

# 3차원 와전류문제의 유한요소해석에서 쿨롱게이지조건과 전류연속조건의 영향

論 文

54B-10-5

## Effects of Coulomb Gauge Condition and Current Continuity Condition on 3-Dimensional FE Analysis for Eddy Current Problems

李 亨 範<sup>†</sup>  
(Hyang-Beom Lee)

**Abstract** - To solve the 3D eddy current problems by using FE(finite element) method with MVP(magnetic vector potential) and electric scalar potential, Coulomb gauge condition and current continuity condition have to be considered. Coulomb gauge condition enforced on existing FE formulations to insure the uniqueness of MVP looks unnatural and current continuity condition which can be driven from Ampere's law looks unnecessary. So in this paper the effect of two conditions on FE formulations are investigated in order to help to obtain accurate numerical simulation results.

**Key Words** : Coulomb Gauge Condition, Current Continuity Condition, Eddy Current, FEM, Finite Element Analysis, Modified Magnetic Vector Potential

### 1. 서 론

컴퓨터 성능의 비약적인 발전과 수치해석 기술의 발달에 따라 수치해석 기법을 이용한 공학문제의 해결은 산업계의 보편적인 방향이 되고 있다. 단순화된 모델보다는 실제에 가까운 모델을 선호하고, 정성적인 결과보다는 정량적인 결과를 요구하며, 2차원 보다는 3차원 해석 및 설계를 수행하고 있다. 전자기분야의 와전류문제분야에서도 마찬가지로 추세를 보이고 있다. 하지만, 2차원에서 3차원으로 가면서 해석을 위한 자원의 증가량은 급속히 증가한다. 특히 와전류 문제에서는 자유도의 증가 때문에 계산량이 급속히 증가한다.

와전류문제분야에서 2차원 또는 3차원 축대칭으로 문제를 푸는 경우 일반적으로 사용하는 미지수는 자기벡터포텐셜(MVP, magnetic vector potential)이며, 모델평면에 직각방향인 성분만을 사용하기 때문에 절점에서의 값을 미지수로 하는 경우 자유도(DOF, degree of freedom)는 1이다. 하지만 3차원 모델링의 경우 도체내부에서 자기벡터포텐셜의 X, Y, Z 세 방향 성분 및 전기스칼라포텐셜(ESP, electric scalar potential)을 미지수로 잡아야 하기 때문에 자유도가 4로 증가하게 된다. 이 경우 암페르법칙(Ampere's law)에서 유도되는 지배방정식만으로는 식이 부족하기 때문에 전류연속조건을 추가하여 해석하게 된다. 공간의 요소분할에 따른 미지 절점의 수만도 많이 증가하게 되는데, 자유도까지 증가하기 때문에 계산량이 아주 많이 증가한다. 따라서 주어진 요소 망에서 미지수를 줄이기 위하여 와전류가 흐르는 도체를 제외한 영역에서는 자유도가 1인 자기스칼라포텐셜

(MSP, magnetic scalar potential)을 도입하고, 도체영역에서는 전기스칼라포텐셜을 제거한 변형자기벡터포텐셜(MMVP, modified magnetic vector potential)을 채택하여 자유도를 3으로 줄이는 수식을 사용하기도 한다[1-3]. 하지만, 변형자기벡터포텐셜을 사용하는 경우 전류연속조건이 충분히 고려되지 않고 계산을 수행하게 된다.

변수로 사용하는 벡터의 유일성을 보장하기 위해서는 헬름홀츠정리(Helmholtz theorem)에 따라 그 벡터의 발산(divergence) 및 회전(curl)을 정의하여야 한다[4]. 자기벡터포텐셜의 경우 자속밀도를 정의하는 수식에서 회전을 정의하며, 발산을 정의하기 위하여 게이지조건을 사용한다. 와전류 문제의 경우 주로 쿨롱게이지조건(Coulomb gauge condition)을 사용한다. 2차원 또는 3차원 축대칭으로 문제를 푸는 경우 정식화 과정에서 스칼라 포아송방정식(scalar Poisson equation)을 얻기 위하여 게이지조건이 사용된다. 하지만, 3차원 정식화 과정에서는 게이지조건을 사용하는 곳이 없기 때문에, 해의 유일성을 보장하기 위하여 지배방정식에 쿨롱게이지조건을 인위적으로 집어넣게 된다.

본 논문에서는 미지수감소를 위한 변형자기벡터포텐셜의 사용 및 해의 유일성을 위한 쿨롱게이지조건이 와전류해석이 어떠한 영향을 미치는지에 대하여 연구하였다. 이들의 사용여부에 따라 네 가지 지배방정식을 구성하였다. 이들 지배방정식에 의한 해석결과를 비교하여, 각 방법의 타당성에 대하여 정리하였다.

### 2. 와전류문제 해석이론

본 장에서는 수치해석을 위한 이론을 정리하였다. 지배방정식을 유도하기 위한 과정 및 이를 풀기 위하여 부가적으로 필요한 수식들에 대하여 정리하였다. 이를 바탕으로 와전류문제 해석을 위한 네 가지 지배방정식을 유도하였다.

<sup>†</sup> 교신저자, 正會員 : 崇實大 工大 電氣制御시스템工學部 副教授 · 工博  
E-mail : hyang@ssu.ac.kr

接受日字 : 2005年 5月 26日

最終完了 : 2005年 8月 20日

2.1 지배방정식

유한요소법을 이용하여 와전류문제를 계산하기 위하여, 맥스웰방정식에서 변위전류를 무시한 수식과 관계식(constitutive relations)들을 정리하면 다음과 같다[5].

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_e \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.4)$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \quad (2.5)$$

여기서,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$ 는 각각 자속밀도, 자계의 세기, 전계의 세기이며  $\vec{J}$ ,  $\vec{J}_s$ ,  $\vec{J}_e$ 는 각각 총 전류밀도, 전원전류밀도, 와전류밀도이다. 또한  $\mu$ ,  $\sigma$ 는 각각 자기투자율(magnetic permeability), 전기도전율(electric conductivity)이다.

식 (2.2), 식(2.3)으로부터 자기벡터포텐셜  $\vec{A}$ 와 전기스칼라포텐셜  $V$ 를 다음 식과 같이 유도하여 정의할 수 있다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.6)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (2.7)$$

위 수식으로부터 와전류문제 해석을 위한 다음의 두 수식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \vec{J}_s \quad (2.8)$$

$$-\nabla \cdot \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \quad (2.9)$$

식 (2.9)는 식 (2.1)에 발산을 취하고, 전원전류의 발산이 영이라는 조건으로부터 유도되었다. 전기스칼라포텐셜을 고려하는 경우 식 (2.8)만으로는 미지수에 비하여 식의 개수가 부족하기 때문에 식 (2.9)의 전류연속조건식을 사용하여야 한다. 2차원해석의 경우  $\nabla V$ 항을 무시하고 식 (2.8)에 의한 수식만을 사용하기도 한다.

