

일반화된 고유치 문제를 이용한 시변 섭동의 안정 범위

A Stability Region of Time-varying Perturbations by Using Generalized Eigenvalue Problem

한 형 석*, 이 달 호
(Hyung Seok Han and Dal Ho Lee)

Abstract : The stability robustness problem of continuous linear systems with nominal and delayed time-varying perturbations is considered. In the previous results, the entire bound was derived only for the overall perturbations without separation of the perturbations. In this paper, the sufficient condition for stability of the system with two perturbations, which are nominal and delayed, is expressed as linear matrix inequalities(LMIs). The corresponding stability bounds for those two perturbations are determined by LMI(Linear Matrix Inequality)-based generalized eigenvalue problem. Numerical examples are given to compare with the previous results and show the effectiveness of the proposed.

Keywords : robust stability, time-delayed perturbation, linear matrix inequality, generalized eigenvalue problem

I. 서론

시간지연은 실제 시스템에 많이 나타나는 현상으로 동적 시스템에서는 자연적으로 발생하게 되는 것으로 알려져 있다. 이러한 시간지연에 대한 원인과 이로 인한 여러 가지 문제점에 대한 검토가 활발하게 이루어 지고 있다[1,2]. 특별히 시간지연(time-delayed) 섭동(perturbation)은 시스템을 불안정하게 만들 수 있으며, 또한 진동을 일으키거나 시스템 성능을 저하시킬 수 있다. 최근에는 이러한 시간지연 섭동에 대한 연구가 많이 진행되어 왔다[3-15]. 이러한 연구들은 연속시간계와 이산시간계의 결과들로 분류될 수 있으며, 또한 섭동의 성질에 따라서 시변과 시불변 섭동, 그리고 시간 지연의 특성에 따라 시변 지연과 시불변 지연등으로 구분할 수 있다.

연속시간계에서의 연구[3-8]에서는 시변 섭동에 대하여 고려되었고, 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality:LMI)을 이용하는 방법[3], 리아프노프 방법(Lyapunov direct method)를 이용한 방법[4]이 최근에 발표되었으나, 주로 기준 시스템(nominal system)에 대한 리아프노프 방정식(Lyapunov equation)의 해를 이용하여 섭동의 안정 범위를 구하는 방법[5-8]이 사용되었다. 특히, [3]에서는 시변 섭동에 대한 안정범위를 선형행렬부등식을 제한조건으로 갖는 일반화된 고유치 문제(Generalized Eigenvalue Problem:GEVP)로 고려하여 비구조화된 섭동과 다중 시변 섭동(multiple time-varying perturbation)에 대한 안정조건과 안정범위를 제안하였다. 이 결과는 기존의 결과[5-8]보다 더 좋은 안정범위를 제공한다. 이러한 연속시간계에서의 결과에 반하여 이산시간계에서의 결과는 상대적으로 드물게 발표되었다. 이산시간계에서의 연구는 대부분 시불변 섭동에 대하여 이루어졌으며[9-14], 극점(pole)의 위치를 이용하는 방법[9-11], 특이 섭동(singularly perturbed)시스템에 대하여 연구 [12,13]되거나 리카티 유형 방정식(Riccati-type equation)을 이용한 방법[14]을 중심으로 이루어졌다. 안정성 크기에 대한

기존의 결과는 지연시간의 최대 크기를 다루는 문제가 주로 다루어졌으며 이를 위하여 LMI형태의 안정조건들을 유도하였다[15-17].

본 논문에서는 크기가 제한된 비 구조화 시변 섭동의 안정 범위를 시변 시간지연이 있는 섭동과 시간지연이 없는 일반적인 섭동이 동시에 존재하는 경우에 대하여 최적화 기법을 이용하여 계산하는 방법을 제시한다. 본 논문의 결과는 [3]에서의 결과가 여러 가지 섭동의 안정 크기를 각각 구하는 대신에 전체 섭동을 포함하는 확장 섭동에 대한 안정 크기만을 구할 수 있는 단점을 보완하는 것이다. 제안된 섭동의 안정 범위는 선형행렬부등식을 조건으로 갖는 일반 고유치 문제로 표현되며, 이러한 형태의 문제는 Matlab의 LMI toolbox를 사용하여 용이하게 해를 구할 수 있다. 본 논문에서의 결과는 연속시간계에서의 결과[3]를 확장한 것으로 고려될 수 있다. 또한, 섭동을 구조화된 형태로 고려하고 LMI 형식의 안정조건을 이용하여 안정성을 유지할 수 있는 지연시간을 구한 기존의 결과들[15-17]과는 다른 새로운 문제의 안정범위를 구한 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 비 구조화된 시변 섭동에 대한 안정조건을 유도하고 이에 따른 섭동의 안정 범위를 구하는 알고리즘을 설명한다. 3장에서는 수치 예제를 통하여 제안된 알고리즘의 구현과 효용성을 Matlab LMI toolbox를 이용하여 확인한다.

