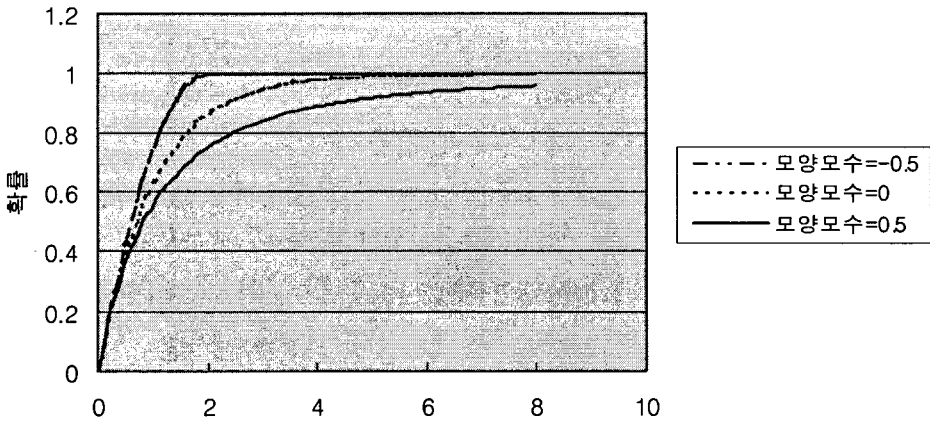
여기서 극한치이론에서 사용되는 Pickands-Balkema-De Haan 정리를 이용할 수 있다. Pickands-Balkema-De Haan 정리에 의하면 높은 임계치(high thresholds)를 일정한 값으로 지정할 때 이를 초과하는 값들이 갖는 극한분포는 일반파레토분포를 따른다. 확률변수  $X$ 가 일반화된 파레토분포 (Generalized Pareto distribution : GPD)를 따른다는 사실은  $X \sim GPD(\xi, u, \sigma)$ 로 표현한다. 이 확률변수의 누적확률분포함수는 임계치  $u$ 가 임의로 주어질 때 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$F_{\xi, u, \sigma}(x) = 1 - \left[ 1 + \xi \frac{(x-u)}{\sigma} \right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad \text{for } \xi \neq 0 \quad (6)$$

$$F_{\xi, u, \sigma}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma}\right) \quad \text{for } \xi = 0$$

모수  $\xi$ 는 분포의 모양을 결정하는 모수(shape parameter)로서 특히 오른쪽 꼬리가 어떤 모양으로 줄어드는지(꼬리의 행태)를 나타낸다.  $\xi > 0$  일 때 파레토분포(ordinary Pareto distribution)를 한다고 하며 금융시계열자료에 적절한 분포이다. 또한  $\xi > 0$ 일 때  $k \geq \frac{1}{\xi}$  에 대하여  $E(X^k)$ 는 무한대의 값을 갖는다. 예를 들어  $\xi > 0.5$ 일 때 GPD의 분산은 무한대이며  $\xi > 0.25$  일 때 4차 적률이 무한대이다. 주식이나 환율의 수익률에 대한  $\xi$ 의 추정치는 거의 언제나 0.5이하의 값을 갖는다. 다시 말해서 수익률의 분산은 유한한 값을 갖는다.  $\xi = 0$ 일 때 GPD는 지수분포에 해당하며  $\xi < 0$ 일 때는 파레토 II형의 분포를 갖는다고 한다. [그림 2]는  $\sigma = 1$ 일 때  $\xi$ 의 크기에 따른 일반파레토분포의 형태를 보여준다.

[그림 2] 모양모수에 따른 일반파레토분포



[그림 2]에서 알 수 있듯이 모양모수  $\xi$ 값이 클수록 두꺼운 꼬리를 갖는 것을 알 수 있다.

다음으로  $F(x)$ 와  $F_u(y)$  사이의 관계로부터  $VaR_p$ 를 구해보자. 우선 식 (5)로부터 다음 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$F(x) = (1 - F(u)) F_u(y) + F(u) \tag{7}$$

$F_u(y)$ 에 GPD를 대입하고,  $F(u)$ 에 추정치  $\frac{n - N_u}{n}$ 를 대입하여 식 (8)을 얻는다.



여기서  $n$ 은 총관찰치의 개수이고  $N_u$ 는 임계치  $u$ 를 초과하는 관찰치의 개수이다.

$$F(x) = \frac{N_u}{n} \left( 1 - \left( 1 + \frac{\xi}{\sigma} (x - u) \right)^{\frac{-1}{\xi}} \right) + \left( 1 - \frac{N_u}{n} \right) \quad (8)$$

이를 다시 정리하면  $F(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left( 1 + \frac{\xi}{\sigma} (x - u) \right)^{\frac{-1}{\xi}}$ 이 된다. 이를 다시  $p$ 에 관하여 정리하여  $VaR_p$ 의 식 (9)를 얻을 수 있다.

$$VaR_p = u + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( \frac{n}{N_u} p \right)^{-\xi} - 1 \right) \quad (9)$$

### Ⅲ. 실증분석

#### 1. 자료

본 논문의 실증분석에서는 금융자산에 대한 일별자료를 이용하여 앞에서 논의된 방법들에 의해 극치분포의 모수를 추정하고, 이로부터 여러 유의수준에서 VAR를 추정하여 이를 비교한다.

실증분석에 사용된 자료는 우리나라의 1980년 1월 1일부터 2003년 12월 31일 사이의 KOSPI 일별주가지수 수익률자료로서 총관측치수는 6543개이다.

<표 2> 일별자료의 기초통계량

	평균	최소	최대	표준편차	왜도	첨도
주가수익률 (KOSPI)	0.000108	-0.1202	0.0850	0.02078	-0.0498	5.3583

<표 2>에는 일일주가수익률에 대한 기초통계량이 소개되어 있다. <표 2>에서 발견되는 특징은 첨도(kurtosis)가 3보다 매우 큰 값을 가지고 있고, 왜도(skewness) 또한 그 값이 크다는 것이다. 이는 수익률분포가 표준정규분포에 비해 꼬리부분이 두터우며 비대칭적임을 의미한다. 따라서, VAR를 보다 정확하게 추정하기 위해서는 자료의 이러한 통계적 특성들을 모형에 고려하는 것이 필요한데 앞에서 논의된 VAR의 극치분포모형은 이러한 경험적 특성이 잘 반영되어 있다.

일반적으로 극치에 대한 분석을 할 때는 손실에 대한 분석이므로 확률분포의 왼쪽꼬리부분에 한정하여 분석을 한다. 그러나 본 연구에서는 모수를 추정할 때 왼쪽꼬리와 오른쪽꼬리로 나누어 추정하도록 한다. 이는 금융기관이 보유하는 주식관련 포지션의 VAR 수치가 주식수익률의 손실에 해당하는 왼쪽꼬리 뿐 아니라 오른쪽꼬리 부분으로부터도 영향을 받기 때문이다.<sup>4)</sup>

## 2. 블록최대값 모형(block maxima model)의 추정

일별수익률자료를 이용하여 블록 최대값모형에서 모수를 추정할 때 결정해야 할 것은 블록을 어떻게 선택할 것인가이다. 일반적으로 계절적인 효과를 없애기 위해서는 년 단위를 선택하는 것이 좋을 것이나 이 경우 관찰치의 수가 24년간의 자료로 너무 적어 추정치의 효율성이 떨어질 것이므로 블록을 더 나눈 1개월, 분기, 반기를 분석의 대상으로 한다.