2.2 쿨롱게이지조건

헬름홀츠정리에 따르면 임의의 벡터장(vector field)이 유일하게 정의되기 위해서는 벡터의 발산과 회전이 정의되어야 한다. 식 (2.6)에서 자기벡터포텐셜의 회전은 정의되었으며, 발산을 정의하기 위하여 와전류 문제에서는 일반적으로 식 (2.10)의 쿨롱게이지조건(Coulomb gauge condition)을 사용한다.

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.10)$$

2차원 또는 3차원 축대칭으로 문제를 푸는 경우 정식화 과정에서 쿨롱게이지조건을 사용하여 스칼라 포아송방정식(scalar Poisson equation)을 얻는다. 식 (2.11)의 벡터항등식을 식 (2.8)에 대입하고, 식 (2.10)의 쿨롱게이지조건을 적용하여 정리하면, 식 (2.12)와 같은 포아송방정식이 얻어진다. 2차원 또는 3차원 축대칭으로 문제를 푸는 경우 단면에 직

각인 방향의 성분만 남고, 나머지 방향의 성분들은 영이 되므로 식 (2.12)로부터 스칼라 포아송방정식 형태의 지배방정식을 얻게 된다.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.11)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \vec{J}_s \quad (2.12)$$

3차원문제의 경우 식 (2.8)을 이용하여 유한요소 정식화 과정을 수행하는데, 이 과정에서는 쿨롱게이지조건을 적용하지 않는다. 즉, 식 (2.10)이 사용되지 않았기 때문에 해의 유일성이 보장되지 않는 것이다. 따라서 식 (2.8)에 식 (2.10)의 조건을 인위적으로 넣어서, 식 (2.13)과 같이 만들어서 해의 유일성을 보장하게 된다. 사실 이러한 항의 추가가 자연스러워 보이지는 않는다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A} + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \vec{J}_s \quad (2.13)$$

2.3 변형자기벡터포텐셜

와전류가 흐르는 도체 영역에서 전기도전율  $\sigma$ 가 일정하다면, 식 (2.14)와 같이 변형자기벡터포텐셜(MMVP, modified magnetic vector potential)을 정의하여 전기스칼라포텐셜을 제거할 수 있다.

$$\vec{A}^* = \vec{A} + \int \nabla V dt \quad (2.14)$$

$\nabla V$ 의 회전은 영이므로, 식 (2.14)를 식 (2.6)에 대입하여 자속밀도를 구하더라도 동일한 결과를 얻을 수 있다. 또한, 식 (2.14)를 식 (2.8)에 대입하고, 그 수식에 발산을 취하면, 전원전류의 발산이 영이므로 변형자기벡터포텐셜의 발산이 영인 수식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \vec{A}^* = 0 \quad (2.15)$$

변형자기벡터포텐셜을 사용하게 되면, 식 (2.9)가 자연적으로 만족되므로 다음 수식만 사용하면 된다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^* + \sigma \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (2.16)$$

2.4 와전류문제 해석을 위한 4가지 지배방정식

자기벡터포텐셜을 사용하는 3차원 와전류문제 정식화과정에서 해의 유일성을 보장하기 위하여 쿨롱게이지조건을 강제로 지배방정식에 집어넣었기도 하며, 미지수 감소를 통하여 계산용량을 줄이기 위해 전기스칼라포텐셜을 무시하고 변형자기벡터포텐셜을 사용하기도 한다. 본 연구에서는 이러한 과정들이 와전류문제 해석에 어떠한 영향을 미치는지 살펴보기 위하여 각각의 영향을 고려한 수식들을 이용하여 문제를 해석하였다.

쿨롱게이지조건과 변형자기벡터포텐셜의 사용 여부에 따라 다음과 같이 네 가지 수식으로 분류하였다. 수식을 분류하기 위하여 MEC, ME0, MMC, MM0의 기호를 사용하였다. 'ME'는 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용한 경우를 의미하며, 'MM'은 변형자기벡터포텐셜

을 변수로 사용한 경우이다. 세 번째 알파벳인 'C'는 쿨롱계이지조건을 강제로 부여한 경우이며, '0'은 쿨롱계이지조건을 부여하지 않은 경우이다.

정상상태해석을 하기 위하여 정리된 수식들에서  $\partial/\partial t$ 는  $j\omega$ 로 변환되었다.

[수식 A, MEC]

자기벡터포텐셜 및 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용하였으며, 쿨롱계이지조건을 적용한 경우이다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A} + \alpha(j\omega \vec{A} + \nabla V) = \vec{J}_s \quad (2.17)$$

$$-\nabla \cdot \alpha(j\omega \vec{A} + \nabla V) = 0 \quad (2.18)$$

[수식 B, MEO]

자기벡터포텐셜 및 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용하였으며, 쿨롱계이지조건을 적용하지 않은 경우이다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} + \alpha(j\omega \vec{A} + \nabla V) = \vec{J}_s \quad (2.19)$$

$$-\nabla \cdot \alpha(j\omega \vec{A} + \nabla V) = 0 \quad (2.20)$$

[수식 C, MMC]

변형자기벡터포텐셜을 변수로 사용하였으며, 쿨롱계이지조건을 적용한 경우이다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^* - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A}^* + j\omega \vec{A}^* = \vec{J}_s \quad (2.21)$$

[수식 D, MMO]

변형자기벡터포텐셜을 변수로 사용하였으며, 쿨롱계이지조건을 적용하지 않은 경우이다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^* + j\omega \vec{A}^* = \vec{J}_s \quad (2.22)$$

2.5 와전류 계산

자기벡터포텐셜 및 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용하는 경우 와전류는 식 (2.5) 및 식(2.7)로부터 식 (2.23)과 같이 정리 될 수 있다.

$$\vec{J}_e = -\alpha(j\omega \vec{A} + \nabla V) \quad (2.23)$$

또한 전기스칼라포텐셜이 무시된 변형자기벡터포텐셜을 이용한 경우 와전류는 식 (2.24)와 같이 표현된다.

$$\vec{J}_e = -j\omega \vec{A}^* \quad (2.24)$$

3. 사례 연구

쿨롱계이지조건 추가 및 변형자기벡터포텐셜의 사용에 따른 네 가지 지배방정식에 대한 해석결과를 비교, 검토하기 위하여 사례연구를 수행하였다. 개발된 코드를 검증하기 위

하여 상용프로그램의 해석결과와 비교검토하였다. 와전류 해석의 타당성을 보기 위하여 결합이 존재하는 해석모델을 사용하였다. 쿨롱계이지조건 인위적인 추가에 따른 영향을 명확히 보기 위하여 같은 외부자장인가에 대하여 두 가지 경계조건을 사용하였다.