• 기호의 정의 :

$\lambda_i(X)$: i-번째 고유치(i-th eigenvalue)

$\lambda_m(X)$: 최소 고유치(minimum eigenvalue)

$\lambda_M(X)$: 최대 고유치(maximum eigenvalue)

$\sigma_M(X)$: 최대 특이치(maximum singular value),

$$\sigma_M(X) = \lambda_M^{1/2}(X^T X)$$

$\|X\|$: 스펙트랄 노름(spectral norm), $\|X\| = \sigma_M(X)$

$X > 0$: 대칭행렬 X 가 양의 정칙(positive definite)

I_m : $m \times m$ 단위행렬(identity matrix)

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 8. 3., 채택확정 : 2005. 9. 14.

한형석, 이달호 : 경원대학교 전자전기정보공학부

(hshan@kyungwon.ac.kr/dhlee@kyungwon.ac.kr)

II. 비 구조화된 시변 섭동의 안정범위

본 장에서는 연속시간계에서 시변 시간지연이 있는 시변 섭동과 일반적인 시변 섭동의 두 가지 섭동을 포함한 선형시스템의 안정조건을 유도한다. 또한, 유도된 안정조건을 선형행렬부등식을 조건으로 갖는 일반화된 고유치 문제로 고려하여 비 구조화된 섭동의 안정범위를 찾아내는 방법을 설명한다. 이들 결과는 다음의 보조정리와 정의를 이용하여 유도된다.

보조정리 1[18]: 행렬 A 와 C 가 정방(square)일 때, 블록

$$\text{행렬 } \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} \text{가 음의 정칙행렬이 되기 위한 필요충분 조}$$

건은 $C < 0$ 이고 $A < B^T C^{-1} B$ 이다.

정의 1[19]: 일반화된 고유치 문제는 LMI 제한 조건을 만족하는 변수에 종속된 두 행렬의 일반화된 고유치의 최대값을 최소화 하는 문제이다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \lambda \text{ subject to} \\ &C(x) > 0 \\ &B(x) > 0 \\ &A(x) < \lambda B(x) \end{aligned}$$

여기서, A, B 와 C 는 x 에 대한 함수(affine function)관계를 갖는 대칭행렬들이다.

위의 정의에서 설명된 일반화된 고유치 문제는 의사-볼록 최적화 문제(quasi-convex optimization problem)이다. 또한 의사-볼록 최적화 문제는 볼록 최적화(convex optimization)를 위한 임의의 수치 알고리즘을 적용하여 최적해를 구할 수 있다. 특히, 선형행렬부등식 문제는 MATLAB LMI-Toolbox와 같은 특별한 수치 알고리즘을 이용하면 매우 효율적으로 최적 해를 구할 수 있다[19].

기존 시스템에 대한 섭동과 시간지연이 있는 섭동을 동시에 포함하는 선형시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + E(t)x(t-h(t)), t > 0 \\ x(s) &= \Psi(s), \quad -\bar{h} \leq s \leq 0 \\ 0 \leq h(t) &\leq \bar{h}, \quad \dot{h}(t) \leq \delta \leq 1 \\ \|\Delta A(t)\| &\leq \eta_A, \quad \|E(t)\| \leq \eta_E \end{aligned} \tag{1}$$

식에서, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, x(t) \in \mathbb{R}^n$ 이다. 기존 상태행렬 A 가 시불변 점근 안정(time-invariant asymptotically stable)이라고 가정한다. 시간지연 $h(t)$ 는 임의의 시변 유한(time-varying bounded), 연속이고 음이 아닌(nonnegative) 함수이며, 시간에 대한 변화가 1보다 작은 함수이다. 또한, 초기 조건 $\Psi(s), s \in [-\bar{h}, 0]$ 는 연속인 벡터함수이다. $\Delta A(t), E(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 는 시변 섭동을 나타내며, 특히 $E(t)$ 는 시간지연이 있는 섭동이다.

