

## 강체벽과 충돌하는 외팔보의 진동

### Dynamic Contact of a Cantilever Beam with Rigid Wall Condition

박 남 규\* · 장 영 기\* · 김 재 익\* · 김 규 태\*

Nam-Gyu Park, Young-Ki Jang, Jae-Ik Kim and Kyu-Tae Kim

(2005년 4월 28일 접수 ; 2005년 10월 26일 심사완료)

**Key Words** : Dynamic Contact(동접촉), Gap(간극), Inequality Constraints(부등식 제한조건), Penalty Function(벌칙함수), Control Rod(제어봉)

#### ABSTRACT

The dynamic contact model of a beam that contacts to a rigid wall in a reactor core was studied. The gap between the beam and contact wall results in dynamic contact accompanying inequality constraints. The inequality constraints can be relieved to an equality constraint problem by introducing a convex penalty function. In this work, a beam with contact condition is formulated using quasi-convex penalty function and numerically solved. General coordinate solution is adopted to raise computational efficiency. Also nonlinearity is examined in the beam contacting to a rigid wall.

#### 1. 서 론

기계부품의 대부분은 기어 혹은 체인의 동력전달과 같이 물리적 접촉에 의해 에너지를 교환한다. 따라서 접촉은 구조물의 기능을 완수하기 위한 중요한 변수가 될 수 있으나 구조물 상호간의 접촉으로 원치않는 진동 또는 소음을 유발하는 원인이 되기도 한다. 접촉을 수반하지 않는 선형 구조물의 지배방정식은 최소에너지보존법칙을 만족하는 등식(equality)으로 표현되나, 접촉이 수반되면 미지의 접촉력으로 인해 부등식(inequality)으로 표현된다. 또한 접촉은 마찰력을 수반하는 경우가 대부분이며 이때의 마찰력 역시 알 수 없으므로 접촉문제의 풀이는 상대적으로 난해하다.

이론적인 어려움을 해소하고자 Hertz<sup>(1)</sup>는 마찰이 없는 타원접촉의 정적(static) 해를 구하여 접촉문제

의 공학적 접근을 시도하였다. 이후 접촉에 대한 많은 연구가 이루어졌으며, Martin<sup>(2)</sup>, Duffour<sup>(3)</sup>는 마찰을 수반하는 동적 접촉문제에 대한 해석을 제시하였다. 특히 Timoshenko<sup>(4)</sup>는 국부적인 Hertzian접촉을 가정하여 오일러 보(Euler beam)에 가해지는 충격력을 구하였다.

이 연구는 핵연료안내관과 제어봉 사이의 동적접촉에 대하여 논하였다. 평상시 원자로의 제어봉은 핵연료 집합체의 안내관 상단쪽에 삽입되어 있고, 냉각수의 난동(random motion)에 의해 안내관과 끊임없이 접촉하여 마모에 의한 안내관 손상이 발생할 수 있다. 이러한 동적접촉(dynamic contact)은 릴레이(relay)와 같은 부품에서도 볼 수 있으며, Fathi<sup>(5)</sup>는 보의 끝단이 탄성스프링과 접촉하는 문제의 해를 제시하였다. Lo<sup>(6)</sup>는 Duhamel 적분식을 이용한 보의 끝단에 작용하는 접촉력을 계산하였으며 실험적 결과와 비교하였다.

이 연구의 대상인 제어봉은 한단이 고정되고 다른 한단은 양쪽 간극이 존재하여 강체벽과 마찰 없이 충돌하는 문제로 단순화 하였다. 접촉문제에서 정의되는 부등식의 해를 구하기 위해 벌칙함수를 도입하여

\* 책임저자 : 정희원, 한전원자력연료(주) 핵연료설계처  
E-mail : nkpark@knfc.co.kr

Tel : (042) 868-1197, Fax : (042) 863-4430

\* 한전원자력연료(주) 핵연료설계처

등식화 하였다. 해석의 효율성을 위해 한단이 고정된 보의 모드해석을 통해 끝단의 거동을 모드좌표 (generalized coordinate) 상에서 구하여 물리좌표로 변환하였고, 초기조건과 입력하중 조건에 따른 거동을 예측하였다.