예를 들어 3개월 단위로 블록을 나눈다면 j번째 블록에서 3개월 동안의 관찰치 n개로부터 구한 최대값은 다음과 같이 표시할 수 있을 것이다.  $M_n^{(j)} = \max(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$  이렇게 해서 구해진  $M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(k)}$ 에 대하여 위에서 살펴본 GEV를 적용하여 각각의 모수들과 VAR값을 구하면 된다.

GEV의 모수들을 추정하는 방법으로는 모수적인(parametric) 방법과 준모수적(semi-parametric) 방법이 있다. Hill(1975)에 의해 처음으로 제시된 준모수적 추정방법은 꼬리분포에 대한 사전적인 가정없이 극값들(extremes)만을 사용하여 꼬리지수를 추정하는 방법이다. 이에 비해 모수적인 추정방법은 명시적인 분포함수를 이용하여 모수를 추정하는 방법으로 적률법(moments method), 확률가중적률법(probability weighted moments) 그리고 최우추정법(maximum likelihood method)이 있다.<sup>5)</sup>

여기서는 블록최대값이 GEV분포에 따른다고 가정하여 최우추정법으로 모수를 추정하고자 한다. 따라서 우도함수(likelihood function)를 구성하는 데 사용되는 누적확률분포함수는 다음과 같다.

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = H_{\xi}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

4) 예를 들어 선물외의 매도, 풋옵션의 매입, 콜옵션의 매도 등과 같은 파생상품포지션은 주가가 상승할 때 손실을 입는다.

5) Pickands(1975), Kekkera et al.(1989), Kekkera and DeHaan(1989) 참조.

따라서 로그우도함수는 식 (10)과 같다.

$$L(\xi, \mu, \sigma; x) = \prod_i^n \log(h(x_i)) \quad x_i \subset M \quad (10)$$

여기서  $h(\xi, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sigma} (1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma})^{(-\frac{1}{\xi} - 1)} \exp(-(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}})$ 는  $\xi \neq 0$ 이고  $1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0$  일 때의 확률밀도함수이다.  $\xi = 0$  일 때의 확률밀도함수는 다음의 식 (11)과 같다.

$$h(\xi, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sigma} \exp(-\frac{x - \mu}{\sigma}) \exp(-\exp(\frac{x - \mu}{\sigma})) \quad (11)$$

한편 본 연구에서 관심을 갖는 것은 모수의 추정 그 자체라기보다는 추정된 GEV의 백분위수이다. 특히 블록최대값 모형은 정의된 블록과 관련되어 일정기간 동안에 한번 발생할 수 있는 손실을 알려주는데 유용하다. 예를 들어 블록을 1년 단위로 나눈 경우라면 k년 동안에 한번 초과할 수 있는 수익률  $R^k$ 의 크기는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R^k = H_{\xi, \sigma, \mu}^{-1}(1 - \frac{1}{k})$$

이 식을 바탕으로  $VAR^k$ 값을 정의하면 식 (12)와 같다.

$$VAR^k = \mu + \frac{\sigma}{\xi} [(-\ln(1 - \frac{1}{k}))^{-\xi} - 1] \quad \text{if } \xi \neq 0 \quad (12)$$

$$VAR^k = \mu + \sigma \ln(-\ln(1 - \frac{1}{k})) \quad \text{if } \xi = 0$$

$VAR^k$ 는 k 블록기간동안 발생할 수 있는 최대 손실액을 정의하는 값으로 예를 들어 블록을 1년 단위로 나눈 경우, k=10이라면  $VAR^{10}$ 은 1년 동안에 입을 수 있는 최대의 손실이  $VAR^{10}$ 을 초과하는 것은 10년에 한번 정도 발생한다는 의미이다.<sup>6)</sup>

<표 3>은 왼쪽 꼬리부분에 대한 블록최대값 모형의 모수 추정치와 그에 따른 최대 손실 수익률을 보여주고 있다.

6) 신뢰수준에 따른 VAR수치는 3절에서 계산하고 이를 다른 방법과 비교한다.

&lt;표 3&gt; 왼쪽꼬리 block maxima모형의 추정치

블록의 크기(n)	추정치			최대손실 수익률(%)				
	$\xi$	$\mu$	$\sigma$	3년	5년	10년	50년	100년
월	0.2807 (0.0033)	1.648 (0.00479)	1.006 (0.00335)	7.822	9.344	11.78	19.64	24.27
분기	0.2534 (0.0095)	2.446 (0.02225)	1.249 (0.01509)	6.668	7.979	10.03	16.38	20.01
반기	0.1935 (0.0174)	2.943 (0.06148)	1.495 (0.03929)	5.957	7.159	8.944	14.03	16.74

\* ( )의 숫자는 추정치의 표준오차임.

<표 3>에서 알 수 있듯이 평균과 분산의 크기는 블록의 크기가 커짐에 따라 증가하는 경향이 있다. 이는 블록의 크기(n)를 크게 할수록 관찰치  $M_n^{(j)}$ 이 보다 큰 값들로 선택되기 때문이다. 한편 모양모수  $\xi$ 의 추정치도 블록의 크기에 따라 다르다. 추정치에 의하면 블록의 크기를 반기로 선택한 경우를 제외하고  $\xi$ 값은 0.25보다 큰 값을 보여서 일반적인 손실에 관한 재무자료의 특성을 지니고 있는 것을 볼 수 있다. 그러나 그 값은 블록의 크기가 커짐에 따라 작아지는 경향을 보이고 있다. 이는 월별 최대값을 이용하여 추정한 GEV분포의 꼬리가 반기별 최대값을 이용하여 추정한 GEV분포의 꼬리보다 더 두꺼운 모양을 가지는 것임을 나타내는 것으로 극한치VAR값도 블록의 크기에 따라 상당한 차이를 보일 것임을 시사하는 것이다.

이러한 현상은 <표 3>에 나타나 있는 최대손실 수익률로 확인할 수 있다. <표 3>의 최대손실 수익률은 해당 년도 내에 한번 발생할 수 있는 최대손실수익률을 나타내는 수치로, 예를 들어 월별 자료를 이용한 모수의 추정치를 사용하면 9.34%의 손실은 5년에 한번 발생할 수 있고, 11.78%의 손실은 10년에 한번, 19.64%의 손실은 50년에 한번, 24.27%의 손실은 100년에 한번 발생할 수 있음을 의미한다. 그러나 이러한 최대손실 수익률은 블록의 크기를 다르게 하면 차이가 난다. 즉 10년에 한번 발생할 수 있는 최대손실도 월자료의 경우에는 11.78%인 반면, 분기의 경우에는 10.03%, 반기의 경우에는 8.944%로 블록의 크기를 크게 함에 따라 작아진다.