두 가지의 시변 섭동이 있는 위와 같은 시스템에 대하여 안정성을 보장하는 안정조건을 유도한다. 기존의 결과[3]를

이용할 경우에는 다음과 같은 확장 섭동 행렬을 이용한다.

$$\tilde{E}(t) \triangleq [\Delta A(t), E(t)] \tag{2}$$

$$\|\tilde{E}(t)\| \leq \bar{\eta} \tag{3}$$

정리 1[3] 다음의 관계식을 만족하는 양의 대칭행렬 P 와 양수 α 가 존재하고

$$A^T P + PA + P^2 < -\alpha I \tag{4}$$

부등식

$$\bar{\eta} < \sqrt{(1-\delta)\alpha/2} \tag{5}$$

을 만족하면, 위의 시스템은 균일 점근 안정(uniformly asymptotically stable)하게 된다.

기존의 결과인 정리 1을 이용하면 두개의 섭동, 즉 시간지연이 없는 섭동과 시간지연이 있는 섭동의 각각의 안정범위를 구할 수는 없고 단지 그 두개가 합쳐진 전체의 크기만을 고려할 수 있다. 즉, 기존의 결과에서는 각각의 섭동의 크기를 구할 수는 없다. 위의 정리로부터 두개의 섭동에 대하여 각각의 크기를 고려한 안정 조건을 유도하면 다음과 같다.

따름정리 1: (4)를 만족하는 양의 대칭행렬 P 와 양수 α 가 존재하고 다음의 식을 만족하면

$$\eta_A + \eta_E \leq \sqrt{(1-\delta)\alpha/2} \tag{6}$$

위의 시스템은 균일 점근 안정(uniformly asymptotically stable)하게 된다.

증명: 행렬의 성질과 (3)을 이용하면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}(t)\| &= \lambda_{\max}^{1/2}(\tilde{E}(t)\tilde{E}^T(t)) \\ &= \lambda_{\max}^{1/2}([\Delta A(t), E(t)][\Delta A(t), E(t)]^T) \\ &= \lambda_{\max}^{1/2}(\Delta A(t)\Delta A^T(t) + E(t)E^T(t)) \\ &\leq \|\Delta A(t)\| + \|E(t)\| \leq \eta_A + \eta_E \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \eta_A + \eta_E &\leq \sqrt{(1-\delta)\alpha/2} \\ \Rightarrow \|\tilde{E}(t)\| &\leq \sqrt{(1-\delta)\alpha/2} \end{aligned}$$

따라서, (6)을 만족하면 (3)을 만족하게 된다. ■

따름정리 2: (4)를 만족하는 양의 대칭행렬 P 와 양수 α 가 존재하고 다음의 식을 만족하면

$$\eta_A^2 + \eta_E^2 \leq (1-\delta)\alpha/2 \tag{7}$$

위의 시스템은 균일 점근 안정(uniformly asymptotically stable)하게 된다.

증명: 행렬의 성질과 (3)을 이용하면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}(t)\|^2 &= \lambda_{\max}(\tilde{E}(t)\tilde{E}^T(t)) \\ &= \lambda_{\max}([\Delta A(t), E(t)][\Delta A(t), E(t)]^T) \\ &= \lambda_{\max}(\Delta A(t)\Delta A^T(t) + E(t)E^T(t)) \\ &\leq \|\Delta A(t)\|^2 + \|E(t)\|^2 \leq \eta_A^2 + \eta_E^2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \eta_A^2 + \eta_E^2 &\leq (1-\delta)\alpha/2 \\ \Rightarrow \|\tilde{E}(t)\|^2 &\leq (1-\delta)\alpha/2 \end{aligned}$$

따라서, (7)을 만족하면 (3)을 만족하게 된다. ■

이전 결과[3]에서는 섭동의 최대 크기인 $\bar{\eta}^*$ 를 다음과 같이 알고리즘에 의해 구한다.