## 2. 제어봉과 안내관 구조물

### 2.1 원자로 구조물 소개

제어봉(control rod)은 스테인레스스틸 계열의 재질(inconel)로 제작되고 원자로의 출력을 조절하는 중요한 원자로 구조물이며, Fig.1과 같다. 그림의 경우 4개의 제어봉이 스파이더구조물에 연결되어 한 개의 제어봉 집합체를 구성하며 이 집합체는 CEDM(control element drive mechanism)에 연결되어 상하의 움직임이 제어된다.

개별적인 제어봉들은 붕소화합물(B<sub>4</sub>C)로 제작된 여러개의 펠렛을 내장하고 있고, 핵반응을 주관하는 중성자는 제어봉의 위치에 따라 펠렛에 흡수되는 비율이 달라지며 이러한 원리로 원자로의 반응을 제어할 수 있다.

한편 제어봉이 삽입되는 핵연료집합체의 안내관은 Fig.2와 같으며, 한국표준형원자로에 장착되는 한 단발의 핵연료집합체에는 4개의 안내관이 있다. Fig.2의 안내관 왼쪽 끝단은 집합체의 하단부에 장착되는데, 안내관의 지름이 점점 하단부쪽으로 접근할수록 작아져 제어봉의 낙하 충격을 완충하는 작용을 한다.

통상 운전의 경우 제어봉은 안내관의 상단부(Fig.2

의 오른쪽)에 위치하여 있으나, 정지 시 자유낙하에 의해 완전히 삽입된다. 통상 운전 시 제어봉과 안내관 상단은 일정한 간극을 두고 위치하여야 하나, 냉각수의 운동상태에 따라 제어봉 끝단이 안내관 내벽과 충돌한다. 따라서 충돌에 의한 진전성평가를 위한 측면에서 충격피로 및 마모 등에 대한 고려가 필요하다.

### 2.2 단순화된 제어봉 구조물

이 연구에서 다루고자하는 제어봉과 안내관의 단순화된 모델은 Fig.3과 같다. 제어봉의 한쪽은 CEDM(control element drive mechanism)에 연결되어 고정되므로 한단이 고정된 상태를 가정하였다. 다른 끝은 안내관 상단에 위치하므로 안내관을 강체벽으로 가정하여 끝단과 강체벽 사이에 간극을 갖도록 하였다. 여기서 설정된 길이  $L$ 은 6m이며, 강체와 끝단 사이의 간극은  $\pm 2\text{ mm}$ ,  $\pm 4\text{ mm}$ ,  $\pm 8\text{ mm}$ 를 대상으로 해석하였다.

실제의 경우 마찰이 수반되나 마찰력의 효과는 배제하였다. 또한 엄밀히 안내관을 강체벽이라고는 할 수 없으나, 4개의 안내관이 기구적으로 구속되어 제

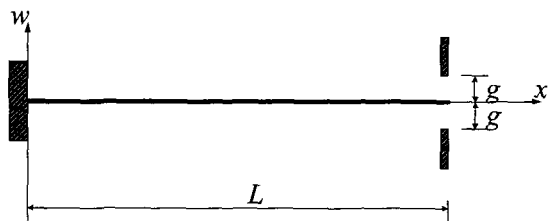


Fig. 3 Simplified control rod with gap condition

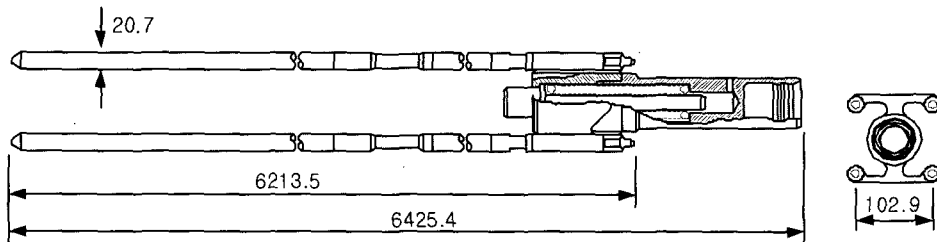


Fig. 1 Control rod assembly(unit : mm)