<표 4>는 오른쪽 꼬리부분에 대한 블록최대값 모형의 모수 추정치와 그에 따른 최대손실 수익률을 보여주고 있다.

오른쪽 꼬리의 경우에도 각 모수들의 추정치는 왼쪽꼬리에서와 동일한 패턴을 보인다. 다만 다른 점은 전체적으로  $\xi$ 값이 왼쪽꼬리에 비하여 작아서 꼬리부분이 더 얇은 모습을 보인다는 것이다. 즉 오른쪽꼬리의 경우  $\xi$ 값이 모두 0.25보다 작은 것을 볼

수 있다. 이는 곧 우리나라에서 주식을 매입하는 경우, 극단적인 손해의 크기가 극단적인 이익의 크기보다 더 크다는 것을 의미한다고 볼 수 있다. 따라서 최대손실 수익률도 모든 경우에 있어서 <표 3>에 비하여 작은 것을 볼 수 있다. 이는 정규분포와 같은 대칭분포를 가정하고 분석을 하는 것은 한계가 있다는 사실을 뒷받침하여 준다고 볼 수 있다.

<표 4> 오른쪽꼬리 block maxima모형의 추정치

블록의 크기(n)	추정치			최대손실 수익률(%)				
	$\xi$	$\mu$	$\sigma$	3년	5년	10년	50년	100년
월	0.1667 (0.00301)	2.018 (0.00536)	1.067 (0.00334)	7.222	8.266	9.825	14.21	16.49
분기	0.1304 (0.00906)	2.822 (0.0200)	1.183 (0.01207)	6.223	7.112	8.401	11.84	13.56
반기	0.1070 (0.02454)	3.149 (0.03723)	1.234 (0.02486)	5.452	6.228	7.463	10.48	11.94

\* ( )의 숫자는 추정치의 표준오차임.

### 3. POT(peak over threshold)모형의 추정

#### 1) 임계치 결정

GPD의 모수를 추정할 때 중요한 것은 임계치  $u$ 를 어떻게 결정할 것인가이다.  $u$ 를 너무 큰 값으로 선택하면 모수 추정에 사용되는 자료의 수가 작아져 추정치의 신뢰성이 낮아진다. 반면에  $u$ 값으로 너무 적은 값을 선택하면 관찰치는 늘어나지만 분포의 중심에 가까운 자료들을 사용하게 되어 추정된 모수가 편의(biased)를 가질 수 있다. 지금까지의 연구로는 임계치의 선택에 대한 만족할 만한 추정방법이 개발되어 있지 않다. 다만 Quantile 그래프(QQ-plot), 평균초과 함수, Hill의 그래프 등의 방법을 이용하여 rule of thumb방법으로 임계치를 결정하는 것이 일반적으로 제시되고 있다.

먼저 QQ-plot에 대하여 살펴보자. 관찰치  $X_1, \dots, X_n$ 을 크기 순으로 정리하여 순서통계량을 만들어 실증분포를 생성한 후 모수분포와 실증분포를 비교하는 방법이다.  $F$ 를 추정된 모수를 이용한 모수분포,  $F_n$ 을 실증분포라고 하면 QQ-plot은 다음과 같이 정의된다.

$$\left\{ X_{k,n}, F^{-1}\left(\frac{n-k+1}{n}\right), k=1, \dots, n \right\} \quad (13)$$

따라서 모수분포와 실증분포가 일치하면 Q-Q plot은 선형모양을 갖는다. 이런 특성을 이용하여, 실증분포에 대하여 여러 가지 추정된 모수분포를 대응시켜 QQ-plot을 그려보고 이 QQ-plot이 선형에 가장 가까운 형태를 보이는 분포를 최선의 모수분포로 선택하는 방법이다.

극한치이론에서는 QQ-plot의 모수분포로 지수분포를 사용한다. 만약 자료가 지수분포로부터 추출된 것이라면 직선위에 모든 점이 그려질 것이다. 만약 오른쪽 끝 모양이 오목한 형태(concave)를 띄면 지수분포보다 꼬리가 두껍다는 것을 나타내고, 볼록한 형태(convex)를 띄면 이는 지수분포보다 꼬리가 얇다는 것을 나타낸다. 그러나 다양한 모수에 대해 QQ-plot을 그려보아야 하기 때문에 번거로운 방법이다. 따라서 본 연구에서는 임계치를 선택하는데 QQ-plot을 사용하지 않고<sup>7)</sup> 평균초과 함수, Hill의 그래프의 방법을 이용하고자 한다.

임계치  $u$ 를 선택하는 다른 방법은 평균초과함수(mean excess function : MEF)를 사용하는 것이다. 임계치  $u$ 를 초과하는 표본평균초과함수는 다음과 같이 정의된다.

$$e(u) = E(X - u | X > u), 0 \leq u \leq x_F \quad (14)$$

만약  $X$ 가 모수가  $\lambda$ 인 지수분포를 따르면  $u > 0$ 에 대하여 평균초과함수의 값은  $e(u) = \lambda^{-1}$ 이고 일반파레토 분포에 대해서는 다음과 같다.

$$e(u) = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi} \quad \sigma + \xi u > 0 \quad (15)$$

두꺼운 꼬리를 금융자료에 대한 평균초과함수는 지수분포의 상수값인  $e(u) = \lambda^{-1}$ 와 선형값인  $e(u) = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}$  사이에 있다. 실제의 자료에 대한 평균 초과값은 식 (16)을 이용하여 구한다.

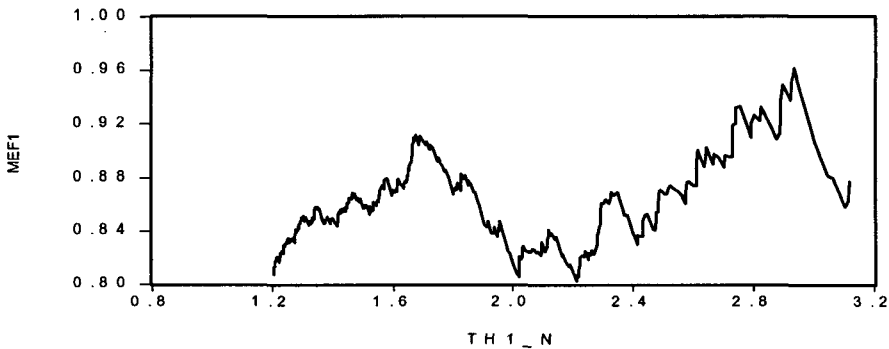
7) GPD의 여러 모수에 대해 QQ-plot을 확인하기 보다는 지수분포를 모수분포로 하여 KOSPI 수익률분포의 꼬리가 두꺼운지를 확인하는데 QQ-plot을 이용하였다. 이 결과 KOSPI 수익률의 분포는 꼬리가 두껍다는 것을 확인할 수 있었다.