알고리즘 1 :

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \hat{\alpha} \\ &0 < P \\ &\begin{pmatrix} A^T P + PA & P \\ P & -I \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &Y < \hat{\alpha} I \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\hat{\alpha} = -\alpha < 0$.

위의 최적화 해를 $\hat{\alpha}^*$ 로 하면 (3)의 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\eta} < \sqrt{-(1-\delta)\hat{\alpha}^*/2} \quad (9)$$

즉, 최대 크기로 최적화된 섭동의 안정크기를 $\bar{\eta}^* = \sqrt{-(1-\delta)\hat{\alpha}^*/2}$ 로 결정할 수 있다. 이를 따름정리 1 과 따름정리 2의 결과에 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\eta_A + \eta_E \leq \sqrt{-(1-\delta)\hat{\alpha}^*/2} \quad (10)$$

$$\eta_A^2 + \eta_E^2 \leq -(1-\delta)\hat{\alpha}^*/2 \quad (11)$$

위의 따름정리들은 기존의 결과인 정리 1을 이용하여 섭동의 각각의 안정범위에 대한 관계식을 유도한 것이다. 그러나, 이들 조건은 상당히 보수적인 것으로 더욱 확장된 조건이 필요하다. 특히 시간지연이 없는 섭동이 포함되는 경우에 시간지연 효과가 시간지연이 없는 섭동에도 동일하게 적용되어 섭동 η_A 의 크기에 불리하게 작용된다. 다음의 정리는 섭동을 기존 결과와 같이 확장섭동 행렬로 고려하지 않고 새로이 유도한 안정조건이다.

정리 2: 주어진 η_A, η_E 에 대하여, 다음의 관계식을 만족하는 양의 대칭행렬 P 와 양수 β 가 존재하고

$$A^T P + PA + (\beta + \eta_A^2)I + 2P^2 < 0 \quad (12)$$

$$\left(\text{또는} \begin{pmatrix} A^T P + PA + (\beta + \eta_A^2)I & P \\ P & -\frac{1}{2}I \end{pmatrix} < 0 \right) \quad (13)$$

부등식

$$\eta_E \leq \sqrt{(1-\delta)\beta} \quad (14)$$

을 만족하면, 위의 시스템은 균일 점근 안정(uniformly asymptotically stable)하게 된다.

증명: 다음과 같은 리아프노프 함수를 고려한다.

$$V(x(t), t) = x^T(t)Px(t) + \beta \int_{t-h(t)}^t x^T(s)x(s)ds$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) &= x^T(t)(A^T P + PA)x(t) \\ &\quad + x^T(t)(\Delta A^T P + P\Delta A)x(t) \\ &\quad + 2x^T(t)PEx(t-h(t)) + \beta x^T(t)x(t) \\ &\quad - (1-h'(t))\beta x^T(t-h(t))x(t-h(t)) \\ &\leq x^T(t)(A^T P + PA + \beta I)x(t) \\ &\quad + x^T(t)\Delta A^T \Delta Ax(t) + x^T(t)P^2 x(t) + x^T(t)P^2 x(t) \\ &\quad + (\eta_E^2 - (1-\delta)\beta)x^T(t-h(t))x(t-h(t)) \\ &\leq x^T(t)(A^T P + PA + \beta I + P^2 + P^2 + \eta_A^2 I)x(t) \\ &\quad + (\eta_E^2 - (1-\delta)\beta)x^T(t-h(t))x(t-h(t)) \\ \dot{V}(x(t), t) &\leq x^T(t)(A^T P + PA + \beta I + P^2 + P^2 + \eta_A^2 I)x(t) \\ &\quad + (\eta_E^2 - (1-\delta)\beta)x^T(t-h(t))x(t-h(t)) \end{aligned}$$

$A^T P + PA + (\beta + \eta_A^2)I + 2P^2 < 0$ 과 $\eta_E \leq \sqrt{(1-\delta)\beta}$ 를 만족하면 $\dot{V}(x(t), t) < 0$ 이 된다. 또한, $A^T P + PA + (\beta + \eta_A^2)I + 2P^2 < 0$ 은 보조정리 1을 이용하면 (13)로 표현된다. ■

정리 2를 정리 1의 관계식과 비교를 하면 정리 1에서의 α 가 $\beta + \eta_A^2$ 으로서, P^2 이 $2P^2$ 으로 변경되었다. 따라서, 정리 2의 첫번째 행렬부등식의 조건은 정리 1에 비하여 더욱 보수적인 조건이 된다. 그러나, 두번째의 관계식에 있어서 정리 1은 $\alpha/2$ 를 이용하는 데 반하여 정리 2에서는 β 를 사용한다.