3.1 해석 모델

사례연구를 위한 모델은 표 3.1 및 그림 3.1에 나타내었다. 구리로 이루어진 정육면체도체가 정육면체 정중앙에 있다고 가정하였다. 문제를 단순화시키기 위하여 해석하고자 하는 영역에서는 전원전류를 고려하지 않았다. 단지 X-방향으로 60[Hz]의 주파수를 가진 1[T]크기의 외부자장이 가해지고 있다고 가정했다. 사용된 도체는 구리로 가정하였다. 구리는 비자성체로 비투자율(relative permeability)은 1이며, 전기도전율(electric conductivity)은 5.8e7[S/m]이다. 외부자장의 주파수가 60[Hz]이므로 구리 도체에서의 침투깊이(skin depth)는 8.53[mm]이다. 와전류 해석의 결과를 명확하게 보기 위하여, 도체에 골(slot)을 만들었다. 와전류는 골에 의하여 방해받으면서 흐르게 된다.

유한요소 해석을 위하여 정육면체 요소로 분할하였다. 각 요소의 한 변의 길이는 모두 2.5[mm]로 동일하게 구성하였으며, 침투깊이에 대하여 3개 이상의 요소가 분할되도록 하였다.

경계조건을 이용하여 X-방향으로 1[T]크기의 외부자장을 해석모델에 부여하였다. 식 (2.6)으로부터 X-방향의 자속밀도는 식 (3.1)과 같이 정의된다. 경계조건은  $A_x$  및  $A_z$ 가 경계에서 영이 아닌 값을 가지는 경우와  $A_x$ 만이 영이 아닌 값을 가지는 두 가지 방법을 사용했으며, 표 3.2에 정리하였다. 내부도체의 경계면은 모두 공기에 의하여 둘러 싸여 있기 때문에, 전기스칼라포텐셜에 대한 경계조건은 정의할 필요가 없다.

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (3.1)$$

표 3.1 해석 모델  
Table 3.1 Analysis Model

항목	값
해석영역의 크기	80x80x80[mm <sup>3</sup> ]
도체의 재질	구리
주파수	60[Hz]
골(slot)의 크기 (X-Y-Z)	35x5x7.5[mm <sup>3</sup> ]
항목	값
도체영역의 크기	35x35x35[mm <sup>3</sup> ]
도체의 도전율	5.8e7[S/m]
침투깊이	8.53[mm]
외부자장의 크기	B <sub>x</sub> = 1[T]

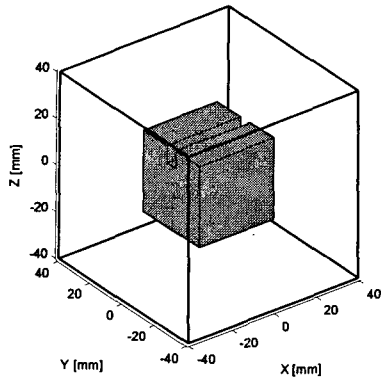


그림 3.1 해석 모델  
Fig. 3.1 Analysis Model

표 3.2 경계조건  
Table 3.2 Boundary conditions

경계조건 I	$A_x$ 및 $A_z$ 모두를 이용한 경계조건		
	$A_x$ [Vb/m]	$A_y$ [Vb/m]	$A_z$ [Vb/m]
X=-40[mm]	0	n/a	n/a
X= 40[mm]	0	n/a	n/a
Y=-40[mm]	0	n/a	-0.02
Y= 40[mm]	0	n/a	0.02
Z=-40[mm]	0	0.02	n/a
Z= 40[mm]	0	-0.02	n/a
경계조건 II	$A_z$ 만을 이용한 경계조건		
	$A_x$ [Vb/m]	$A_y$ [Vb/m]	$A_z$ [Vb/m]
X=-40[mm]	0	0	n/a
X= 40[mm]	0	0	n/a
Y=-40[mm]	0	0	-0.04
Y= 40[mm]	0	0	0.04
Z=-40[mm]	0	0	n/a
Z= 40[mm]	0	0	n/a

3.2 해석 결과

본 논문에서 제안된 방법들에 의하여 개발된 코드를 검증하기 위하여 Opera-3D의 해석결과와 비교하였다. 경계조건 I을 적용한 모델에 대한 해석을 수행한 후, (0,0,1.25)부터 (0,17.5,1.25)까지 (단위는 [mm]) 선을 따라 와전류의 크기를 비교하였다. 결과는 그림 3.2에 나타내었다. Opera-3D에서 사용된 요소는 사면체요소이며, 개발된 코드에서 사용된 요소는 육면체 요소이다. Opera-3D에서는 정확한 값을 얻기 위하여 많은 요소로 요소분할을 수행하였으며, 개발된 코드를 위해서는 각 요소의 한 변의 길이가 2.5[mm]인 육면체 요소를 사용하여 요소가 비교적 성긴 편이다. 결과를 비교하기 위하여 원점에서 Z축으로 올라간 위치의 값을 비교하였다. 그림에서 보면 요소의 따른 오차는 존재하지만, 거의 유사한 결과를 나타내고 있음을 볼 수 있다. 따라서, 본 논문에서 사용하는 코드의 해석결과는 타당함을 알 수 있다.