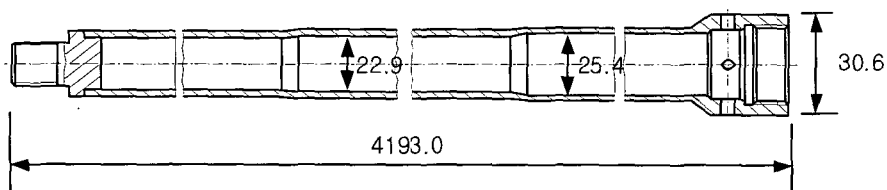


Fig. 2 Guide tube in a fuel assembly(unit : mm)

어봉에 비해 상대적으로 움직임의 제약이 있으므로 강체벽으로 가정하였다.

### 3. 변분부등식의 근사해

#### 3.1 근사 운동방정식

마찰이 없는 선형 구조물에 접촉이 존재하는 경우, 구조물의 운동( $u$ )은 다음의 부등식을 만족시켜야 한다<sup>(2,7)</sup>.

$$\int_0^l \int_{\Omega} \sigma_{ij}(v_{i,j} - u_{i,j}) d\Omega - \int_0^l \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i (v_i - \dot{u}_i) d\Omega \geq \int_0^l \int_{\Gamma} \tau_i (v_i - u_i) dS, \forall v \in K \quad (1)$$

여기서  $\sigma$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $\tau$ 는 각각 응력, 가상변위, 밀도, 외력(traction vector)을 의미하며,  $K$ 는 접촉조건을 만족시키는 모든 후보 해의 부분 집합이다. 또한  $\Omega$ ,  $\Gamma$ 는 구조물의 도메인과 경계를 의미하며 문자 위의 점(dot)은 시간 미분이다. 부등식 (1)의 첫 번째항과 두째항은 내부에너지와 운동에너지를 의미한다. 마지막 항은 외력이 주어진 경우의 외부에너지를 의미한다. 미지의 접촉력을 알 수 있다면 식 (1)은 등식으로 변환이 가능하다.

Fig. 3과 같은 구조물에 대해, 식 (1)은 단면의 회전 없는 보의 이론을 적용하여 다음 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$\int_0^l \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{w} - w) dx - \int_0^l \int_0^L \rho A \dot{w} (\bar{w} - \dot{w}) dx \geq \int_0^l \int_0^L p(x,t) (\bar{w} - w) dx, \forall \bar{w} \in K \quad (2)$$

여기서  $EI$ 는 제어봉의 횡방향 강성(flexural rigidity)이며,  $A$ 는 단면적,  $w$ 는 횡방향의 움직임을 의미하며,  $p$ 는 제어봉의 횡방향으로 주어진 외력이다. 또한 후보 함수  $\bar{w}$ 는 다음의 조건을 만족하는 Hilbert공간( $H^2$ )의 함수이다.

$$K = \{ \bar{w} \in H^2(\Omega) \mid \bar{w} = 0, \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0 \text{ and } g_l^c \leq \bar{w} \leq g_u^c \text{ at } x = L \} \quad (3)$$

여기서  $g_l^c$ 와  $g_u^c$ 는 운동변위를 구속하는 조건(inequality constraints)으로 각각 하향 및 상향으로

의 간극을 의미한다.

만일 접촉력이 알려져 있다면, 식 (2)는 등식으로 변환 될 수 있다. 또, 정의된 문제를 다른 관점에서 해석할 수 있다. 즉 접촉하는 경우 강체스프링은 제어봉의 구조물이 되며 이때 강체스프링이 일을 할 수 있다고 가정하여 이를  $\Phi$ 라 하면, 식 (2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_0^l \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{w} - w) dx - \int_0^l \int_0^L \rho A \dot{w} (\bar{w} - \dot{w}) dx + \Phi(\bar{w}) - \Phi(w) \geq \int_0^l \int_0^L p(x,t) (\bar{w} - w) dx, \forall \bar{w} \in K \quad (4)$$

