韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2005. 5. 제 9권, 제 1호, 1-9

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2005, Vol. 9, No. 1, 1-9

한국과 러시아의 수학교과서에서 '다각형의 넓이' 영역의 내용 분석

한 인 기 (경상대학교)

1. 서 론

수학과 교육과정의 측정영역에서 도형에 관련된 내용을 분석해 보면, 길이의 측정, 도형의 (겉)넓이 구하기가 중요한 구성요소임을 알 수 있다. 도형의 (겉)넓이는 평면(공간)도형들의 성질이나 이들 사이의 관계를 탐구하고 추론하는 중요한 도구가 된다. 그러므로, 도형의 넓이 개념에 대한 명확한 이해나 넓이를 구하는 다양한 공식의 체계적인 활용은 수학과 교육과정(교육부, 1998, p.86)에 기술된 '도형에서는 ...도형의 기본적인 성질을 알고 도형의 아름다움을 찾아볼 수 있도록 배려하며, ...연역적 추론이 통합적으로 완성되도록 유의한다'는 것의 실현에 중요한 바탕이 된다.

학교수학에서 도형의 넓이에 관련된 최근의 국내 연구들은 첫째, 넓이 개념의 본질 규명에 관련된 연구, 둘째, 넓이의 활용한 탐구활동에 관련된 연구로 분류할 수 있다. 첫 번째 방향의 연구로는 한인기·신현용(2001), 한인기(1999), 에르든예프·한인기(2005) 등의 연구를 들 수 있으며, 두 번째 방향의 연구로는 김민경(2004), 김수미(2003), 이경화(2001), 권영인·서보억(2004) 등의 연구를 들 수 있다.

이들 연구에서는 다각형 넓이의 본질을 밝히고, 이를 수학의 탐구활동에 효과적으로 활용할 수 있는 방안을 모색하려 시도하였다는 점에서 교육적인 의의를 찾을 수 있을 것이다. 그러나, 실제로 초·중등학교 수학교과서에서 도형의 넓이 개념이 어떤 수준으로, 어떠한 연계성을 가지고, 어떻게 다루어지는가에 대한 다양한 연구는 드물다. 특히, 다각형의 넓이에 대해 외국과 한국의 수학교과서에 제시된 내용을 분석하여, 다각형 넓이에 관련된 교과내용의 진술 방법, 개념의 확장 및 일반화에 관련된 교수학적 문제를 다룬 연구는 없었다.

본 연구에서는 한국과 러시아의 초등학교, 중등학교의 수학교과서에 제시된 '다각형의 넓이'에 관련된 학습내용을 넓이 개념, 넓이의 단위, 다각형의 넓이 공식을 중심으로 비교, 분석하였다. 이를 통해 얻어진 결과들은 초등학교와 중등학교 사이의 수학적 개념의 연결성 및 일반화, 수학적 개념의 엄밀성의 측면에서 한국의 수학과 교육과정의 체계 및 내용을 비판적으로 고찰하고, 수학교과서의 내용 기술에 대한 다양한 접근을 모색하는 기초자료가 될 수 있을 것이다.

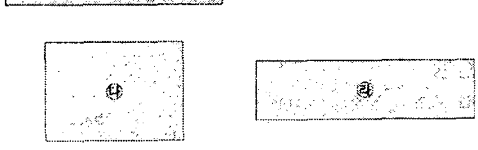
2. 넓이 개념 및 넓이의 단위

(1) 초등학교 수학교과서에서 넓이 개념

한국과 러시아의 초등학교 수학교과서에서는 넓이 개념을 수학적으로 엄밀하게 정의하지 않았다. 즉, 한국과 러시아의 초등학교 수학교과서에 '도형의 넓이란 ...'등과 같은 형태의 정의는 주어지지 않는다.

한국의 초등학교 수학교과서에서 '...중에서 어느 것이 더 넓은가?'와 같은 물음을 통해 처음 도입된다. 예를 들어, 초등학교 5학년 수학교과서에서 도형의 넓이에 관련하여, 제시되는 활동을 살펴보자(교육부, 2002a, pp.84~85).

활동 1. 어느 직사각형이 더 넓은지 비교하여 보아라(<그림 1>). 색종이로 다음과 같은 직사각형을 만들어 보아라.

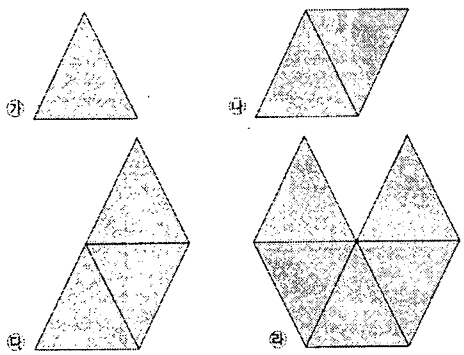


<그림 1>

* ZDM 분류: U23
* MSC2000 분류: 97U20

ㅇ ㉯를 ㉮에 겹쳐 보아라.
ㅇ ㉮와 ㉯ 중에서 어느 것이 더 넓은가?
ㅇ 왜 그렇게 생각하는가?
ㅇ ㉰와 ㉱를 겹쳐 보아라.
ㅇ ㉰와 ㉱ 중에서 어느 것이 더 넓은가?
ㅇ 왜 그렇게 생각하는가?