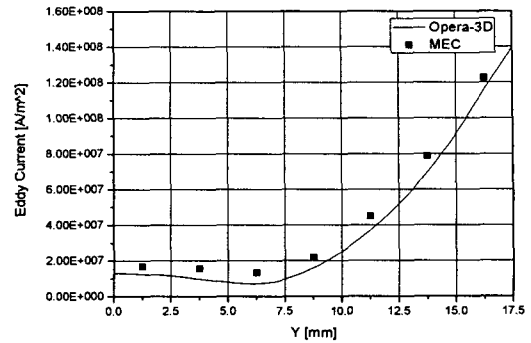


그림 3.2 해석결과의 비교  
Fig. 3.2 Comparison of analysis results

경계조건 I, 즉,  $A_x$  및  $A_z$  모두를 이용하여 경계조건을 부여한 예제를 계산하여, 자기벡터포텐셜분포, 와전류 분포 및 전기스칼라포텐셜분포를 그림 3.3부터 그림 3.6에 나타내었다. 각각의 그림에서 그림 (a), (b), (c)는 X=0인 평면(Y-Z 평면)에서 자기벡터포텐셜 및 와전류의 Y, Z 성분을 화살표로 나타낸 그림이다. 그림 (d)는 전기스칼라포텐셜의 등전위 분포를 나타낸 그림이다. 변형자기벡터포텐셜의 경우는 전기스칼라포텐셜을 사용하지 않으므로 전기스칼라포텐셜의 분포를 나타내지 않았다. 그림들은 위상(phase)을 고려하여 최댓값을 나타낸 순간에서의 값을 나타내었다.

그림 3.3(a)와 그림 3.3(b)에 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용하고 쿨롱게이지조건을 부여한 경우(수식 A, MEC)에 대한 자기벡터포텐셜의 분포를 나타내었다. 그림 3.3(a)에서 주어진 경계조건에 의하여 회전하는 자기벡터포텐셜분포를 확인 할 수 있다. 또한, 도체내부에서는 와전류의 영향에 의하여 자기벡터포텐셜의 크기가 급속히 줄어들고 있음을 볼 수 있다. 그림 3.3(b)는 그림 3.3(a)에서 도체 부분을 확대한 그림이다. 그림 3.3(c)에서는 와전류의 분포를 볼 수 있다. 와전류가 골(slot)을 피하여 도체가 있는 부분으로만 잘 흐르고 있음을 알 수 있다. 또한 표피효과 때문에 내부로 들어 갈수록 값이 감소함을 알 수 있다. 그림 3.3(d)에서는 전기스칼라포텐셜의 분포를 나타내었다. 도체내에서 영이 아닌 전장의 세기를 만들기 위한 전기스칼라포텐셜의 분포를 확인할 수 있다. 자기벡터포텐셜의 분포 및 와전류의 분포는 물리적으로 타당한 결과를 보여주고 있다.

그림 3.4는 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용하지만, 쿨롱게이지조건을 부여하지 않은 경우(수식 B, ME0)의 결과로, 그림 3.3과 동일한 결과를 나타내고 있다.

그림 3.5는 변형자기벡터포텐셜을 변수로 사용하면서 쿨롱게이지조건을 부여한 경우(수식 C, MMC)의 결과이다. 자기벡터포텐셜의 분포는 그림 3.3 및 그림 3.4의 결과와 비슷해 보인다. 하지만 와전류분포의 경우 골(slot) 및 네 귀퉁이 부분에서 다른 분포를 나타내고 있음을 알 수 있다. 특히 골부분에서 도체와 공기가 만나는 경계를 보면, 와전류가 경계면에 직각으로 흐르고 있음을 알 수 있다. 해석결과가 타당하지 않다고 할 수 있다.

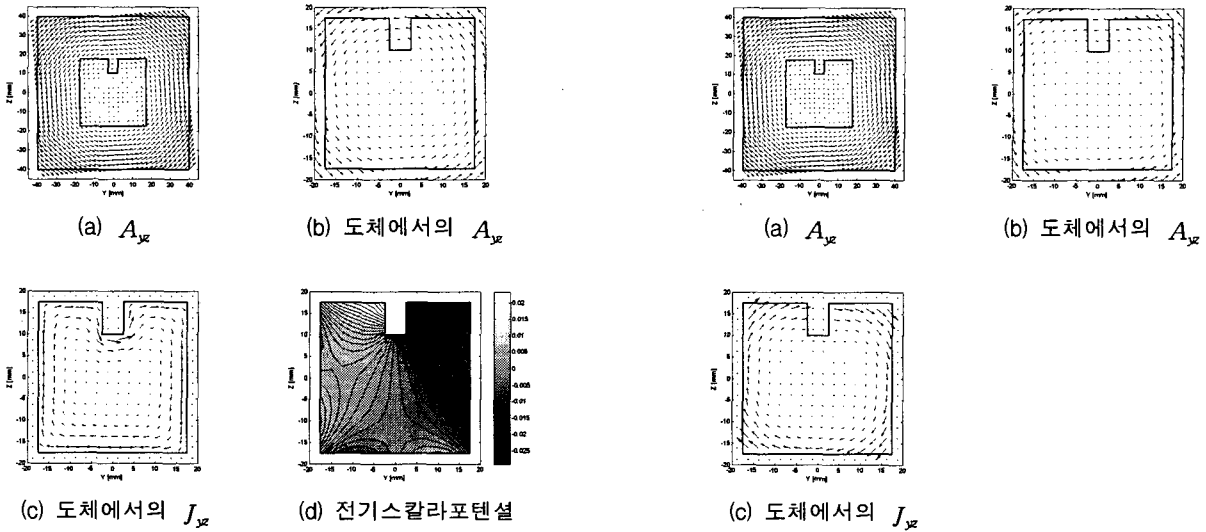


그림 3.3 MVP와 ESP를 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여 (수식 A, MEC), 경계조건 I 사용  
 Fig. 3.3 Variables - MVP & ESP, Coulomb gauge condition, (Equation A, MEC), BC I

그림 3.5 MMVP을 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여(수식 C, MMC), 경계조건 I 사용  
 Fig. 3.5 Variables - MMVP, Coulomb gauge condition, (Equation C, MMC), BC I