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)}{\sum_{i=1}^n 1_{(X_i > u)}} \quad (16)$$

MEF는 임계치(threshold)  $u$ 를 초과하는 값들의 합을 임계치를 초과하는 자료의 개수로 나눈 평균값이다. 만약 MEF가 어떤 특정한  $u$ 값 이상에서 양의 기울기를 가지면 이는  $u$ 값 이상인 자료가  $\xi$ 가 양인 GPD를 따른다는 것을 의미한다. 따라서 이 점을  $u$ 값으로 선택한다.

[그림 3]은 KOSPI 수익률의 왼쪽꼬리 부분에 대한 MEF그래프이다. 그래프에서 보면  $u$ 값이 1.2 이상인 경우 MEF가 양의 기울기를 갖기 시작한다. 그러나 이러한 형태는 지속적이지 못하고 1.7이 넘어서는 음의 기울기를 보이다 다시 증가한다. MEF 그래프에 의하면 어느정도 지속적으로 양의 기울기를 보이는  $u$ 의 값은 2.418이다. 따라서 MEF를 이용한 경우의 적절한  $u$ 값은 2.418이다. 그러나 여기서는 2.214의 값도 추가적으로 고려하고자 한다. 이는 그래프의 형태가 애매한 경우가 있을 수 있다는 점<sup>8)</sup>, 그리고 좀 더 많은 관찰치를 GPD의 모수추정에 이용하고자 하기 때문이다.<sup>9)</sup>

[그림 3] 왼쪽 꼬리의 Mean Excess Function



임계치를 결정하는 또 다른 방법은 Hill 그래프를 사용하는 방법이다. Hill은 꼬리가 두꺼운 Frechet 분포의 경우,  $\xi$ 에 대해 식 (17)과 같은 추정치를 제안하였다.<sup>10)</sup> 즉 관찰치  $X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_n$ 을 크기 순서에 따라 정렬하고  $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(n)}$

8) 실제  $u$ 는 2.3-2.35의 값에서 기울기가 음의 형태를 보이지만 2.214 이후 대체로 양의 기울기를 보인다고 할 수 있다.

9) 또한 1개의 임계치를 선택하기 보다는 가능한 다수의  $u$  값을 선택하여 다른 방법으로도 확인하고자 한다.

10) Hill(1975) 참조.

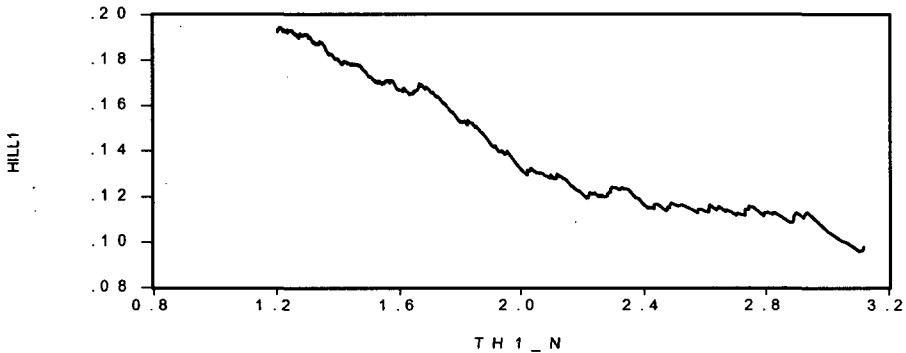
이라고 하면 Hill 추정치는 다음과 같이 구한다.

$$\xi_{k,n} = \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_{(i)} - \ln X_{(k)} \right]^{-1} \quad \text{for } k \geq 2 \quad (17)$$

이때 n은 표본의 개수이다. Hill 추정치란 n개의 표본 중에서 k개의 극단적인 값들의 평균과 k번째로 큰 값의 차이이다. 따라서  $\xi_{k,n}$ 는 선택된 k의 함수이다.<sup>11)</sup> Hill 그래프는 k를 변화시킬 때 변화하는  $\xi_{k,n}$ 의 값을 그래프로 나타낸 것이다. 이 때 그래프로부터 꼬리수  $\xi_{k,n}$ 의 값이 안정되기 시작하는  $X_{(i)}$  값을 임계치 u로 선택하도록 한다.

[그림 4]는 왼쪽 꼬리에 대한 Hill 그래프이다. [그림 4]에 따르면 u값이 2,2를 초과하면서부터 대체로 안정적인 모습을 보이고 있으며 MEF방법에 의해 선택된 임계치와 부합되는 모습을 보이고 있다. 즉 MEF에 의해 선택된 2.418을 초과한 후에  $\xi_{k,n}$ 의 값은 안정적인 모습을 보이고 있다.<sup>12)</sup> 또한 2.214를 초과한 후의 Hill 추정치는 대체로 안정된 모습을 보이지만 2.3에서 2.35의 사이에 약간 증가하는 모습을 보이고 있다. 이는 MEF 그래프에서도 나타났던 현상이다. 따라서 임계치로 2.214와 2.418을 선택한다.

[그림 4] 왼쪽 꼬리의 Hill Function



임계치를 구하는 방법은 어느 한 방법이 다른 방법에 비하여 확연한 우위를 가지지 못한다. 또한 본 연구에서는 GPD 모수의 추정치와 그에 따른 VAR 추정치가 임계치의 선택에 얼마나 민감한가를 알아보는 것도 중요하기 때문에 가능한 여러 기준의 임계치

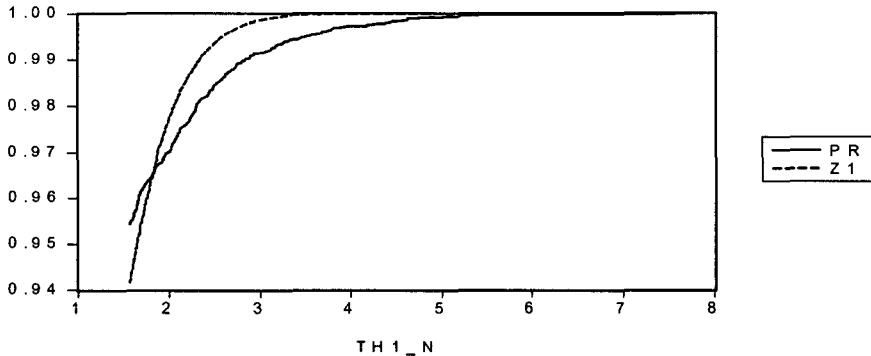
11) Hill추정치는 일정한 조건을 만족하는 경우에 일치추정량이 되는 것으로 알려져 있다. Mason(1982) 참조.

12) 3.0을 초과해서는 하락하지만 3.0을 초과해서는 k가 매우 적게 되는 수치로 극치의 모수추정에 적절치 않다. 따라서 3.0 이상의 Hill 그래프의 모습은 고려대상에서 제외한다.



를 고려하고자 한다. 이에 따라 수익률 누적분포의 꼬리부분이 누적정규분포의 꼬리부분보다 두꺼워지는 점을 임계치로 추가적으로 고려한다.