정리 2의 첫번째 부등식을 보조정리 1을 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA & P \\ P & -\frac{1}{2}I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\beta + \eta_A^2)I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 \quad (15)$$

위의 관계식을 일반화된 고유치 문제로 고려하면 다음과 같이 된다.

알고리즘 2 :

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \hat{\beta} \\ &P > 0 \\ &\begin{pmatrix} A^T P + PA & P \\ P & -\frac{1}{2}I \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &Y < \hat{\beta} I \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\hat{\beta} = -(\beta + \eta_A^2) < 0$.

위의 최적화 해는 $\hat{\beta}^* = -(\beta^* + (\eta_A^*)^2)$ 이다.

위의 알고리즘 2로부터 구한 최적값을 이용하여 안정영역에 대한 다음의 따름정리를 유도할 수 있다.

따름정리 3: (16)를 만족하는 양의 대칭행렬 P 와 양수 $\hat{\beta}^*$ 가 존재하고 다음의 식을 만족하면

$$\eta_E^2 + (1-\delta)\eta_A^2 \leq -(1-\delta)\hat{\beta}^* \quad (17)$$

위의 시스템은 균일 점근 안정(uniformly asymptotically stable)

하게 된다.

증명: 두 가지 섭동의 최대 크기 $(\eta_A^*)^2, (\eta_E^*)^2$ 는 (14)의 관계식을 이용하면 다음과 같은 식을 만족하게 된다.

$$\beta^* + (\eta_A^*)^2 = -\hat{\beta}^*, (\eta_E^*)^2 / (1 - \delta) = \beta^* \\ \Rightarrow (\eta_E^*)^2 + (1 - \delta)(\eta_A^*)^2 = -(1 - \delta)\hat{\beta}^*$$

또한, 이에 따른 안정범위는 다음과 같다.

$$\eta_A \leq \eta_A^*, \eta_E \leq \eta_E^* \Rightarrow \eta_E^2 + (1 - \delta)\eta_A^2 \leq -(1 - \delta)\hat{\beta}^* \blacksquare$$

따름정리 2의 결과와 따름정리 3의 결과를 비교하면

$$\eta_E^2 + \eta_A^2 < \frac{-(1 - \delta)\hat{\alpha}^*}{2} \quad (18)$$

$$\eta_E^2 + (1 - \delta)\eta_A^2 < -(1 - \delta)\hat{\beta}^* \quad (19)$$

만약 $\hat{\beta}^* = \frac{\hat{\alpha}^*}{2}$ 이면 (19)는 $\eta_E^2 + (1 - \delta)\eta_A^2 < \frac{-(1 - \delta)\hat{\alpha}^*}{2}$

로 변경되며, 따라서 이 경우 $\delta = 0$ 인 경우에는 두 경우가 같은 결과를 보인다. $\delta = 0$ 인 경우에는 새로이 제안한 따름정리 3에서의 결과가 우수함을 알 수 있다.

부연설명) (4)와 (12)의 행렬부등식 간의 관계는 다음과 같다. 먼저 (4)의 해를 α_1, P_1 으로 두고 (14)의 해를 α_2, P_2 라고 두면 다음의 관계식이 성립된다.

$$A^T P_1 + P_1 A + \alpha_1 I + P_1^2 < 0 \quad A^T P_2 + P_2 A + \alpha_2 I + 2P_2^2 < 0 \\ A^T P_2 + P_2 A + \alpha_2 I + 2P_2^2 < 0 \Rightarrow A^T P_2 + P_2 A + \alpha_2 I + P_2^2 < 0$$

이 되므로 (12)의 해 α_2, P_2 은 (4)의 해가 될 수 있다. 따라서, 알고리즘 1의 해 $\hat{\alpha}_1^*$ 과 알고리즘 2의 해 $\hat{\alpha}_2^*$ 사이에는 $\hat{\alpha}_2^* \leq \hat{\alpha}_1^*$ 인 관계가 성립된다. 즉, 알고리즘 2의 해가 알고리즘 1의 해보다 작거나 같게 나온다. 이에 대한 것은 다음의 예제에서 확인할 수 있다.