활동 2. 도형의 넓이를 비교하여 보아라.



<그림 2>

ㅇ ㉮를 ㉯에 대어 보아라.
ㅇ ㉮를 겹쳐지지 않게 ㉯에 몇 번 놓을 수 있는가?
ㅇ ㉮를 겹쳐지지 않게 ㉰에 몇 번 놓을 수 있는가?
ㅇ ㉮를 겹쳐지지 않게 ㉱에 몇 번 놓을 수 있는가?
ㅇ ㉯를 겹쳐지지 않게 ㉰에 몇 번 놓을 수 있다고 생각하는가?
ㅇ ㉯를 겹쳐지지 않게 ㉱에 몇 번 놓을 수 있다고 생각하는가?
ㅇ ㉰를 겹쳐지지 않게 ㉱에 몇 번 놓을 수 있다고 생각하는가?

우선, 활동 1을 살펴보자. 활동 1에서는 '넓다'는 개념을 다루고 있다. 넓다는 의미는 우리말(남영신, 2003, p.433)에서 '넓이가 크다, 폭이 길다, (마음이) 너그럽다, (사귐이) 두루 많다'의 의미로 사용된다. 활동 1에 관련하여서는 첫 번째 의미와 두 번째 의미가 관련될 수 있다(물론, 도형의 넓이 단원에서 의도하는 '넓다'의 의미는 첫 번째 것이다). 그런데, 학생들은 넓이 개념을 아직 배우지 않았으므로, 두 번째 의미를 중심으로 접근할 가능성도 있을 것이다. 그렇다면, 활동 1의 다섯 번째 물음인 '㉰와 ㉱ 중에서 어느 것이 더 넓은가?'에 대해서 얼마나 많은 학생들이 수학교과서에서 의도하는 답을 제시할 수 있을까에 대해서는 쉽게 추측하기 어려울 것이다.

살펴본 바와 같이, 활동 1에 제시된 넓은 것의 비교는 '넓이가 크다'는 뜻으로써의 '넓다'는 표현에 대한 충분한 정당화를 제공한다고 보기 어렵다. 즉, '폭이 길다'는 의미로의 '넓다'는 것은 활동 1과 같은 도형의 넓이에서는 적합하지 않다는 것에 대한 어떤 논의도 제시되어 있지 않다. 그리고, 넓이가 무엇을 의미하는가에 대한 어떤 논의도 제시되어 있지 않은 상태에서, 활동 1의 '넓은 것의 비교'로부터 곧바로 활동 2의 '넓이의 비교'로 진행하고 있다.

이때, 학생이 '넓다'를 '폭이 길다'의 의미로 이해하고 있다면, 활동 2에서 '넓이'에 대한 문제에 대해 적절히 답하기 어려울 것이다(넓이에 대한 개념 정의가 주어지지 않았고, 넓이를 '넓다'는 개념을 통해 도입하므로 이러한 오류의 발생이 가능함). 예를 들어, <그림 2>의 ㉯와 ㉰를 비교하는 과정에서, 학생은 넓이를 비교해야 함에도 불구하고, '이들 중에서 어느 것의 폭이 더 긴가?'라고 이해할 수도 있을 것이다.

이제, 러시아의 초등학교 4학년 수학교과서를 살펴보자. 러시아어에서 넓이를 의미하는 단어는 'площадь'인데, 이것의 사전적인 의미는(Lopatin, V.V. & Lopatina, L.E., 1994, p.449) '닫힌 꺾인선이나 곡선에 의해 경계지워진 평면의 부분, 여러 갈래로 길이 뻗어나간 평평하고 너른 공터'의 의미를 가진다. 첫 번째 의미는 수학적 개념인 '넓이'에 관련될 것이며, 두 번째 의미로서의 'площадь'는 '붉은 광장'에서 광장으로 번역되기 한다.

이제, 러시아 교과서에서 넓이 개념의 도입을 살펴보자. 러시아에서는 '넓이'의 대소를 '...보다 넓다'라는 개념을 통해서 제시하지 않고, 직접 문제로서 제시하였다. 러시아의 수학교과서에 제시된 문제들을 살펴보자(Moro, M.I.; Bantova, M.A.; Beltyukova, G.V.; Vapnyar, N.F. & Stepanova, S.V., 1993, pp.117~118).

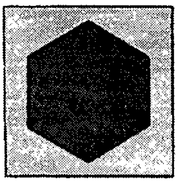
524[2]. 공책이 책상에 놓여있다. 책상 바닥의 넓이가 공책 뚜껑의 넓이보다 크다고 말할 수 있다.