단 위의 식에서 강체스프링에 의한 에너지 포텐셜은 다음의 조건을 만족하여야 한다.

$$\Phi(\bar{w}) \geq \Phi(w) \quad (5)$$

위의 조건을 만족시키고, 미분가능한 포텐셜  $\Phi$ 를 정의 할 수 있다면 식 (4)는 다음의 등식으로 변환될 수 있다<sup>(7)</sup>.

$$\int_0^l \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w dx - \int_0^l \int_0^L \rho \dot{w} A \delta \dot{w} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta w(x_L) = \int_0^l \int_0^L p(x,t) \delta w dx \quad (6)$$

여기서  $\delta w(x_L)$ 은  $L$ 의 위치에서만 정의되는 델타함수를 의미한다. 단면의 기하학적 특성이 전 구간에 걸쳐 동일하다고 가정하면, 식 (6)으로부터 다음과 같은 편미분 방정식을 구할 수 있다.

$$\rho A \ddot{w} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta(x-L) = p(x,t) \quad (7)$$

$\Phi$ 는 미분가능하여야 하므로 다음과 같은 오목 함수(quasi-convex function)를 생각할 수 있다.

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} (w(L) - g_l^c)^2, & w(L) \leq g_l^c \\ 0, & g_l^c < w(L) < g_u^c \\ \frac{1}{2\varepsilon} (w(L) - g_u^c)^2, & w(L) \geq g_u^c \end{cases} \quad (8)$$

여기서  $\varepsilon$ 은 강체스프링을 근사화 할 수 있는 작은 값이다.

식 (8)은 벌칙함수를 의미하며, 끝단의 운동이 주

어진 간극을 벗어나는 경우 벌칙을 부여한다. Fig. 4에 위에서 정의한 벌칙 함수를 도시하였다. 여기서  $g$ 는 설정된 간극을 의미하며, 끝단의 운동이 주어진 간극안에 있으면 어떠한 벌칙도 부과하지 않으며 간극을 벗어나는 경우 벌칙을 가하는데 그 정도는  $\epsilon$ 에 따라 달라진다. 완전 강체인 경우 Fig. 4의 점선과 같은 조건을 만족하여야 하지만 이 경우 미분 불가능하므로 해를 찾기가 어려우며, 실선과 같이 정의하면 근사적인 해를 구할 수 있다.

### 3.2 모드해석에 의한 근사해

접촉이 없는 외팔보의 고유치문제의 특성방정식(characteristic equation)은 다음과 같다.

$$\cos(\beta L) \cosh(\beta L) + 1 = 0 \quad (9)$$

여기서  $\beta$ 는  $(2\pi f)^2 \frac{\rho A}{EI}$ 이며, 위의 식을 만족하는 주파수( $f$ )로부터 고유값(eigenvalue)을 구하고, 질량에 대해 정규화된 고유함수(eigenfunction)를 구하여 이를  $y(x)$ 라고 하면 제어봉의 운동은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x) q_i(t) \quad (10)$$

위의 식 (10)을 식 (7)에 대입하고 특정 고유함수를 곱하여 전체길이에 대해 적분하면 고유공간좌표( $q$ )에 대하여 다음과 같은 무한개의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{q}_m(t) + \omega_m^2 q_m(t) = \int_0^L y_m p(x, t) dx - \int_0^L y_m j \left( \sum_{i=1}^{\infty} y_i(L) q_i(t) \right) dx, \quad m = 1, \dots, \infty \quad (11)$$

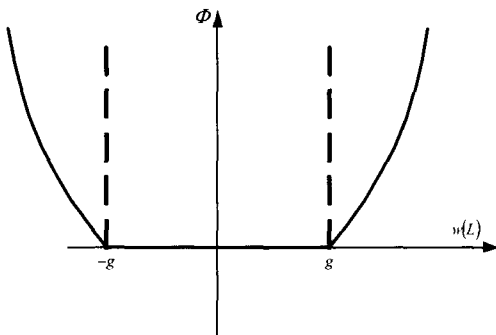


Fig. 4 A quasi-convex penalty function

여기서  $j$ 는  $\Phi$ 의 미분을 뜻하며, 등호 오른쪽 첫 번째 항은 작용하는 외력에 기인하며 두 번째 항은 접촉조건에 의해 파생되었다. 또한  $\omega_m$ 은  $m$ 번째의 고유진동수(circular natural frequency)를 의미한다.