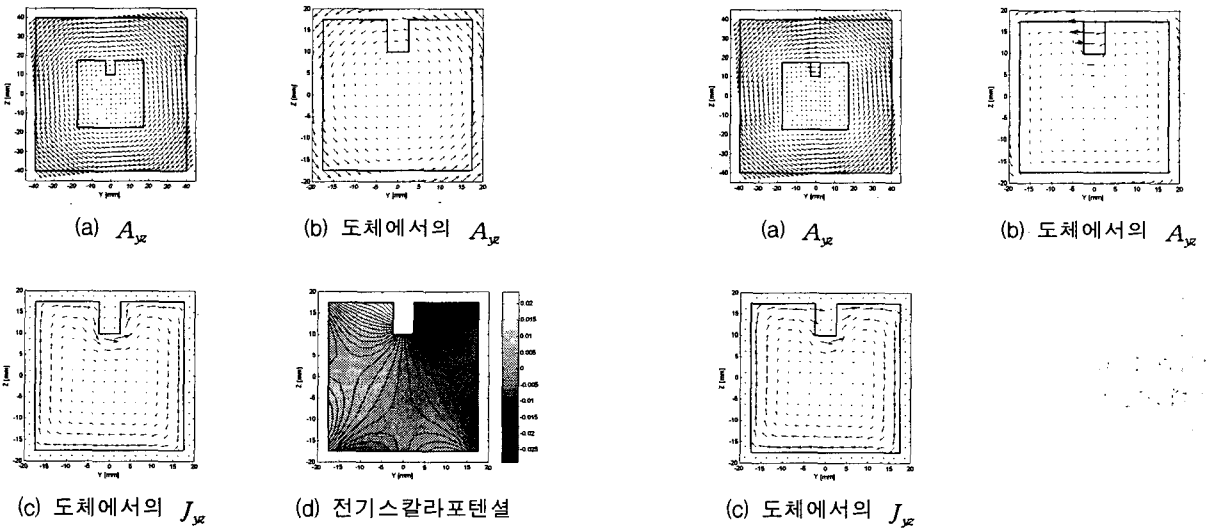


그림 3.4 MVP와 ESP를 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여 안함(수식 B, ME0), 경계조건 I 사용  
 Fig. 3.4 Variables - MVP & ESP, No Coulomb gauge condition, (Equation B, ME0), BC I

그림 3.6 MMVP을 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여 안함 (수식 D, MM0), 경계조건 I 사용  
 Fig. 3.6 Variables - MMVP, No Coulomb gauge condition, (Equation D, MM0), BC I

그림 3.6은 변형자기벡터포텐셜을 변수로 사용하면서 쿨롱게이지조건을 부여하지 않은 경우(수식 D, MM0)의 결과이다. 자기벡터포텐셜의 분포가 다른 세 가지와 많이 다를 수 있다. 또한 와전류 분포도 골부분에서 공기를 향해 흐르고 있음을 볼 수 있다. 하지만 와전류분포는 그림 3.5의 결과에 비하여 좀 더 그림 3.3 및 그림 3.4에 근사하는 하지만, 해석결과에 오류가 있음을 볼 수 있다. 변형자기벡터포텐셜을 사용한 경우, 결합이 없는 곳에서는 와전류분포가 타당해 보이지만, 결합이 존재하는 부분에서는 결과에 많은 오류가 있음을 쉽게 알 수 있다.

그림 3.5와 그림3.6의 결과에서 와전류 분포는 식 (2.24)에 나타난 것처럼 전기스칼라포텐셜이 무시된 변형자기벡터포텐셜을 이용해서만 표현된다. 따라서 변형자기벡터포텐셜을 사용한 경우 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 만일 쿨롱게이지조건을 강제로 부여한 경우, 이 조건에 따라 자기벡터포텐셜의 분포가 주어진 조건에 비교적 부합하도록 결과를 얻게 되고, 쿨롱게이지조건을 부여하지 않은 경우 와전류분포가 주어진 조건에 최대한 부합하도록 결과를 얻게 된다. 쿨롱게이지조건식 (2.10) 및 전류연속조건식 (2.9)가 해석결과에 적절히 적용되었는지를 판단하기 위하여 각각의 요

소에서 각 조건식의 적분값을 계산하였다. 적분식은 식 (3.2) 및 식 (3.3)에 나타내었다. 전류연속조건의 경우 암페르법칙으로부터 유도되므로, 식 (3.2)를 항상 만족하여야 한다. 쿨롱게이지조건의 경우 유일성을 보장하기 위하여 인위적으로 지배방정식에 추가되었기 때문에, 추가된 경우에만 그 값을 만족할 것이다. 식 (3.2) 및 식 (3.3)은  $X=16.25[mm]$ 인 Y-Z 평면에 속한 요소들에 대하여 계산하여 그림 3.7 및 그림 3.8에 각각 나타내었다. 그림 3.7 및 그림 3.8은 그림 (d)의 최댓값을 기준으로 정규화 되어 있으며, 각 그래프에서의 최댓값은 표 3.3에 나타내었다.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}_e dV = 0 \quad (3.3)$$

표 3.3의 값은 정확하게 조건들이 만족되었다면 영이 되어야 하므로, 수치적인 오차를 포함하기 때문에 값이 적을수록 조건을 최대한 만족한 것이다. 모든 조건이 다 적용된 경우(수식 A, MEC)가 식 (3.2) 및 식 (3.3)을 가장 잘 만족한 것을 알 수 있으며, 변형자기벡터포텐셜을 사용하면 쿨롱게이지조건을 적용하지 않은 경우(수식 D, MM0)가 가장 오차가 크다는 것을 확인할 수 있다. 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 사용하면서 쿨롱게이지조건을 적용하지 않은 경우(수식 B, ME0), 그림으로 확인한 해석 결과는 수식 A의 경우와 동일했지만, 실제 수치적인 결과로 비교하면 오차가 상당히 있는 것으로 나타났다.

자장을 만들기 위하여 식 (2.6)에 나타난 것처럼 자기벡터포텐셜은 회전하는 성질을 갖는다. 경계조건 I에서는 자기벡터포텐셜이 회전하도록 경계조건이 부여되었다. 만일 경계조건이 회전하지 않게 주어지더라도, 내부에서 자기벡터포텐셜이 회전하는지를 살펴보기 위하여 경계조건 II와 같은 조건을 부여하였다. 해석결과는 그림 3.9부터 그림 3.14에 나타내었다. 경계조건 II는 경계에서  $A_x$  및  $A_y$ 는 영의 값을 가지며,  $A_z$ 만이 영이 아닌 값을 가지는 경계조건이다. 따라서 그림 3.9부터 그림 3.12의 (a)그림에서 경계부분을 보면,  $A_z$  성분만이 존재하면,  $Y=-40[mm]$ 인 왼쪽경계에서는 아래로 향하는 벡터를 나타내고,  $Y=40[mm]$ 인 오른쪽경계에서는 위로 향하는 벡터로 나타남을 볼 수 있다. 그림 3.9 및 그림 3.10은 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용하는 경우로 전류연속조건을 수식에서 같이 사용하기 때문에 도체에서 와전류분포가 물리적으로 타당하게 분포함을 볼 수 있다. 이러한 와전류분포를 만들기 위한 자기벡터포텐셜의 분포는 경계부분에서의 분포와 다른 방향을 가짐을 볼 수 있다.