다음 빈 곳에 생략된 단어를 넣어서 읽어보아라.

칠판의 넓이는 칠판이 걸린 벽면의 넓이보다 ...

만약, 원이 정사각형의 안에 완전히 들어가면, 원의 넓이는 정사각형의 넓이보다 ...이고, 정사각형의 넓이는 원의 넓이보다 ...

525. 그림을 보자. 정사각형과 육각형, 원과 삼각형의 넓이를 비교하여라.

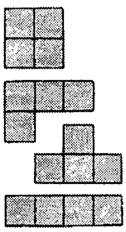


<그림 3>

<그림 4>

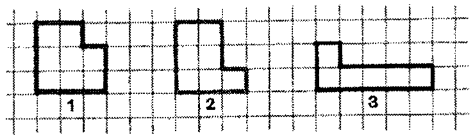
526. 한 변이 3cm인 두 정사각형을 만들자. 한 정사각형의 위에 다른 정사각형을 겹쳐놓자. 이들 정사각형의 넓이는 같다.

527. (1) 4개의 서로 같은 정사각형을 가지고, 이들로 그림에 주어진 것과 같은 도형을 만들자. 이들은 같은 개수의 넓이가 같은 정사각형들로 만들어졌으므로, 이들 도형의 넓이는 같다.



<그림 5>

(2) 도형 1, 2, 3의 넓이는 같은가? 이들 도형 중에서 어느 것이 가장 큰 넓이를 가지는가? 가장 작은 넓이를 가지는 것은?



<그림 6>

528. 공책에 한 직사각형의 넓이가 다른 직사각형의 넓이보다 크도록, 두 직사각형을 그려라.

문제 524~526에서는 넓이의 대소 및 상등을 정의하고, 러시아어에서 넓이의 사전적인 의미인 '닫힌 꺾인선이나 곡선에 의해 경계지워진 평면의 부분'을 수학적 개념으로서의 넓이로 변환시키고 있다. 이때, 한 가지 주목할 것은 '넓이(площадь)'의 러시아어 자체의 의미나 제시된 문제들에서 '넓이가 크다'를 '폭이 길다'로 오해할 가능성이 거의 없다는 것이다.

문제 525의 <그림 3>에서는 정사각형이 육각형을 완전히 포함하고 있기 때문에, 정사각형의 넓이(러시아어의 사전적인 의미인 '닫힌 꺾인선이나 곡선에 의해 경계지워진 평면의 부분'에 근거하여)가 육각형의 넓이보다 크다는 것이 명확하게 드러난다. 그러나, 살펴본 바와 같이, 한국의 수학교과서에서 <그림 1>의 ㉰와 ㉱를 보면, '넓다'는 단어가 주어진 문제상황과 관련하여 두 가지 의미를 가지므로, 학생들이 교과서에서 의도하는 개념의 형성으로 귀착하는데 어려움이 발생할 가능성이 있다.

(2) 중등학교 수학교과서에서 넓이의 개념

한국의 중등학교 수학교과서에서는 넓이 개념에 어떤 정교화도, 어떤 엄밀한 수학적 정의도 제시되어 있지 않다. 즉, 초등학교에서 배운 넓이에 대한 직관적인 개념을 가지고 중등학교의 수학교육을 마치게 된다.

반면에, 러시아의 기하교과서에서는 도형의 넓이를 엄밀하게 수학적으로 정의하고 있다. 예를 들어, Pogorelov, A.V.의 기하교과서(1996, p.215)에서는 단순도형을 유한 개의 평면삼각형으로 분할할 수 있는 도형으로 정의하고 나서, 단순도형의 넓이를 다음과 같은 양수값으로 정의하였다:

2) 번호는 러시아의 수학교과서에 제시된 문제 및 활동의 일련 번호임.

① 합동인 도형의 넓이는 같다;

② 어떤 도형을 단순도형들로 분할하면, 이 도형의 넓이는 단순도형들의 합과 같다;

③ 측정단위를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 1이다.

살펴본 바와 같이, 러시아의 기하교과서에서는 다각형의 넓이를 엄밀하게 정의하고 있다. 넓이는 초·중등학교 수학교육에서 다루는 중요한 기하학적 양이라는 것을 감안하면, 넓이 개념에 대한 직관적 접근과 함께 엄밀한 정의를 모두 제시하고 있는 러시아의 기하교과서는 주목할 만하다.