[그림 5] 정규분포 대비 왼쪽 꼬리의 누적분포



주) 점선(Z1)은 정규분포의 꼬리분포이고 실선(PR)은 KOSPI 수익률의 실제 꼬리분포임

[그림 5]는 왼쪽 꼬리부분의 누적분포를 정규분포에 대비하여 보여주고 있다. [그림 5]에 의하면  $u$ 값이 1.836을 초과하면서 정규분포에 비해 두터운 꼬리를 가지는 것으로 해석할 수 있다. 따라서 1.836도  $u$  값으로 선택하도록 한다. 지금까지 결과를 요약하면 <표 5>와 같다.

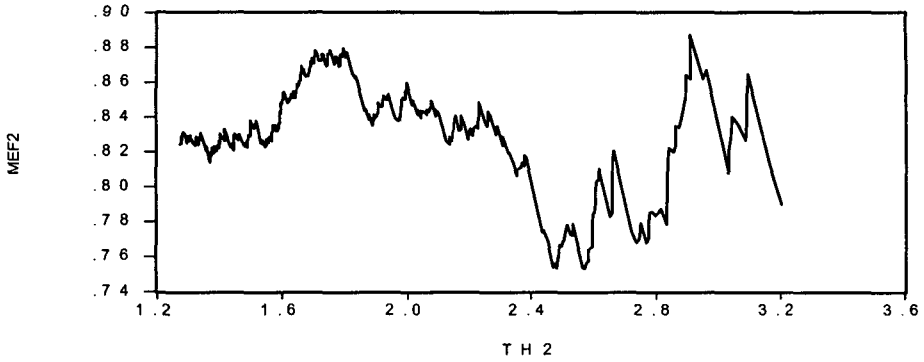
<표 5> 왼쪽꼬리의 임계치

임계치	quantile	관찰치 수
-1.836	3.35%	220개
-2.214	2.33%	153개
-2.418	1.76%	116개

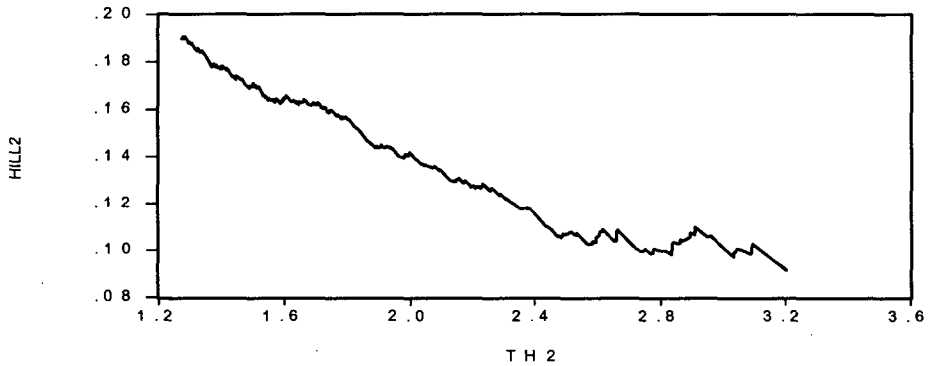
<표 5>에서 알 수 있듯이 예를 들어 임계치 2.418을 선택하면 이는 전체 자료의 왼쪽 꼬리부분의 1.76%에 해당하며 관찰치의 수는 116개이다. 또한 임계치의 절대값을 높게 선택할 수록 백분위수는 적어지고 관찰치의 개수는 줄어드는 것을 볼 수 있다.

왼쪽꼬리에 적용한 방법과 동일한 방법으로 오른쪽 꼬리에 대한 임계치를 선택한다. [그림 5]의 MEF와 [그림 6]의 Hill의 그래프를 살펴보면 양자가 정확하게 일치하지는 않지만 임계치로 2.574를 선택할 수 있고, [그림 7]의 누적분포에 의해서는 1.737를 선택할 수 있다는 것을 알 수 있다.

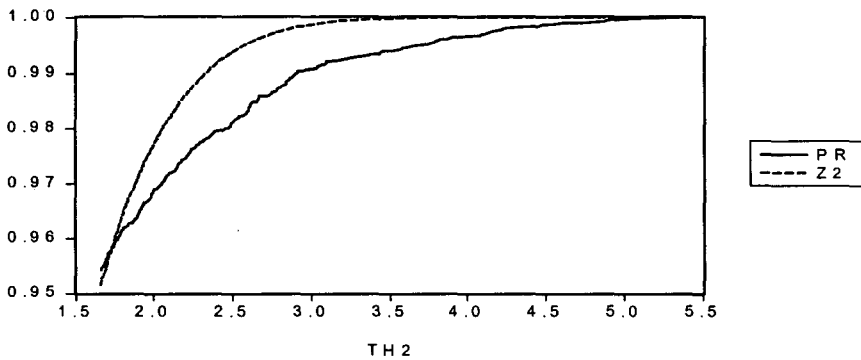
[그림 6] 오른쪽 꼬리의 Mean Excess Function



[그림 7] 오른쪽 꼬리의 Hill Function



[그림 8] 정규분포 대비 오른쪽 꼬리의 누적분포



주) 점선(Z1)은 정규분포의 꼬리분포이고 실선(PR)은 KOSPI 수익률의 실제 꼬리분포임

KOSPI 수익률의 오른쪽 꼬리 부분에 대해 선택된 임계치의 정보를 요약하면 <표

6>과 같다. <표 6>에서 알 수 있듯이 임계치 2.574를 선택하면 이는 전체 자료의 오른쪽 꼬리부분의 1.73%에 해당하며 관찰치의 수는 114개이다. 물론 임계치의 절대값이 커지면 백분위수는 줄어들고 관찰치의 개수는 줄어드는 것은 왼쪽꼬리의 경우와 마찬가지로이다.

<표 6> 오른쪽꼬리의 임계치

임계치	quantile	관찰치 수
1.737	4.15%	272개
2.574	1.73%	114개

## 2) 모수의 추정

지금까지  $u$ 값을 구하는 방법들에 대하여 살펴보았다. 이렇게  $u$ 값이 주어질 때 이를 초과하는 자료들로부터 GPD의 모수들을 구하고 이 모수들을 이용하여 VAR(Value at Risk)값을 구한다. GPD의 모수들을 추정하는 방법은 최우추정법을 이용하거나 확률가중 적률법(method of probability weighted moments) 또는 일반 적률법(moment method)을 이용할 수 있는데 여기서는 최우추정법으로 추정한다.

모수  $\xi$ 와  $\sigma$ 를 가진 GPD분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \quad \xi \neq 0 \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-u}{\sigma}} \quad \xi = 0$$

따라서 로그 최대우도함수는 다음과 같이 구성된다.

$$L(\xi, \sigma; x-u) = -n \log \sigma - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} (x_i - u)\right) \quad \xi \neq 0 \quad (19)$$

$$L(\xi, \sigma; x-u) = -n \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (x_i - u) \quad \xi = 0$$

<표 7>은 POT 모형의 왼쪽꼬리와 오른쪽꼬리에 대한 모수의 추정치이다.