초기조건은 상미분 방정식과 동일한 유도과정을 거쳐 나타낼 수 있다. 즉 고유좌표에서의 초기 변위는 다음 식 (12)와 같고

$$q_m(0) = \int_0^L \rho A y_m w(x, 0) dx, \quad m = 1, \dots, \infty \quad (12)$$

초기속도는 다음 식과 같다.

$$\dot{q}_m(0) = \int_0^L \rho A y_m \dot{w}(x, 0) dx, \quad m = 1, \dots, \infty \quad (13)$$

따라서 식 (11)~(13)으로부터 고유좌표에서의 해를 얻을 수 있으며 다시 식 (10)의 관계로부터 제어봉의 운동을 예측할 수 있다.

## 4. 수치해석 및 고찰

### 4.1 자유진동

모드해석을 위해 사용된 제어봉의 길이 및 지름은 각각 6 m,  $2.07 \times 10^{-2}$  m이다. 제어봉은 환형 봉으로 봉 소펠렛을 감싸는 이중구조이나, 수치해석의 편의상 단면은 인코넬로 구성된 중실 빔(solid beam)으로 가정하였다. 인코넬의 물성치는 스테인레스스틸 계열이므로 Young계수와 밀도는 각각  $200 \times 10^9$  Pa,  $7860 \text{ kg/m}^3$ 을 가정하였다. 이러한 조건으로, 55개의 빔요소(beam element)로 구성된 유한요소 해석에 의한 식 (9)를 만족시키는 처음 5개의 고유치의 근사값은 Table 1과 같다.

외력이 없이 초기조건이 주어진 경우의 제어봉의 운동을 관측하기 위해 다음의 조건을 가정하였다.

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0 \\ \dot{w}(x, 0) &= 0.01 x \end{aligned} \quad (14)$$

즉 위의 조건은 평형상태에서 순간적인 충격에 의한 초기속도를 가정한 조건이며 고정단으로부터 끝단으로 갈수록 속도가 증가하는 모양이다.

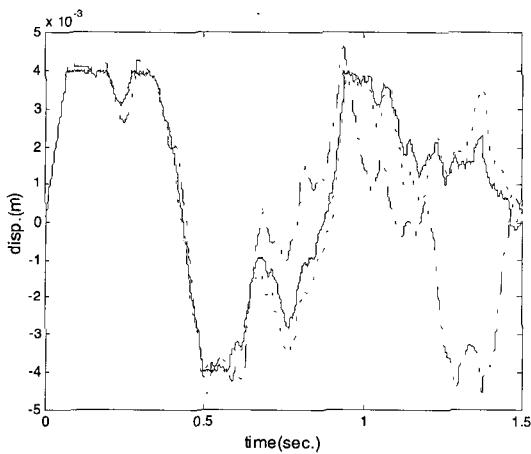
식 (11)~(13)에서 유한개의 고유좌표를 고려하였으며,  $\epsilon$ 의 크기에 따른 운동방정식의 해를 구하였다. Fig. 5는 20개의 모드를 고려하고  $\epsilon = 10^{-8}$ 인 경우는 실선으로,  $\epsilon = 10^{-6}$ 인 경우는 점선으로,

$\epsilon = 10^{-4}$  인 경우 일점쇄선으로 도시한 그림이다. 이때  $\epsilon = 10^{-4}$  인 경우는 주어진 간극 4 mm를 벗어나는 구간이 존재하고, 다른 두 경우에 비해 후반의 운동형태가 상이하므로 강체벽 조건의 구현을 위한 신뢰성은 떨어진다. 따라서  $\epsilon$ 을  $10^{-6}$ 이하로 제한함이 타당하며 이 연구에서는  $10^{-8}$ 을 이하의 모든 경우에서 고려하였다.