(3) 넓이의 단위

한국의 초등학교 수학교과서(교육부, 2002a, p.86)에는 '도형의 넓이를 나타낼 때에는 한 변이 1cm인 정사각형의 넓이를 단위넓이로 사용한다. 이 정사각형의 넓이를 $1cm^2$라 하고, 일 제곱센티미터라고 읽는다'고 기술되어 있다. 한편, $1m^2$에 대해서는 '한 변이 1m인 정사각형의 넓이를 $1m^2$라 하고, 일제곱미터라고 읽는다'고 기술하면서(교육부, 2002a; p.89), $1m^2$는 몇 cm^2에 해당하는가를 다루었다. 그리고, 수학 5-나(교육부, 2002b, p.98)에서는 1a는 '한 변이 10m인 정사각형의 넓이'로 정의하면서, $1a=100m^2$임을 기술하였다.

한 가지 주목할 것은 $1m^2$, 1a가 넓이의 단위로 기술된 것이 아니라 $1m^2$는 몇 cm^2인가, 1a는 몇 m^2인가에 초점이 맞추어져 기술되어 있다는 것이다. 결국, 한국의 초등학교 수학교과서의 내용 기술에서 단위넓이로서 기술된 것은 한 변이 1cm인 정사각형의 넓이이며, $1m^2$, 1a, 1ha, $1km^2$ 등은 각각 $10000cm^2$, $100m^2$, 100a, 100ha와 같은 양을 나타내는 기호로서 묘사되어 있다. 그러나, 우정호(2000, pp.230~231)는 '단위는 상대적인 것으로 ... 단위를 설정하는 것은 측정하려는 당사자의 자주적 선택에 의한 것으로 측정활동의 핵심적인 활동...'와 같이 주장하면서, 측정활동에서 고정된 단위방법을 비판하고, 학습자에 의한 단위의 적절한 선택을 강조했다. 즉, 문제상황에 적절하게 학습자는 적절한 단위넓이를 선택할 수 있어야 하지만, 한국의 수학교과서에서는 단위넓이가 한 가지, 즉 $1cm^2$로 고정된 것처럼 묘사되어 있다.

반면에, 러시아의 수학교과서에는 cm^2, dm^2, m^2, mm^2, km^2이 넓이 측정의 단위라는 것이 분명하게 기술되어 있다. 예를 들어, 4학년 수학교과서(Moro et., 1993)에는 '한 변이 1cm인 정사각형을 작도하자. 이것은 제곱센티미터를 나타내며, 넓이의 단위이다'(p. 119), '한 변이 1dm인 정사각형을 작도하자. 이것은 넓이의 단위로 제곱데시미터이다'(p. 125), '한 변이 1m인 정사각형은 새로운 커다란 넓이의 단위로 제곱미터이다'(p. 126), '한 변이 1mm인 정사각형은 넓이의 단위로 제곱밀리미터이다'(p. 127) 등과 같이 기술되어 있다.

살펴본 바와 같이, 러시아의 수학교과서에서는 넓이 측정을 위한 다양한 단위로 한 변이 각각 1cm, 1dm, 1m, 1mm, 1km인 다양한 정사각형을 제시하고 있으며, 넓이를 측정해야 하는 문제상황에서 학습자가 적당한 단위를 선택하여 문제를 해결할 수 있도록 하고 있다.

3. 초등학교 수학교과서에서 다각형의 넓이 공식

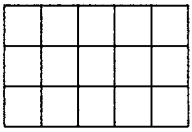
한국의 수학교과서에서 변의 길이가 자연수인 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식을 수학 5-가에서 다루며, 변의 길이가 자연수인 사다리꼴과 마름모의 넓이 공식을 수학 5-나에서 다룬다. 한편, 러시아의 초등학교 수학교과서에서는 변의 길이가 자연수인 직사각형과 정사각형의 넓이 공식을 5학년에서 다루며, 그밖의 도형은 중등학교에서 다룬다.

(1) 직사각형의 넓이 공식

한국의 수학교과서에서는 가로가 3cm이고 세로가 5cm인 직사각형을 모눈종이에 그려, 직사각형의 넓이를 구하도록 한 후에, 직사각형의 넓이 공식인 (가로)×(세로)을 제시하였다.

한편, 러시아의 수학교과서(Vilenkin, N.Ya; Chesnokov, A.S.; Shvartsburd, S.I. & Dzohov, V.I., 1992, p.123)에서는 '그림에서 직사각형은 세 줄로 이루어졌는데, 각 줄은 한 변이 1cm인 정사각형 5개로 구성된다. 전체 직사각형은 5·3=15개의 작은 정사각형으로 구성되어 있으며, 직사각형의 넓이는 $15cm^2$이다. 직사각형의 넓이를 구하려면, 직사각형의 가로와 세로를 곱해야 한다. 이것을 공식의 형태로 기술해 보자. 직사각형의 넓이를 S, 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면, 직사각형의 넓이 공식 S=ab를 얻게 된다'와

같이 기술되어 있다. 한 변이 자연수인 직사각형의 넓이 공식은 한국과 러시아의 수학교과서에 유사한 방법으로 설명되어 있다.