그림 3.11은 변형자기벡터포텐셜을 변수로 사용하면서 쿨롱게이지조건을 부여한 경우(수식 C, MMC)로 자기벡터포텐셜의 분포는 그림 3.9 및 그림 3.10의 결과와 비슷해 보인다. 하지만 도체내부의 자기벡터포텐셜은 경계부분의 분포와 비슷하게 Z방향 성분만이 존재하는 것으로 보인다. 또한, 와전류분포의 경우도 Z방향 성분만이 존재하여 윗면과 아랫면에서 공기부분과의 경계면에 직각으로 흐르는 것을 볼 수 있다.

표 3.3  $\nabla \cdot \vec{A}$  및  $\nabla \cdot \vec{J}_e$  적분값의 최대치

Table 3.3 Maximum integration value of  $\nabla \cdot \vec{A}$  and  $\nabla \cdot \vec{J}_e$

	$\nabla \cdot \vec{A}$ 의 적분값			
	수식 A MEC	수식 B ME0	수식 C MMC	수식 D MM0
경계조건 I	1.5556E-05	1.4424E-03	1.6126E-03	7.3012E-02
경계조건 II	3.0455E-04	1.3574E-03	4.9353E-03	8.5663E-02
	$\nabla \cdot \vec{J}_e$ 의 적분값			
	수식 A MEC	수식 B ME0	수식 C MMC	수식 D MM0
경계조건 I	4.1697E+05	1.0237E+08	1.7027E+08	1.4643E+09
경계조건 II	3.1008E+06	1.0720E+08	4.9571E+08	1.6754E+09

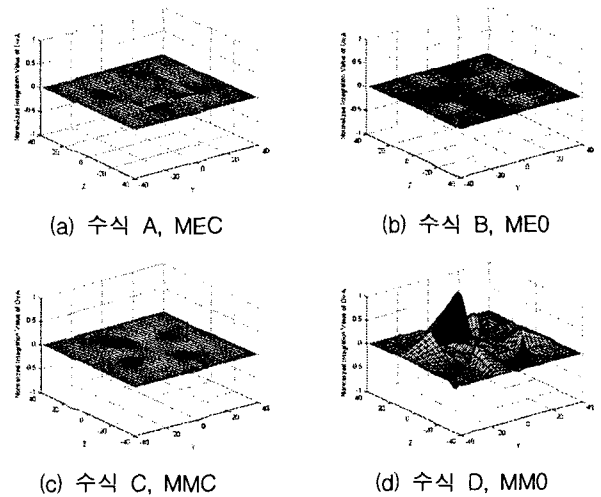


그림 3.7 경계조건 I의 경우에 대한  $\nabla \cdot \vec{A}$ 의 적분값

Fig. 3.7 Integration value of  $\nabla \cdot \vec{A}$  for BC I

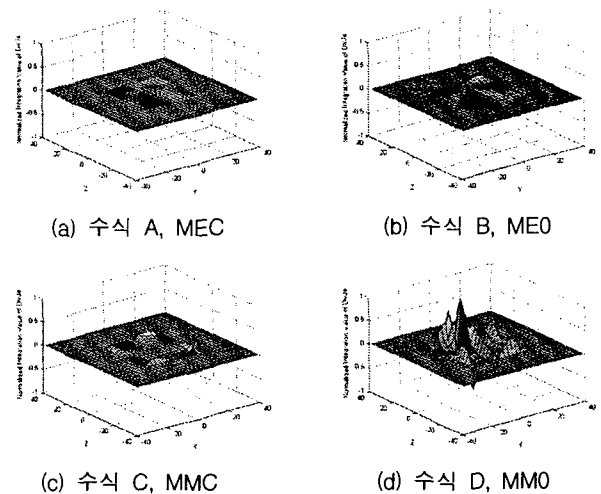


그림 3.8 경계조건 I의 경우에 대한  $\nabla \cdot \vec{J}_e$ 의 적분값

Fig. 3.8 Integration value of  $\nabla \cdot \vec{J}_e$  for BC I

그림 3.12는 변형자기벡터포텐셜을 변수로 사용하면서 쿨롱게이지조건을 부여하지 않은 경우(수식 D, MM0)의 결과로 와전류분포는 그림 3.9 및 그림 3.10의 것과 비슷해 보이지만, 자기벡터포텐셜의 분포는 아주 다른 양상을 보이고 있다.

쿨롱게이지조건 및 전류연속조건에 대한 적분을 그림 3.13 및 그림 3.14에 각각 나타내었다. 이 그래프들은 최대치는 표 3.3에 나타내었다. 경계조건 I의 결과와 비슷하게, 모든 조건이 다 적용된 경우(수식 A, MEC)가 가장 조건을 잘 만족한 것을 알 수 있으며, 변형자기벡터포텐셜을 사용하면 쿨롱게이지조건을 적용하지 않은 경우(수식 D, MM0)가 가장 오차가 크다는 것을 알 수 있다.

자기벡터포텐셜 및 전기스칼라포텐셜을 모두 변수로 사용하고, 지배방정식과 전류연속조건을 이용하여 전자기 해석을 하는 경우 자기벡터포텐셜의 분포나 와전류 분포가 물리적인 현상과 같음을 알 수 있었다. 쿨롱게이지조건 사용 여부와 상관없이 그림으로 나타난 해석 결과는 동일한 것으로 보였지만, 쿨롱게이지조건 및 전류연속조건을 적분하여 그 값을 살펴본 결과로는 쿨롱게이지조건을 반드시 고려하여야 해석결과가 정확하다는 결론을 얻을 수 있었다.

변형자기벡터포텐셜을 사용하는 경우 전기스칼라포텐셜을 무시하여 수식을 정리하기 때문에 전류연속조건을 수식 상에서 같이 계산할 수 없다. 따라서 위와 같은 예제에서는 도체의 경계에서 전류가 공기부분으로 흐를 수 있는, 물리적으로 불가능한 결과가 도출되었다.

따라서 와전류를 정확히 계산하기 위해서는 변형자기벡터포텐셜을 사용하는 것보다는 미지수는 많아지만 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 모두 사용하는 것이 좋다는 결론을 얻을 수 있다.