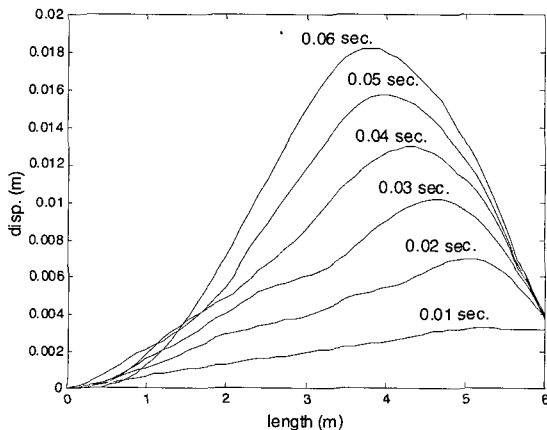
시간증분은 20번째 고유진동수인 433 Hz까지의 영향을 고려하기 위해 1/1000초로하여 미분방정식을 계산하였다. 식 (10)에서 유추할 수 있듯이 고려되는

**Table 1** Some natural frequencies of the model

| Mode    | 1    | 2    | 3    | 4     | 5     |
|---------|------|------|------|-------|-------|
| fr.(Hz) | 0.41 | 2.54 | 7.12 | 13.95 | 23.07 |



**Fig. 5** Motion at the end with respect to  $\epsilon$  (solid :  $10^{-8}$ , dot :  $10^{-6}$ , dash dot :  $10^{-4}$ )

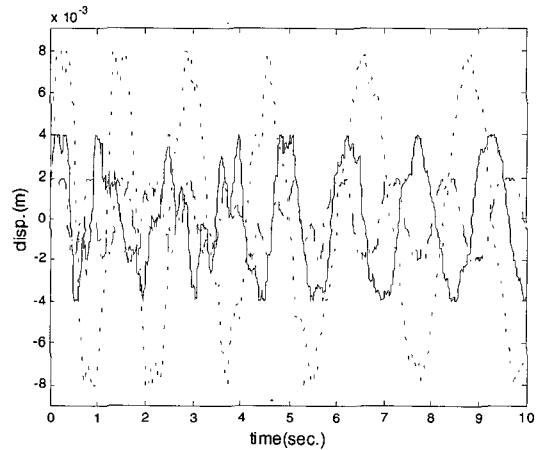


**Fig. 6** Motion of the beam at each time

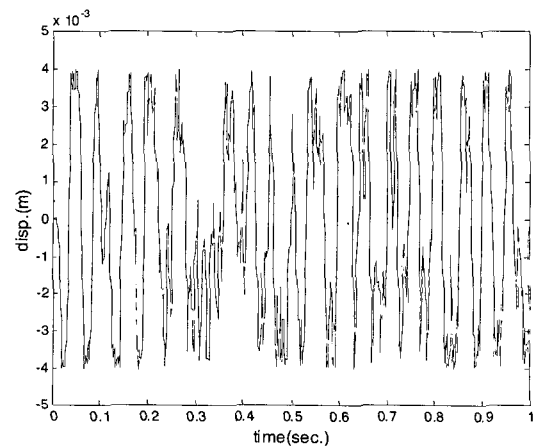
모드의 수가 너무 작아도 문제이지만, 고려되는 모드의 수가 증가할수록 증분시간은 감소되어야하므로 수치해석상의 문제가 발생할 수 있다.

Fig. 6은 제어봉의 움직임을 1/100초 단위로 6/100초까지 도시한 그림이며, 제어봉의 끝단이 충돌하면서 충격의 영향으로 제어봉의 궤형이 좌측으로 이동하는 모양이다.