<그림 7>

(2) 정사각형의 넓이 공식

한국의 수학교과서에서는 한 변이 4cm인 정사각형을 모눈종이에 그려, 정사각형의 넓이를 구하도록 한 후에, 정사각형의 넓이 공식이 (한 변의 길이)×(한 변의 길이)을 제시하였다.

한편, 러시아의 수학교과서(Vilenkin, N.Ya; Chesnokov, A.S.; Shvartsburd, S.I. & Dzohov, V.I., 1992, p.124)에서는 '정사각형은 변들이 같은 직사각형이다. 만약, 정사각형의 한 변이 4cm이면, 정사각형의 넓이는 4·4, 즉 $4^2cm^2=16cm^2$이다. 만약, 정사각형의 한 변을 a라 하면, 정사각형의 넓이 S는 $a \cdot a=a^2$과 같다. 즉, 정사각형의 넓이 공식은 $S=a^2$이다'와 같이 기술되어 있다.

한국의 수학교과서에서 정사각형의 넓이는 직사각형에서와 마찬가지로, 넓이를 구하는 구체적인 활동으로부터 일반화를 시도하였지만, 러시아의 수학교과서에서는 정사각형이 직사각형임을 이용하여 직사각형의 넓이 공식으로부터 정사각형의 넓이 공식을 유도하였다.

(3) 평행사변형의 넓이 공식

한국의 수학교과서에서는 종이에 밑변이 4cm이고 높이가 3cm인 평행사변형을 작도한 후에, 이것을 가위로 자른다. 이때, 얻어진 조각들을 직사각형이 되도록 붙여, 평행사변형의 넓이를 구하였다. 그리고 나서, 다음과 같은 평행사변형의 넓이 공식을 제시하였다.

(평행사변형의 넓이)=(직사각형의 넓이)
=(가로)×(세로)
=(밑변)×(높이)

(4) 삼각형의 넓이

한국의 수학교과서에서는 크기와 모양이 같은 삼각형 2개로 평행사변형을 만들어 보도록 한 후에, 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하였다. 이로부터, 다음과 같은 삼각형의 넓이 공식을 제시하였다.

(삼각형의 넓이)=(평행사변형의 넓이)÷2
=(밑변)×(높이)÷2

(5) 사다리꼴의 넓이

한국의 수학교과서에서는 합동인 사다리꼴 2개로 평행사변형을 만들어 보도록 한 후에, 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 이용하여 사다리꼴의 넓이를 구하였다. 이로부터, 다음과 같은 사다리꼴의 넓이 공식을 제시하였다.

(사다리꼴의 넓이)={(윗변+아랫변)×높이}÷2

(6) 마름모의 넓이

한국의 수학교과서에서는 마름모를 대각선을 이용하여 삼각형으로 분할하고, 삼각형의 넓이를 이용하여 마름모의 넓이를 구하였다. 이로부터, 다음과 같은 마름모의 넓이 공식을 제시하였다.

(마름모의 넓이)=(한 대각선)×(다른 대각선)÷2

한국의 수학교과서에서는 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이 공식을 초등학교 5학년에서 모두 제시하였으며, 이들 다각형의 넓이 공식을 중등학교에서는 심화하여 다루지 않았다.

한편, 러시아에서는 초등학교에서는 변의 길이가 자연수인 직사각형과 정사각형의 넓이만을 다루었지만, 중학교에서는 직사각형과 정사각형을 변의 길이가 실수인 경우에 대해서 다루며, 이것을 바탕으로 변의 길이가 실수인 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 정다각형 등의 넓이 공식을 다루고 있다.

4. 중등학교 수학교과서에서 다각형 넓이

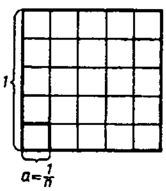
한국의 중등학교 수학교과서에서는 수학 9-나, 10-나에서 삼각형의 두 변과 끼인각이 주어진 경우에 끼인각의 사인값을 이용한 삼각형의 넓이 공식을 다루지만, 초등학교에서 다룬 다각형의 넓이 개념 및 넓이 공식에 확장이나 일반화는 다루어지지 않는다. 결국, 변의 길이가 자연수가 아닌 유리수, 무리수인 경우에

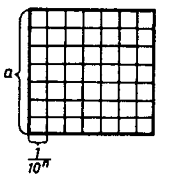
다각형의 넓이를 어떻게 구하는가에 대한 어떤 구체적인 논의는 제시되어 있지 않다.

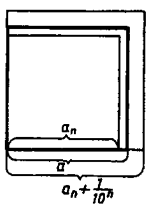
그러나, 한국의 수학교과서에는 변의 길이가 무리수인 경우나 변의 길이가 유리수인 경우에 대해서 다각형의 넓이를 구하는 문제가 제시되어 있다. 예를 들어, 수학 10-나(최상기 외 3인, 2002, p. 179)에는 삼각형 ABC에서 각 B는 30°, b=9, c= $9\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 문제가 제시되어 있으며, 수학 II(박규홍 외 5인, 2003, p.140)에는 구분구적법을 설명하면서 가로가 (1/n), 세로가 $(1/n)^2$인 직사각형의 넓이가 $(1/n)^3$임을 이용하고 있다. 결국, 한국의 수학교과서에서는 초등학교에서 배운 변이 자연수인 다각형의 넓이를 어떤 정당화없이 변이 유리수(자연수가 아닌), 무리수로 일반화하여 사용하고 있다.