III. 수치 예제

예제 1[3]: 다음과 같은 시스템 행렬을 고려한다.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \delta = 0$$

기존의 결과[3]를 이용하면 다음의 안정범위를 얻을 수 있다.

$$\|\tilde{E}(t)\|: \hat{\alpha}^* = -0.2918, \eta^* = 0.3820$$

즉, 두개의 섭동의 안정범위를 각각 구할 수는 없다. 반면에, 새로 제안된 방법을 이용하면 $\hat{\beta}^* = -0.1458$ 를 얻을 수 있다. 이 경우에는 기존 결과의 안정범위 $\hat{\alpha}^* / 2$ 와 $\hat{\beta}^*$ 가 거의 같은 경우에 해당된다. 따라서, 제안된 방법이 기존의 결과에 비하여 향상된 안정범위를 주게 된다. $\eta_A^* = \eta_E^*$ 로 두고 안정 영역을 구하면 $\eta_A^* = 0.2700, \eta_E^* = 0.2700$ 인

크기를 얻을 수 있다. 보다 일반적인 영역은 시간 변화율 제한 δ 가 여러 가지로 변하는 경우에 대하여 다음의 표 1에 정리된다. 시간지연 변화율 δ 가 커짐에 따라 시간지연이 없는 최대섭동의 크기는 변화가 없으나 시간지연 섭동에 대한 크기는 감소함을 알 수 있다. 이를 보다 명확하게 보기 위해서 그림 1과 2에 안정범위를 도시하였다. 그림 1과 2에서 가로축은 η_E , 세로축은 η_A 를 나타낸다. 안정범위는 그림에서 제1사분면에 해당된다. $\delta = 0.5$ 에 대하여 도시된 그림 1에서 기존의 결과를 이용하면 안정범위가 원의 형태로 나타나, 제안된 방법을 이용하면 가로축 η_E 의 크기는 같으나 세로축 η_A 의 값이 기존의 결과 보다 커지게 나옴을 알 수 있고 원을 포함한 타원이 됨을 알 수 있다. 그림 2에서는 여러 가지 δ 에 따라 가로축의 η_E 가 작아지는 타원의 형태를 갖음을 확인할 수 있다. 그림에서 비교한 기존의 결과는 참고문헌 [3]의 결과로부터 본 연구에서 유도한 따름정리 2의 결과이다. 참고문헌 [3]의 결과와 직접 비교하기 위하여서 $\delta = 0.25$ 인 경우를 고려하며 다음과 같은 섭동을 고려한다.

$$\Delta A(t) = 0.24 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E(t) = 0.24 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

참고문헌 [3]에서의 결과인 정리 1을 이용하면 최대섭동은 $\eta^* = 0.3308$ 이 된다. 위와 같이 정의된 섭동에 대하여 섭동의 크기를 구하면 $\|\tilde{E}(t)\| = \|\Delta A(t), E(t)\| = 0.3394$ 따라서, $\|\tilde{E}(t)\| = \|\Delta A(t), E(t)\| = 0.3394 > \eta^* = 0.3308$ 가 되어 안정함을 판단할 수 없다. 반면에, 주어진 섭동 $\|E(t)\| = 0.24$ 에 대하여 $\eta_E^2 + 0.75\eta_A^2 \leq 0.1094 = (0.3308)^2$ 의 결과로부터 안정성을 유지하는 최대 $\|\Delta A(t)\|$ 의 크기를 구하면 0.2629가 되어서 안정함을 알 수 있다. 따라서, 본 논문에서 제안한 안정범위는 참고문헌 [3]의 직접적인 결과와 이를 이용한 따름정리 2의 결과보다 우수함을 확인할 수 있다.