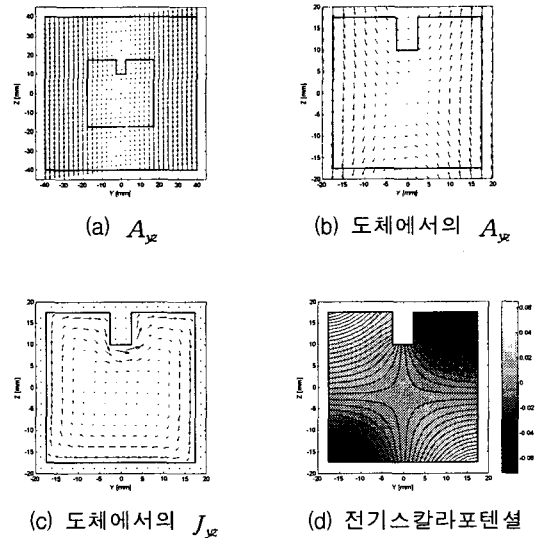


그림 3.10 MVP와 ESP를 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여 안함(수식 B, ME0), 경계조건 II 사용  
 Fig. 3.10 Variables - MVP & ESP, No Coulomb gauge condition, (Equation B, ME0), BC II

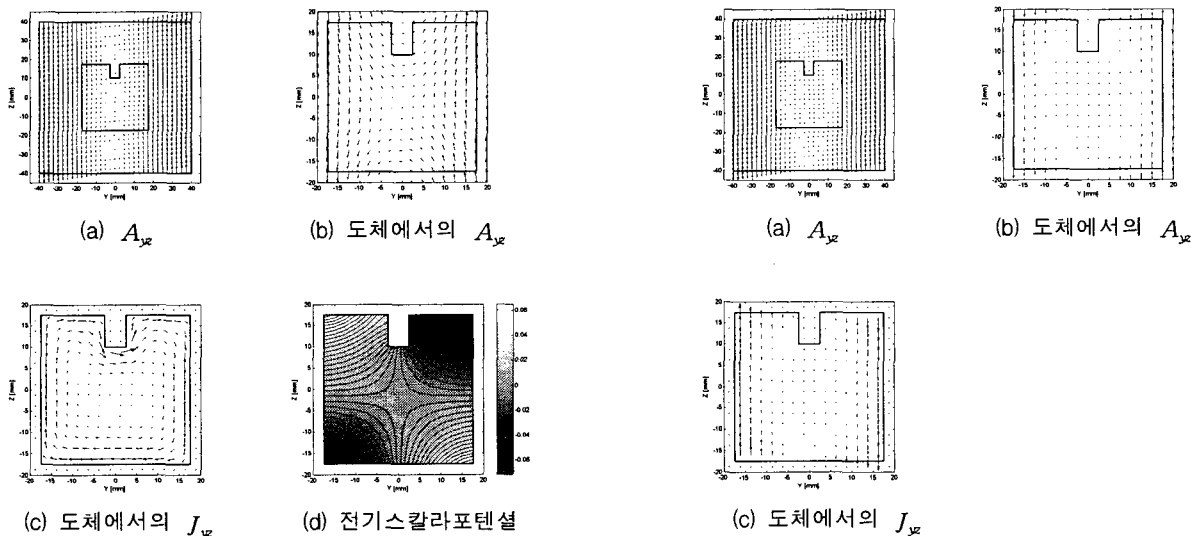


그림 3.9 MVP와 ESP를 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여(수식 A, MEC), 경계조건 II 사용  
 Fig. 3.9 Variables - MVP & ESP, Coulomb gauge condition, (Equation A, MEC), BC II

그림 3.11 MMVP를 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여(수식 C, MMC), 경계조건 II 사용  
 Fig. 3.11 Variables - MMVP, Coulomb gauge condition, (Equation C, MMC), BC II

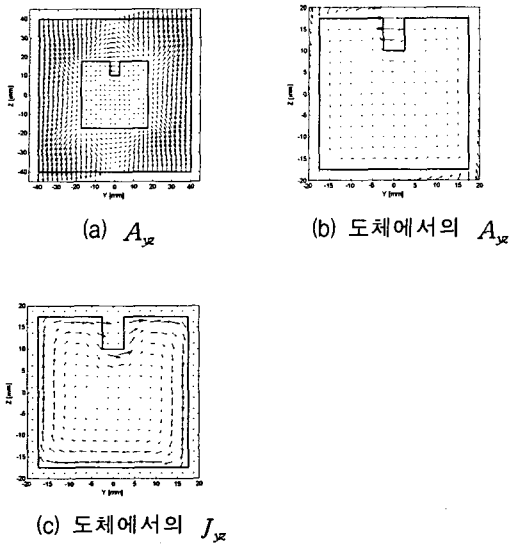


그림 3.12 MMVP을 변수로 사용, 쿨롱게이지조건 부여 안함 (수식 D, MM0), 경계조건 II 사용  
 Fig. 3.12 Variables - MMVP, No Coulomb gauge condition, (Equation D, MM0), BC II

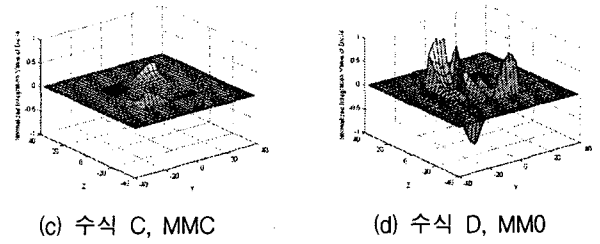


그림 3.14 경계조건 II의 경우에 대한  $\nabla \cdot \vec{J}_e$ 의 적분값  
 Fig. 3.14 Integration value of  $\nabla \cdot \vec{J}_e$  for BC II

3.3 변형자기벡터포텐셜을 사용하는 경우의 해석

변형자기벡터포텐셜을 사용하면서 쿨롱게이지조건을 적용한 경우와 적용하지 않은 경우를 살펴보았다. 쿨롱게이지조건을 적용한 경우의 적분 및 전류연속조건을 적용한 경우의 적분값을 보면 쿨롱게이지조건을 사용하지 않은 MM0의 경우의 결과가 좋지 않다. 하지만 와전류분포를 살펴보면 MMC에 비하여 비교적 물리적으로 타당한 결과를 나타내고 있음을 알 수 있다. 만일 해석하고자 하는 도체의 표면에 결합이 없이 단순한 형상을 가지고 있다고 가정 한다면 물리적으로 타당한 결과를 나타내리라 예측된다. 이는 경계조건 II의 경우에 그 효과를 더욱 뚜렷하게 살펴 볼 수 있었다.

이를 수식의 측면에서 살펴보자. 식 (2.21)은 쿨롱게이지조건을 적용한 경우의 지배방정식이며, 식 (2.22)는 쿨롱게이지조건을 적용하지 않은 경우의 지배방정식으로, 이를 식 (3.4) 및 식 (3.5)에 다시 정리하였다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^* - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A}^* + j\omega \vec{A}^* = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^* + j\omega \vec{A}^* = 0 \quad (3.5)$$

위 식에 발산(divergence)을 취하여 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \left( -\nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A}^* + j\omega \vec{A}^* \right) = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot (j\omega \vec{A}^*) = 0 \quad (3.7)$$

식 (3.7)의 경우 와전류를 나타내는  $-j\omega \vec{A}^*$ 의 발산이 영이 되지만, 식 (3.6)에서는 와전류 자체만으로는 영이 안 되고, 쿨롱게이지에 관련된 항과의 조합이 영이 된다. 따라서 수식 상으로 와전류분포가 달라질 수도 있다.