이제, 러시아의 수학교과서를 살펴보자. 러시아의 중학교 기하교과서에는 변의 길이가 실수인 정사각형의 넓이 공식을 증명과 함께 제시하고 있으며, 이를 바탕으로 직사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴의 넓이 공식을 제시하여, 초등학교에서 변의 길이가 자연수인 경우에 대해서 다루었던 내용을 일반화시켰다. 예를 들어, Atanasyan, L.S.; Butuzov, V.F.; Kadomtsev, S.B.; Poznyak, E.G. & Yudina, I.I..(1996, pp.117~118)에 제시된 정사각형의 넓이 공식의 증명을 살펴보자.

한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이 S가 a^2이라는 것을 증명하기 위해, 우선 n이 정수인 경우 a=1/n일 때의 증명부터 살펴보자. 한 변이 1인 정사각형을 n^2개의 합동인 정사각형들로 분할하였다고 하자(<그림 8a>참조, 그림에서는 n이 5인 경우가 제시되어 있음).







<그림 8a> <그림 8b> <그림 8c>

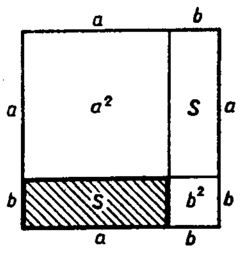
큰 정사각형의 넓이가 1이므로, 각각의 작은 정사각형 넓이는 $1/n^2$이며, 작은 정사각형의 한 변의 길이가 1/n, 즉 a이므로, $S=1/n^2=(1/n)^2=a^2$이다.

이제, a가 소수점 아래에 n개의 숫자를 가지고 있는 유한소수라 하자(특히, 수 a는 n=0이면 정수가 됨). 이때, 수 $m=a \cdot 10^n$은 정수이다. 한 변이 a인 주어진 정사각형을 m^2개의 합동인 정사각형으로 그림 8b와 같이 분할하자(<그림 8b>는 m이 7인 경우임). 이때, 주어진 정사각형의 각 변은 m등분되었으며, 작은 정사각형의 변의 길이는 $a/m=a/(a \cdot 10^n)=1/10^n$이다. 이때, 각각의 작은 정사각형의 넓이는 $(1/10^n)^2$이며, 결국 주어진 정사각형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{m}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot 10^n}{10^n}\right)^2 = a^2$$

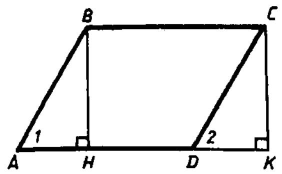
마지막으로, 수 a가 무한 소수라고 하자. 수 a_n을 수 a에서 소수점 아래 (n+1)번째 이하의 숫자들을 모두 버려 얻어진 수라 하자. 이때, 수 a와 a_n의 차는 $1/10^n$ 이하이므로, $a_n \le a \le a_n+1/10^n$이고(<그림 8c>참조), 이로부터 $a_n^2 \le a^2 \le (a_n+1/10^n)^2$이 성립한다. 한편, 주어진 정사각형의 넓이 S는 한 변이 a_n인 정사각형의 넓이와 한 변이 $a_n+1/10^n$인 정사각형의 넓이 사이, 즉 a_n^2과 $(a_n+1/10^n)^2$사이에 있으므로, $a_n^2 \le S \le (a_n+1/10^n)^2$이 성립한다. 이때, 수 n을 무한히 크게 하면, $1/10^n$은 원하는 만큼 작게 되므로, 수 $(a_n+1/10^n)^2$와 a_n^2의 차를 원하는 만큼 작게 할 수 있다. 그러므로, 부등식 $a_n^2 \le a^2 \le (a_n+1/10^n)^2$와 $a_n^2 \le S \le (a_n+1/10^n)^2$으로부터, 수 S와 a^2의 차가 원하는 만큼 작게 되므로, 이들은 같고, $S=a^2$이 증명된다.

한편, Atanasyan, L.S.; Butuzov, V.F.; Kadomtsev, S.B.; Poznyak, E.G. & Yudina, I.I..(1996, pp.119)의 교과서에서 변의 길이가 a, b인 직사각형의 넓이 S는 정사각형의 넓이 공식을 이용하여 유도된다. 변의 길이가 a, b인 직사각형에 보조선을 작도하여 한 변이 a+b인 정사각형을 작도하자(<그림 9>). 그러면, 정사각형의 넓이 공식에 의해, 이 정사각형의 넓이는 $(a+b)^2$이다. 한편, 이 정사각형은 변의 길이가 a, b인 합동인 두 직사각형과 한 변이 각각 a, b인 두 정사각형으로 이루어졌다. 그러므로, $(a+b)^2=S+S+a^2+b^2$이고, $a^2+2ab+b^2=2S+a^2+b^2$이다. 이로부터, 직사각형의 넓이 S=ab가 증명된다.