간극의 크기가 달라지면 끝단과 벽의 충돌시간이 변화하며, Fig. 7에 4 mm의 간극을 기준으로 각각 2배, 1/2배의 크기를 갖는 간극에 대한 운동을 도시하였다. 동일한 속도조건에서 간극의 크기를 넓히거나 좁히면 충돌주기가 변하는데, 4 mm 간극의 경우 약 1.5초, 8 mm 간극의 경우 약 2초, 2 mm 간극의 경우 약 1초 정도의 충돌주기가 발생하고 있다. 즉, 4 mm



**Fig. 7** End motion of the beam with different gap sizes (solid : 4 mm gap, dot : 8 mm gap, dash dot : 2 mm gap)



**Fig. 8** Displacement at the end (20 Hz excitation)

간극을 기준으로 2배의 간극확대는 약 4/3배의 주기로, 0.5배의 간극감소는 약 2/3배의 주기로 충돌함을 알 수 있다.

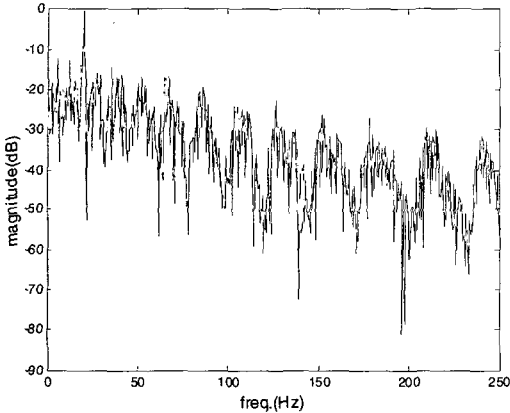


Fig. 9 Auto power spectrum (20 Hz excitation)

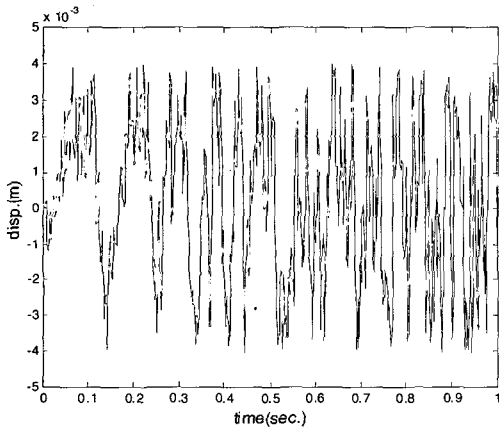


Fig. 10 Displacement at the end (120 Hz excitation)

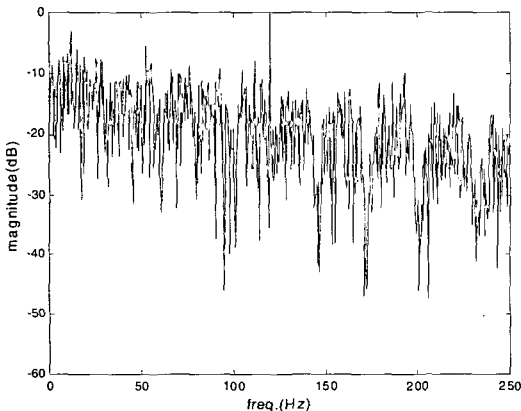


Fig. 11 Auto power spectrum (120 Hz excitation)

## 4.2 강제진동

제어봉의 중간부분에서 냉각수 급수 펌프의 회전에 의한 20 Hz 및 120 Hz로 가진이 주어진 경우의 응답을 예측하였다. 초기조건은 변위와 속도가 모두 0인 경우를 가정하였고, 처음 5초간의 운동을 기록하였다.

Fig. 8에 20 Hz 주파수 성분의 싸인파를 입력으로 하였을 때 0~1초 구간에서 끝단의 변위를 도시하였다. 끝단의 움직임이 강체벽 제한조건인 4 mm 구간에서만 움직이는 것을 볼 수 있다. 주파수 스펙트럼의 분포를 확인하기 위해 Hanning 윈도우를 75 % 오버랩(overlap)조건으로 하여 신호를 분석하였고, Fig. 9는 이때의 자기 스펙트럼(auto power spectrum)이다. 충돌이 없는 일반적인 구조물의 경우 가진 주파수 성분이 주도적으로 나타나지만, 강체 외벽에 충돌하는 경우 가진 주파수 외의 성분이 출현함을 볼 수 있다. 이 경우는 가진 성분인 20 Hz 이외에 5 Hz, 10 Hz의 성분이 작용함을 알 수 있다. 즉 봉의 끝단이 양쪽 강체벽에 충돌하는 것은 또다른 외력의 작용으로 볼 수 있으며 일련의 충격으로 인해 가진 성분이 외의 주파수로 가진이 되는 것으로 추론할 수 있다.