더욱이 식 (3.4)의 첫 번째 및 두 번째 항에 식 (2.11)의 벡터 항등식을 적용하면, 이미 2장에서 언급한 바와 같이 X, Y, Z성분으로 분리가 가능한 스칼라 포아송방정식 형태의 지배방정식이 된다. 이를 정리하면 식 (3.4)는 다음과 같이 된다.

$$-\nabla^2 \vec{A}^* + j\omega \vec{A}^* = 0 \quad (3.8)$$

식 (3.8)은 X, Y, Z 성분별로 분리되는 독립적인 세 개의 수식이 되며, 이 수식에 경계조건 II를 적용하면  $A_x$  및  $A_y$ 는 전 영역에서 모두 영이 되고,  $A_z$ 만이 값을 가지게 된다. 따라서 그림 3.11과 같은 자기벡터포텐셜분포를 가지게 된다.

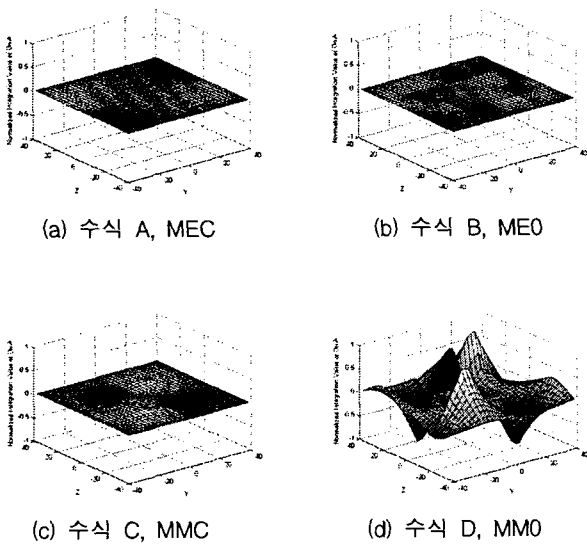
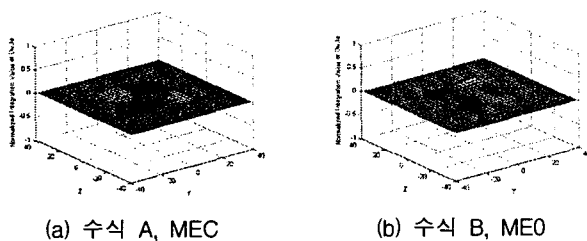


그림 3.13 경계조건 II의 경우에 대한  $\nabla \cdot \vec{A}$ 의 적분값  
 Fig. 3.13 Integration value of  $\nabla \cdot \vec{A}$  for BC II





#### 4. 결 론

본 논문에서는 자기벡터포텐셜을 변수로 사용하는 3차원 와전류문제의 유한요소해석에서 전류연속조건과 쿨롱게이지 조건의 영향에 대하여 살펴보았다. 2차원 및 3차원 축대칭 해석을 하는 경우 해의 유일성을 보장하기 위한 쿨롱게이지 조건을 사용하게 되지만, 3차원 해석에서는 인위적으로 지배 방정식에 집어넣어야 했다. 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 미지수로 하는 경우 수식의 개수를 미지수의 수와 맞추기 위하여 전류연속조건을 수식에 추가하여 사용한다. 이러한 3차원 해석의 경우 미지수가 급속히 증가하기 때문에, 미지수를 줄이기 위하여 전기스칼라포텐셜을 제거한 변형자기벡터포텐셜을 사용하기도 한다. 본 논문에서는 이들의 영향을 살펴보았다. 해석결과를 그림으로 나타내었을 때 쿨롱게이지조건의 사용여부에 상관없이 자기벡터포텐셜 및 전기스칼라포텐셜을 사용한 경우의 결과가 동일해 보였으며, 정확한 결과를 보였다. 하지만, 쿨롱게이지조건 및 전류연속 조건을 적용하여 계산해 보았더니 쿨롱게이지조건을 사용한 경우가 좀 더 정확한 결과를 나타내는 것을 볼 수 있었다. 변형자기벡터포텐셜을 사용한 경우 경계에서 와전류의 법선 성분이 영이어야 하는 성질을 위반하고 도체 경계 밖의 공기영역으로 와전류가 흐르는 틀린 결과를 얻었다. 본 연구 결과 3차원 와전류해석에서는 계산량이 증가하지만 정확한 해석을 위해서는 자기벡터포텐셜 및 전기스칼라포텐셜을 변수로 사용하고 쿨롱게이지조건을 사용하여야 한다는 결론을 얻을 수 있었다. 본 연구 결과는 실제 모델의 3차원 와전류 해석을 하는데 있어서 해석 결과의 이해 및 타당한 결과를 얻기 위한 과정에 도움이 될 것이다.

#### 참 고 문 헌

- [1] C. R. I. Emson and J. Simkin, "An optimal Method for 3-D eddy currents," IEEE Trans. on Mag., Vol. 19, No. 6, November 1983.
- [2] C. F. Bryant, C. R. I. Emson and C. W. Trowbridge, "A comparison of Lorentz Gauge formulations in eddy current computations," IEEE Trans. on Mag., Vol. 26, No. 2, March 1990.
- [3] O. Biro and K. Preis, "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents," IEEE Trans. on Mag., Vol. 25, No. 4, July 1989.
- [4] David K. Cheng, Fundamentals of Engineering Electromagnetics, Prentice Hall, 1992.
- [5] N. N. Rao, Elements of Engineering Electromagnetics, 5th Ed., Prentice Hall, 1999.

#### 저 자 소 개



#### 이 향 범 (李 享 範)

1967년 10월 21일생. 1989년 서울대 전기공학과 졸업(학사). 1991년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학석사). 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1995~1996년 기초전력공학공동연구소 전임연구원. 1996~1998년 군산대학교 전기공학과 전임강사. 2004~2005년 미국 Michigan State University 방문교수. 1998~현재 송실대학교 전기제어시스템공학부 부교수.

Tel : (02) 820-0641

Fax : (02) 814-2133

E-mail : hyang@ssu.ac.kr