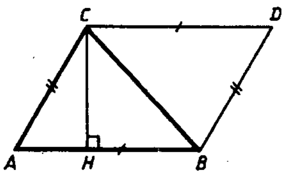


<그림 9>

그리고, Atanasyan, L.S.; Butuzov, V.F.; Kadomtsev, S.B.; Poznyak, E.G. & Yudina, I.I.(1996)의 기하교과서에서 평행사변형의 넓이는 평행사변형을 직사각형으로 <그림 10>과 같이 등적변형하여 넓이 공식을 유도하였고, 삼각형의 넓이는 합동인 두 삼각형으로 평행사변형을 만들어 평행사변형의 넓이를 이용하여 공식을 유도하였고(<그림 11>), 사다리꼴의 넓이는 대각선을 이용하여 사다리꼴을 두 개의 삼각형으로 분할하고 이들 삼각형 넓이의 합을 이용하여 공식을 유도하였다.

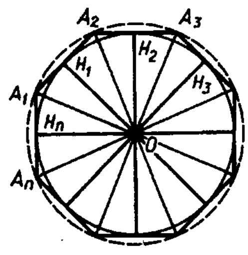


<그림 10>



<그림 11>

한국의 수학교과서에서는 정다각형의 넓이 공식을 다루지 않지만, 러시아의 수학교과서에서는 정n각형의 넓이 S를 둘레 P와 내접원의 반지름 r에 대해 $S=\frac{1}{2}Pr$과 같은 공식으로 나타냈다. Atanasyan, L.S.; Butuzov, V.F.; Kadomtsev, S.B.; Poznyak, E.G. & Yudina, I.I..(1996, p.260)의 교과서에서는 정n각형의 넓이 공식을 유도하기 위해, 그림 12와 같이 정n각형의 중심을 꼭지점들과 연결하였다. 그러면, 정n각형은 n개의 합동인 삼각형으로 분할된다. 이때, i=1, 2, …, n-1에 대해 $A_iA_{i+1}=a_i$, $A_nA_1=a_n$이라 하면, $a_i=a_n$이고, 각각의 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}a_nr$이며, $S=n\frac{1}{2}a_nr=\frac{1}{2}(na_n)r=\frac{1}{2}Pr$이 성립한다.



<그림 12>

살펴본 바와 같이, 한국의 수학교과서에서는 변의 길이가 실수인 다각형의 넓이에 대한 상응하는 정당화 없이, 초등학교에서 다룬 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모 등의 넓이 공식을 일반화하여 사용하고 있다. 물론, 변의 길이가 실수인 경우에도 이들 다각형의 넓이 공식이 성립하므로, 어떤 수학적인 모순은 발생하지는 않는다. 그러나, 수학에서는 자연수에서 성립하는 성질을 항상 실수로 확장하여 일반화시킬 수 있는 것은 아니기 때문에, 상응하는 정당화가 필요할 것이다.

반면에, 러시아의 수학교과서에서는 변의 길이가 자연수인 경우에 대한 정사각형의 넓이 공식을 초등학교에서 다루고, 변의 길이가 자연수인 경우는 중등학교 수학교과서에서 엄밀하게 증명하였다. 그리고, 정사각형에 대한 엄밀한 증명을 바탕으로, 변의 길이가 실수인 직사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 정다각형의 넓이 공식을 유도하였다.

살펴본 바와 같이, 한국과 러시아의 초등학교와 중등학교의 수학교과서에서 다각형의 넓이 개념 및 공식을 정당화하는 시기를 비교하면, 표 1과 같이 정리할 수 있다.

<표 1> 다각형 넓이의 정당화 시기 비교

다각형 종류	변의 길이	정당화의 시기	
		한국	러시아
직사각형	자연수	5학년	5학년
	실수	다루지 않음	8학년
정사각형	자연수	5학년	5학년
	실수	다루지 않음	8학년
평행사변형	자연수	5학년	8학년
	실수	다루지 않음	
삼각형	자연수	5학년	8학년
	실수	다루지 않음	
사다리꼴	자연수	5학년	8학년
	실수	다루지 않음	
마름모	자연수	5학년	다루지 않음
	실수	다루지 않음	
정n각형	자연수	다루지 않음	9학년
	실수		

5. 결 론

본 연구에서는 한국과 러시아의 초등학교, 중등학교의 수학교과서에 제시된 '다각형의 넓이'에 관련된 학습내용을 넓이 개념, 넓이의 단위, 다각형의 넓이 공식을 중심으로 비교, 분석하였다.