가진 주파수가 120 Hz인 경우, 끝단의 변위는 Fig. 10과 같고 그의 스펙트럼분포는 Fig. 11과 같다. 이때에도 역시 가진 주파수가 아닌 12 Hz, 52 Hz 근방의 성분이 검출되고 있다.

이상의 결과에서 보듯이 끝단에서 벽과 충돌하는 경우, 가진 성분이 아닌 또다른 성분으로 가진되는 비선형 현상을 볼 수 있다<sup>(8)</sup>. 물론 간극의 크기나 가진 성분의 종류에 따라 나타나는 성분은 달라지겠지만, 위의 예에서와 같이 또다른 가진 성분에 대한 대책을 마련함이 과도한 진동 억제를 위한 방안이 될 것이다.

## 5. 결론

제어봉은 원자로의 출력을 조정하는 중요한 구조물이며, 핵연료 집합체의 안내관을 통해 삽입된다. 정상 시 제어봉은 안내관 상부에 끝단이 삽입 되어 있고 원자로 내의 유동으로 안내관과의 충돌이 불가피하다. 최악의 경우, 이런 연속적인 충돌에 의한 마모로 부품의 훼손이 발생하여 구조물로서의 기능을 할 수 없는 경우도 발생할 수 있다.

이 연구에서는 제어봉 구조물과 안내관과의 충돌을 이론적으로 설명하고자 별첨함수를 도입하여 충돌 현

상을 구현할 수 있었다. 또한 모드해석에 의해 유한 개의 상미분방정식을 도입할 수 있었고, 모드좌표상의 운동을 물리좌표계로 변환하여 제어봉의 움직임을 파악할 수 있었다.

수치해석의 결과를 통해서 알 수 있듯이 간극의 크기는 제어봉의 충돌주기에 관여한다. 충돌주기는 충격피로 및 마모와 관련이 있으므로 적절한 간극의 설정으로 충돌주기를 설정한다면 필요한 정도의 기계적 건전성을 확보할 수 있을 것이다. 또한 충돌에 의해 가진성분 이외의 다른 주파수 성분을 파생시키는 비선형성을 관측할 수 있었다.

물론 제어봉의 운동은 간극의 정도와 가진원의 종류에 따라 변화될 것이나, 이러한 변화의 정도는 벌칙함수를 도입한 운동방정식으로부터 예측할 수 있겠다.

## 후 기

이 연구는 과학기술부의 원자력연구개발사업의 일환으로 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

(1) Johnson, K. L., 1985, Contact Mechanics, Cambridge Univ. Press.

(2) Martins, J. A. C. and Oden, J. T., 1983, "A Numerical Analysis of Class of Problems in Elastodynamics with Friction", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 40, pp. 327~360.

(3) Duffour, P. and Woodhouse, J., 2004, "Instability of Systems with a Frictional Point Contact. Part 1: Basic Modelling", J. Sound and Vibration, Vol. 271, pp. 365~390.

(4) Timoshenko, S., 1937, Vibration Problems in Engineering, Van Nostrand.

(5) Fathi, A. and Popplewell, N., 1994, "Improved Approximations For a Beam Impacting a Stop", J. Sound and Vibration, Vol. 170, No. 3, pp. 365~375.

(6) Lo, C. C., "A Cantilever Beam Chattering Against a Stop", J. Sound and Vibration, Vol. 69, No. 2, pp. 245~255.

(7) Kikuchi N. and Oden J. T., 1988, Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM.

(8) Choi, Y. S. and Bae, S. J., 1999, "Dynamic Characteristics of Link Mechanism with Clearance", Transactions of the KSNVE, Vol. 9, No. 5, pp. 1050~1057.