<표 7>에서 왼쪽꼬리분포의 추정치를 살펴보면 MEF와 Hill 그래프의 기준에 의해 선택된 임계치(-2.214와 -2.418)의 경우에는  $\xi$  값이 양이어서 일반파레토 분포를 따르

는 것을 알 수 있다. 그러나 추정에 더 많은 관찰치를 이용하기 위해 단순히 정규분포보다 꼬리가 두터워지는 점을 임계치(-1.863)로 선택한 경우에는  $\xi$ 가 음의 값으로 파레토 II 분포를 이루는 것을 볼 수 있다. 각 모수 추정치의 표준편차는 임계치의 절대값이 클수록 커지는데 이는 관찰치가 작아진 데 기인하는 것으로 보인다. 각 모수의 추정치는 표준편차 대비 유의한(significant) 것으로 판단된다. 극한치이론의 모수추정치 의 소포본분포 특성(small sample property)이 아직 이론적으로 정립되지 않은 상태이기 때문에 임계치 -2.214와 -2.418를 선택한 경우의 모수 추정치가 유의하게 다른지에 대한 판단은 어렵지만 -1.863의 임계치를 선택한 경우와는 다르다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 모수 추정치의 차이에 확연할 때 VAR수치는 어떻게 달라지는지에 대해서는 4절에서 알아보기로 한다. 오른쪽 꼬리분포에 대한 추정치는 두 임계치에 대해  $\xi$ 가 모두 음의 값으로 왼쪽 꼬리와는 다른 파레토 II분포를 따른다고 볼 수 있다.

<표 7> POT 모형의 모수 추정치

왼쪽꼬리에 대한 추정치			오른쪽꼬리에 대한 추정치		
임계치	$\xi$	$\sigma$	임계치	$\xi$	$\sigma$
-1.836	-0.1633 (0.00774)	0.9956 (0.00578)	1.737	-0.1471 (0.00787)	0.9998 (0.00427)
-2.214	0.1257 (0.0082)	0.7067 (0.00997)	2.574	-0.1643 (0.01973)	0.8857 (0.01662)
-2.418	0.1050 (0.01176)	0.7497 (0.0124)	-	-	-

\* ( )의 숫자는 추정치의 표준편차임.

#### 4. VAR 추정치 비교

여기서는 블록최대값 모형에 의한 VAR 추정치와 POT 모형에 의한 VAR 추정치를 비교한다. VAR 값은 각각 식 (3)과 식 (9)에 의거하여 추정한다. 그러나 블록최대값 모형에 의한 VAR 값은 블록을 정의한 기간에 따라 다르게 계산되어야 하므로 식 (3)을 변형하여 사용한다.<sup>13)</sup>

$$VAR_p = \mu + \frac{\sigma}{\xi} [(-n \times \ln(p))^{-\xi} - 1] \quad \text{if } \xi \neq 0$$

13) Login(1999) 참조.

이때  $n$ 은 블록을 정의한 기간으로 월별 블록최대값의 경우에는 22, 분기별 블록최대값의 경우에는 66, 반기별 블록최대값의 경우에는 125이다.

<표 8>과 <표 9>는 각 추정방법에 따른 VAR 추정치이다. 본 연구에서 관심을 갖는 것은 극한치분포의 모수의 추정 그 자체라기보다는 그와 연계된 VAR의 추정이다. 따라서 극한치분포의 모수 추정치의 차이에 따라 VAR수치는 어떻게 달라지는지를 보기위해 앞서 선택한 모든 추정방법을 비교대상으로 한다. 또한 극한치모형이 아닌 정규분포를 가정하여 측정된 델타노말 VAR를 비교대상으로 포함한다.

<표 8> 각 모형에 따른 VAR 추정치(왼쪽 꼬리)

추정방법		VAR					
		95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%	99.99%
Delta VAR		2.564	3.056	3.627	4.016	4.821	5.798
블록최대값 모형	월	1.528	2.228	3.538	4.719	8.525	18.03
	분기	1.136	1.845	2.986	4.041	7.331	15.11
	반기	0.610	1.399	2.609	3.674	6.769	13.26
POT 방법	$N_u = 220$	2.633	3.417	4.501	5.394	7.735	10.91
	$N_u = 153$	2.696	3.421	4.482	5.370	7.755	12.13
	$N_u = 116$	2.431	3.516	4.775	5.609	7.218	11.85

<표 8>은 왼쪽 꼬리에 대한 VAR 추정치이다. 표에서 우선 눈에 띄는 점은 정규분포를 가정한 델타노말 VAR값에 비해 극한치모형의 VAR수치는 신뢰수준이 높아질수록 즉 꼬리에 가까울수록 급격히 커진다는 점이다. 이는 극한치분포의 특성이 반영된 것으로 당연한 결과이다. 그러나 신뢰수준 95%~99% 사이에서 블록최대값 모형은 극한치모형임에도 불구하고 델타 VAR보다 작은 VAR수치를 보이고 있는 것은 특이하다.

두 번째로는, 극한치모형 중에서도 블록최대값 모형의 VAR 추정치는 POT 모형에 비해 신뢰수준에 따른 변화가 훨씬 크다는 점이다. 이는 블록최대값 모형이 POT 모형에 비해 상대적으로 꼬리가 더 두꺼운 분포를 제시함을 나타내는 것이다. 이에 따라 블록최대값 모형의 VAR 수치는 신뢰수준이 비교적 낮은 95%~99% 사이에서는 POT 모형뿐 아니라 델타 VAR에 비해서도 낮은 반면 아주 극단적인 99.99%의 신뢰수준에서는 VAR 수치가 상대적으로 높다.

세 번째는, 블록최대값 모형의 경우 블록의 크기에 따라 VAR 추정치가 크게 달라

지는데 비해 POT 모형의 경우, 임계치의 선택에 따른 VAR수치의 변화가 상대적으로 크지 않다는 점이다. 특히 관찰치를 220개 선택한 경우(임계치 -1.863)에는  $\xi$  추정치가 음의 값으로 여타 임계치 선택의 경우와 크게 다름에도 불구하고 VAR 추정치가 크게 다르지 않음은 특이하다. 극한치이론을 이용하여 추정된 모수를 바탕으로 계산된 VAR수치를 비교하는데 대해서는 그 검정력에 논란이 있다.<sup>14)</sup> 이는 극한치이론의  $\xi$ 추정치의 소표본분포 특성(small sample property)이 아직 이론적으로 정립되지 않은 상태에서, 추정된 모수  $\xi$ 의 비선형함수인 VAR 추정치의 분포는 더욱 그 특성을 파악하기 어렵기 때문이다.<sup>15)</sup> 이에 따라 본 연구에서는 VAR 추정치가 크게 다르지 않은 한 VAR 수치가 유의적으로 다르다고 판단하지 않는 보수적 접근방법으로 결과를 해석한다.