예제 2[3]: 다음의 STOL 비행제어 시스템을 고려한다.

$$A = \begin{pmatrix} -0.201 & 0.755 & 0.351 & -0.075 & 0.033 \\ -0.149 & -0.696 & -0.160 & 0.110 & -0.048 \\ 0.081 & 0.004 & -0.189 & -0.003 & 0.001 \\ -0.173 & 0.802 & 0.251 & -0.804 & 0.056 \\ 0.092 & -0.467 & -0.127 & 0.075 & -1.162 \end{pmatrix}$$

$h(t) = \delta(1 - \cos(t))$, $\dot{h}(t) \leq \delta$. 여러 가지 δ 에 따른 안정범위는 표 2에 보여진다. 이 경우에는 예제 1과는 달리 기존 결과의 안정범위 $\hat{\alpha}^* / 2$ 와 $\hat{\beta}^*$ 의 관계가 $\hat{\alpha}^* / 2 > \hat{\beta}^*$ 가 되어 $\delta = 0$ 인 경우에는 기존의 결과가 제안된 방법에 비해 약간 우수하나, $\delta \neq 0$ 인 다른 경우에는 제안된 방법이 타원의 형태를 가지므로 더 우수한 안정범위를 주게 된다.

IV. 결론

본 논문에서는 시간 지연이 있는 비 구조화된 섭동의 크기를 구하는 방법을 일반화된 고유치 문제로 고려하여 제안하였다. 특히, 본 연구에서 제안된 방법은 두 가지 섭동의 크기

를 각각 구할 수 있는 방법으로 이전의 결과가 확장된 섭동에 대하여 안정크기를 구할 수 있는 것에 반하여 진전된 것이다. 또한, 제안된 안정범위는 타원의 형태를 가지며, 원의 형태를 갖는 이전의 결과를 포함할 수 있음을 수치예제를 통하여 보였다. 또한, 효과적인 수치 알고리즘으로 제안된 안정범위를 용이하게 구할 수 있음을 확인하였다.

표 1. 여러 가지 δ 에 대한 안정영역 비교.

Table 1. Comparison of stability bounds according to δ .

δ	기존결과 $\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq (1-\delta)(-\hat{\alpha}^* / 2)$, $\hat{\alpha}^* = -0.2918$	제안된 방법 $\eta_E^2 + (1-\delta)\eta_A^2 \leq (1-\delta)(-\hat{\beta}^*)$, $\hat{\beta}^* = -0.1458$
0	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.1458$	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.1458 = (0.3818)^2$
0.25	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.1094$	$\eta_E^2 + 0.75\eta_A^2 \leq 0.1094 = (0.3308)^2$
0.5	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.0729$	$\eta_E^2 + 0.5\eta_A^2 \leq 0.0729 = (0.27)^2$
0.75	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.0365$	$\eta_E^2 + 0.25\eta_A^2 \leq 0.0365 = (0.19)^2$

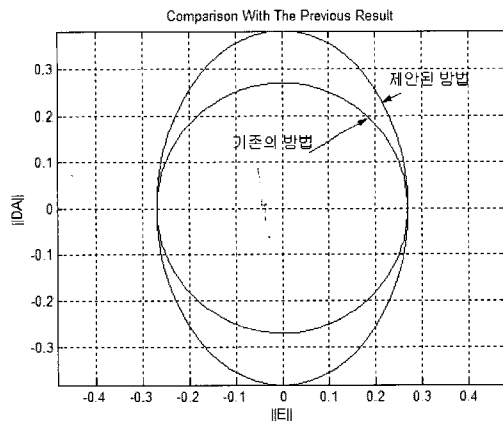


그림 1. 안정범위 도식 ($\delta=0.5$).

Fig. 1. Stability region ($\delta=0.5$).

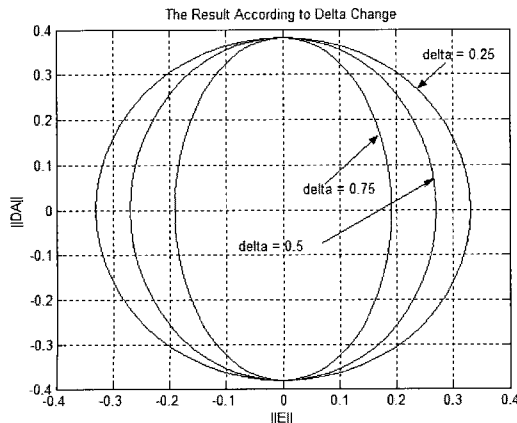


그림 2. δ 에 따른 안정범위 도식.