<표 9>는 오른쪽 꼬리에 대한 VAR 추정치를 보여주고 있는데 그 결과는 왼쪽 꼬리의 경우와 유사하다. 다만 극한치 모형의 경우, 왼쪽 꼬리에 비해 VAR 추정치가 작은 것을 볼 수 있다. 이는 우리나라의 주식시장은 극단적인 손실의 크기가 극단적인 이익의 크기보다 더 크다는 것을 보여주는 것이기도 하다. 그러나 이러한 비대칭성을 고려하지 못하는 델타 VAR방법은 오른쪽 꼬리에 대해서도 왼쪽 꼬리와 동일한 VAR추정치 제공한다.

<표 9> 각 모형에 따른 VAR 추정치(오른쪽 꼬리)

추정방법		VAR					
		95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%	99.99%
Delta VAR		2.564	3.056	3.627	4.016	4.821	5.798
블록최대값 모형	월	1.890	2.674	3.849	4.861	7.710	13.37
	분기	1.488	2.235	3.321	4.230	6.680	11.21
	반기	1.070	1.811	2.871	3.741	6.022	10.05
POT 방법	$N_u = 272$	2.465	3.521	4.760	5.593	7.229	8.991
	$N_u = 114$	2.470	3.546	4.793	5.618	7.209	8.865

위험관리에서 VAR 측정모형의 성과를 평가하는 방법으로 잘 알려져 있는 방법이

14) Diebold,, Schuermann, and Stroughair(2000) 참조.

15) VAR추정치의 소표본 분포를 알기 위해 bootstrap 방법이나 monte carlo 시뮬레이션 방법이 사용되기도 한다. Gilli and Kellezi(2003) 참조.

사후검정(backtesting)방법이다. 본 연구에서도 극한치 모형 중에서 어떤 추정방법이 적절한지를 알아보기 위해 사후검정을 실시한다. VAR를 측정하는 모형이 적절하다면 실제 손실이 신뢰수준  $p\%$ 에서 계산된 VAR를 초과하는 경우가 총 자료수의  $(1-p)\%$ 에 가까워야 한다. 사후검정은 이 비율을 검정하는 것이다. 본 연구에서는 표본내 성과분석(in-sample performance)을 통하여 두 극치분포모형과 델타 노말방법에 의해 측정된 VAR의 성과가 어떠한지를 살펴본다. <표 10>에 이 결과가 요약되어 있다.

<표 10> 각 모형에 따른 VAR 초과일수(왼쪽 꼬리)

추정방법		VAR 초과일수					
		95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%	99.99%
(1-p)% 관측치		324	162	65	32	6	0
Delta VAR		252	197	121	88	49	22
블록최대값 모형	월	663	326	127	53	2	0
	분기	984	474	201	84	6	0
	반기	1734	751	245	117	14	0
POT 방법	$N_u = 220$	242	150	58	33	4	1
	$N_u = 153$	234	150	58	33	4	0
	$N_u = 116$	287	135	52	27	6	1

<표 10>에 의하면 델타노말모형은 95% 신뢰수준의 VAR값을 제외하고는 VAR를 초과하는 관측치의 수가 (1-p)% 관측치에 비하여 훨씬 많아 VAR를 과소추정하고 있음을 보여주고 있다. 예를 들어 99% 신뢰수준의 델타VAR 값을 초과하는 관측치의 수가 121개인데 이는 총 관찰치의 2%에 달하는 수치이고, 99.9%의 경우에는 VAR값을 초과하는 경우가 총 관찰치의 0.75%여서 높은 신뢰수준의 VAR를 계산하는데 부적절한 모형임을 보여준다.

블록최대값 모형의 경우에는 99%이하의 신뢰수준의 VAR값에 대해서는 델타노말모형 보다도 더 성과가 좋지 않다. 다만 99.5% 이상의 신뢰수준 VAR값에서는 성과가 크게 개선되고 있다.

이에 반하여 POT 모형에 의해 구해진 VAR 값은 신뢰수준 95%에서는 다소 과소 추정되었으나 97.5% 이상의 신뢰수준에서는 총 관찰치수의 (1-p)%에 매우 근접하여 극단치에 대한 VAR 추정치로 성과가 우수함을 보여주고 있다.

&lt;표 11&gt; 각 모형에 따른 VAR 초과일수(오른쪽 꼬리)

추정방법	VAR 초과일수						
	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%	99.99%	
(1-p)% 관측치	324	162	65	32	6	0	
Delta VAR	314	217	144	114	56	33	
블록최대값 모형	월	556	283	129	53	3	0
	분기	791	415	180	92	12	0
	반기	1170	594	244	134	27	0
POT 방법	$N_u = 272$	348	154	61	38	7	0
	$N_u = 114$	346	152	57	37	8	0

<표 11>은 오른쪽 꼬리에 대한 VAR 추정치모형의 성과를 보여주고 있는데 그 결과는 왼쪽 꼬리의 경우와 크게 다르지 않다.

극한치모형은 수익률의 왼쪽 꼬리와 오른쪽 꼬리를 분리하여 추정하고 이를 VAR의 계산에 이용하기 때문에 수익률분포가 가지는 비대칭적 특징을 모두 고려하게 된다. 따라서 극한치분포의 경우 VAR를 초과하는 관측치의 수는 수익률이 양의 값이나 음의 값을 가지는 것에 관계없이 그 숫자가 비슷하게 된다. 이에 반해 델타노말모형의 경우에는 수익률이 양의 값을 가지는 경우와 음의 값을 가지는 경우 모두 VAR 값이 같게 되어 VAR를 초과하는 관측치의 수가 두 경우에 큰 차이를 가지게 된다.

#### IV. 요약 및 결론

본 연구에서는 국내 주식시장에 대하여 극한치 이론을 적용하여 VAR값을 구하고 이의 유용성을 살펴보았다. 극한치모형으로는 블록최대값모형과 POT 모형을 이용하였고 이들 모형에 의해 구한 VAR 수치와 델타 노말 방법에 의한 VAR 값을 비교하였다. 또한 백테스트를 통하여 이들의 적절성을 알아보았다.

극한치 모형의 VAR값은 신뢰수준이 높을수록 일반적으로 사용하는 델타 VAR값에 비해 훨씬 큰 수치를 보여주었으며 백테스트 결과도 신뢰수준이 높을수록 델타노말 방법에 비해 위험관리에 적절한 정보를 제공하는 것으로 나타났다.

그러나 극한치모형 중 블록최대값 모형은 신뢰수준의 변화에 따라 VAR 추정치의 변동이 매우 커서 사용에 유의해야 하는 것으로 나타났다. 즉 블록최대값 모형의 VAR 값은 신뢰수준이 비교적 낮은 95%~99% 사이에서는 델타 VAR에 비해서도 낮은 반면



아주 극단적인 99.99%의 신뢰수준에서는 VAR 수치가 매우 높다. 이는 블록최대값 모형을 사용할 경우에는 국내 주식시장에 대한 꼬리의 모양모수 추정치가 큰데 기인한다. 또한 블록최대값 모형은 블록의 크기를 어떻게 선택하는가에 따라 모수의 추정치가 크게 달라져 VAR값의 안정성이 떨어지는 것으로 나타났다. 이는 국내 주식시장에 대해 VAR 측정시 블록최대값 모형을 사용하는 것은 적절치 않음을 시사하는 것이다.