Fig. 2. Stability region according to δ .

표 2. 여러 가지 δ 에 대한 안정영역 비교.

Table 2. Comparison of stability bounds according to δ .

δ	기존결과 $\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq (1-\delta)(-\hat{\alpha}^* / 2)$, $\hat{\alpha}^* = 0.0124$	제안된 방법 $\eta_E^2 + (1-\delta)\eta_A^2 \leq (1-\delta)(-\hat{\beta}^*)$, $\hat{\beta}^* = 0.0057$
0	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.0062 = (0.079)^2$	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.0057 = (0.075)^2$
0.25	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.0047 = (0.069)^2$	$\eta_E^2 + 0.75\eta_A^2 \leq 0.0043 = (0.066)^2$
0.5	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.0031 = (0.056)^2$	$\eta_E^2 + 0.5\eta_A^2 \leq 0.0029 = (0.054)^2$
0.75	$\eta_E^2 + \eta_A^2 \leq 0.0016 = (0.04)^2$	$\eta_E^2 + 0.25\eta_A^2 \leq 0.0014 = (0.037)^2$

참고문헌

- [1] J. Richard, "Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems," *Automatica*, vol. 39, pp. 1667-1694, 2003.
- [2] L. Dugard and E. I. Verriest, *Stability and control of time-delay systems*, Springer-Verlag, 1998.
- [3] M. L. Ni and M. J. Er, "Stability of linear systems with delayed perturbations: an LMI approach," *IEEE Trans. of Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 1, pp. 108-112, 2002.
- [4] Z. H. Shao, "Stability bounds of singularly perturbed delay system," *IEE Proc., Control Theory Appl.*, vol. 151, no. 5, pp. 585-588, September 2004.
- [5] T. Su, C. Y. Lu and J. S. Tsai, "LMI approach to delay-dependent robust stability for uncertain time-delay systems," *IEE Proc., Control Theory Appl.*, vol. 148, no. 3, pp. 209-212, May 2001.
- [6] J. H. Kim, "Robust stability of linear systems with delayed perturbations," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 41, no. 12, pp. 1820-1822, 1996.
- [7] T. Ooba and Y. Funahashi, "Comments on "Robust stability of linear systems with delayed perturbations"," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 44, no. 8, pp. 1582-1583, 1999.
- [8] H. I. Kang, "Comments on "Robust stability of linear systems with delayed perturbations"," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 44, no. 8, pp. 1612, 1999.
- [9] S. Chen and J. Chou, "D-stability robustness for linear discrete uncertain singular systems with delayed perturbations," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 7, pp. 685-692, May, 2004.
- [10] T. Su et. al., "Correction to robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay Systems," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 48, no.4, pp. 709, 2003.
- [11] T. Su and W. Shyr, "Robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 2, pp. 425-428, Feb. 1994.
- [12] T. S. Li, J. Chiou and F. Kung, "Stability bounds of singularly perturbed discrete systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 10, pp. 1934-1938, Oct. 1999.
- [13] H. Trinh and M. Aldeen, "Robust stability of singularly perturbed discrete-delay systems," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 40 no. 9, pp.1620-1623, September, 1995.

- [14] E. I. Verriest and A. F. Ivanov, "Robust stability of delay-difference equations," *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 1, pp. 386-391, 13-15 Dec. 1995.
- [15] X.-J. Jing et al., "An LMI approach to stability of systems with severe time-delay," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 49, no. 7, pp. 1192-1195, 2004.
- [16] D. Yue and S. Won, "An improvement on 'delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty'," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 47, pp. 407-408, 2002.
- [17] J. Kim, "Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 46, pp. 789-792, 2001.
- [18] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, New York: Cambridge University Press, 1985.
- [19] S. P. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Siam, 1994.



한형석

1963년 6월 30일생. 1986년 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1988년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사). 1993년 서울대학교 제어계측공학과(공학박사). 1997년~현재 경원대학교 전자전기정보공학부 교수. 관심분야는 건설제어, 유도제어.

도제어.



이달호

1959년 7월 20일생. 1982년 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1985년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사). 1992년 서울대학교 제어계측공학과(공학박사). 1992년~현재 경원대학교 전자전기정보공학부 교수. 관심분야는 제어공학, 시스템식별.

시스템식별.