한편 POT모형을 적용할 경우에는 임계치의 선택에 따라서 VAR 값이 달라지기는 하나 상대적으로 안정적인 모습을 보이며, 또한 백테스트 결과 97.5% 이상의 신뢰수준에서 VAR값이 델타 VAR에 비하여 우수한 성과를 보이는 것으로 나타났다. 특히 신뢰수준이 높아질수록 그 우월성은 훨씬 높은 것으로 나타나 99% 이상의 신뢰수준의 VAR값으로 극한치이론이 유용한 것이 입증되었다. 이는 극한치모형이 신용위험과 같이 높은 신뢰수준의 VAR값을 요구하는 경우에는 특히 더 유용한 방법임을 시사하는 것이다.

또한 극한치모형은 수익률의 왼쪽 꼬리와 오른쪽 꼬리를 분리하여 추정하고 이를 VAR의 계산에 이용하기 때문에, 수익률분포가 비대칭적 특징을 보이는 우리나라 주식시장의 VAR 측정시 적절한 방법임을 확인할 수 있었다.

이와 같이 극한치 이론이 극단적인 경우에 대한 위험관리에 유용함을 가진다고 할 수 있으나 극한치 모형에 의한 VAR 추정치가 확고한 이론적 우위를 갖기에는 한계가 있음을 인식해야 한다. 우선 극한치이론을 적용하여 VAR를 구하는 것은 어떤 방법론을 사용하느냐에 따라 VAR값이 다를 수 있다는 점이다. 또한 꼬리모수 추정치의 유한 표본의 특성은 아직 규명되지 않았으므로 극한치이론을 이용하여 추정된 모수를 바탕으로 계산된 VAR수치를 비교하는데 대해서는 그 검정력에 논란이 있다. 이러한 점들에 비추어 볼 때 극한치 이론에 의한 VAR 추정치가 실무에서 강건한(robust) 지지를 얻기 위해서는 VAR를 추정하는 방법론과 그 검정통계량 등에 대한 연구가 더 필요하다고 할 수 있다.

## 참 고 문 헌

- 문성주, 이덕창, 김대호, 오세경, “극단치이론을 이용한 VaR의 추정 및 성과” 『증권학 회지』, 제32집 제3호, (2003), 223-266.
- 한상범, “극치분포(extreme value distribution)를 이용한 VaR(Value at Risk)의 추정 및 성과 분석” 『금융연구』, 제13권 제2호, (1999), 319-341.
- 한상범. “Value at Risk모형의 통계적 평가방법에 관한 연구” mimeo, 『한국증권연구원』, 2000.
- Artzner, Delbaen, Eber&Heath, “Thinking coherently,” RISK 10(11), (1997), 68-71.
- Azzalini, A., *Statistical Inference Based on the Likelihood*, Chapman and Hall, London, 1996.
- Balkema, A. A. and L. de Haan, “Residual life time at great age,” *Annals of Probability*, 2, (1974), 792-804.
- Castillo, E. and A. Hadi, “Fitting the Generalized Pareto Distribution to Data,” *Journal of the American Statistical Association*, 92(440), (1994), 1609-1620.
- Danielsson, J., de L. Haan, L. Peng and C. de Vries, “Using a Boot-strap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation,” Mimeo, 1997.
- Danielsson, J., and C. de Vries, “Tail Index and Quantile Estimation with Very High Frequency Data,” *Journal of Emperical Finance*, 4, (1997), 271-300.
- Diebold, F. X., T. Schuermann, and J. D. Stroughair, “Pitfalls and opportunities in the use of extreme value thoery in risk management,” In Refenes, A, -P., Burgess, A. and Moody,J., editors, *Decision Technologies for computational Finance*, Kluwer Academic Publishers, (2000), 3-12.
- Embrechts P., “Extreme Value Theory : Potential and Limitations as an Integrated Risk Management Tool,” *Derivative Use, Trading & Regulation* 6, (1999), 449-456.
- Gilli, Manfred and Evis Kellezi, “An Application of Extreme Value Theory for Measuring Risk,” working paper, 2003.
- Gnedenko, B. V., “Sur la distribution limite du terme d’une serie aleatoire,” *Annals of Mathematics*, 44, (1943), 423-453.
- Hill, B. M., “A simple general approach to inference about the tail of a distribution,”

- Annals of Statistics*, 3, (1975), 1163-1174.
- Hosking, J. R. and Wallis, J. R., "Parameter and quantile estimation for the generalised Pareto distribution," *Technometrics*, 29, (1987), 339-349.
- Longin, F. M., "The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns," *Journal of Business*, 69, (1996), 383-408.
- Longin, F. M., "From Value at Risk to Stress Testing : The Extreme Value Approach," *Center for Economic Policy Research*, London, UK, 1999.
- Mason, D. M., "Laws of large numbers for sums of extreme values," *Annals of probability*, 10, (1982), 756-764.
- McNeil, A. J., "Extreme value theory for risk managers," In *Internal Modelling and CAD II*, pp. 93-113 RISK books, 1999.
- McNeil, A. J. and Frey, R., "Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series : an extreme value approach," *Journal of Empirical Finance*, 7(3-4). (2000), 271-300.
- Neftci, S. N., "Value at risk calculations, extreme events, and tail estimation," *Journal of Derivatives*, (2000), 23-37.
- Pickands, J. I., "Statistical inference using extreme value order statistics," *Annals of Statistics*, 3, (1975), 119-131.

# Usefulness and Limitations of Extreme Value Theory VAR model : The Korean Stock Market

Kyu-Hyong Kim\* · Joon-Haeng Lee\*\*

〈abstract〉

This study applies extreme value theory to get extreme value-VAR for Korean Stock market and showed the usefulness of the approach. Block maxima model and POT model were used as extreme value models and tested which model was more appropriate through back testing.

It was shown that the block maxima model was unstable as the variation of the estimate was very large depending on the confidence level and the magnitude of the estimates depended largely on the block size. This shows that block maxima model was not appropriate for Korean Stock market.

On the other hand POT model was relatively stable even though extreme value VAR depended on the selection of the critical value. Back test also showed VAR showed a better result than delta VAR above 97.5% confidence level. POT model performs better the higher the confidence level, which suggests that POT model is useful as a risk management tool especially for VAR estimates with a confidence level higher than 99%.

This study picks up the right tail and left tail of the return distribution and estimates the EVT-VAR for each, which reflects the asymmetry of the return distribution of the Korean Stock market.

Keywords : Extreme Value Theory, Block Maxima Model, POT(peak over threshold) Model,  
QQ-plot, Mean Excess Function, Hill Estimate, VAR

---

\* Chung Ang University

\*\* Seoul Women's University