한국과 러시아의 초등학교 수학교과서에서는 넓이 개념을 '도형의 넓이란 ...'등과 같은 형태로 엄밀하게 정의하지는 않았다. 한국의 초등학교 수학교과서에서 '...중에서 어느 것이 더 넓은가?'와 같은 물음을 통해 넓이 개념을 도입한다. 그런데, 우리말에서 도형에 관련하여 '넓다'는 단어는 '넓이가 크다'와 '폭이 길다'의 두 가지 의미를 가지지만, 도형의 넓이에 관련하여서는 '넓다'는 것이 '폭이 길다'는 의미를 가지지는 않는다는 것이 수학교과서에서 충분히 설명되지는 않았다. 한편, 러시아에서 넓이는 'площадь'이며, 도형에 관련된 사전적인 의미는 '닫힌 꺾인선이나 곡선에 의해 경계지워진 평면의 부분'이다. 그러므로, 러시아어에서 '넓이'라는 단어는 우리말에서와 같은 이중적인 의미를 가지지 않는다. 러시아 수학교과서에서는 '넓이'의 대소를 '...보다 넓다'라는 개념을 통해서 제시하지 않고, 곧바로 어떤 도형의 넓이가 다른 도형의 넓이보다 크다 또는 같다는 것을 제시하였다.

한편, 한국의 중등학교 수학교과서에서는 넓이 개념에 대해 후속적인 정교화나 엄밀한 수학적 정의를 제시하지 않은 반면에, 러시아의 중등학교 기하교과서에서는 도형의 넓이를 엄밀하게 수학적으로 정의하였다.

한편, 넓이의 단위에 관련하여, 한국의 초등학교 수학교과서에서는 단위넓이가 $1cm^2$ 하나로 고정되어 있으며, $1m^2$, $1m^2$, 1a, 1ha, $1km^2$ 등은 $1cm^2$를 기준으로 상대적인 넓이를 나타내는 단위로 기술되어 있다. 반면에, 러시아의 수학교과서에는 cm^2, dm^2, m^2, mm^2, km^2이 넓이 측정의 단위라는 것이 분명하게 기술되어 있었다.

한국의 수학교과서에서 변의 길이가 자연수인 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식을 수학 5-가에서 다루며, 변의 길이가 자연수인 사다리꼴과 마름모의 넓이 공식을 수학 5-나에서 다룬다. 그러나, 이들 다각형의 넓이 공식을 중등학교에서는 심화하여 다루지는 않았다. 결국, 학생들은 변의 길이가 자연수인 경우에 대한 다각형의 넓이 공식을 변의 길이가 실수인 경우로 아무런 정당화없이 확장하여 사용하게 된다. 그러나, 수학에서 근거없는 개념이나 방법의 확장은 오류나 오개념으로 귀착될 수도 있으므로, 이들 개념이나 방법의 확장을 위해서는 충분한 정당화의 과정이 필요하다.

한편, 러시아의 초등학교 수학교과서에서는 변의 길이가 자연수인 직사각형과 정사각형의 넓이 공식을 5학년에서 다루며, 나머지 도형의 공식은 중등학교에서 다룬다. 러시아의 중등학교 수학교과서에서는 직사각형과 정사각형을 변의 길이가 실수인 경우에 대해 넓이 공식을 엄밀하게 증명하고, 이를 바탕으로 변의 길이가 실수인 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 정다각형 등의 넓이 공식을 유도하였다. 즉, 러시아의 수학교과서에서는 엄밀한 증명을 통해, 변의 길이가 실수인 다각형의 넓이에 대한 정당화를 제시하였다.

본 연구에서 얻어진 결과들은 초등학교와 중등학교 사이의 수학적 개념의 연결성 및 일반화, 수학적 개념의 엄밀성의 측면에서 한국의 수학과 교육과정을 고찰하고, 수학교과서의 내용 기술에 대한 다양한 접근을 모색하는 기초자료가 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (2002a). 수학 5-가. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (2002b). 수학 5-나. 서울: 대한교과서주식회사.

권영인 · 서보억 (2004). 코사인 제 2법칙의 다양한 증명방법 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 18(2), pp.251-264.

김민경 (2004). 넓이관련 열린 문제에 관한 문제해결과정 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 43(3), pp.275-290.

김수미 (2003). Wertheimer의 평행사변형 구적 문제의 대안적 지도 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육학연구> 13(4), pp.485-494.

남영신 (2003). 국어대사전. 서울: 성안당.

박규홍 외 5인 (2003). 수학 II. 서울: 교학사.

에르든예프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구. 서울: 승산.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대출판부.

이경화 (2001). 다각형의 둘레와 넓이에 관한 수업 아이디어, 학교수학 3(2), pp.423-446.

최상기 외 3인 (2002). 수학 10-나. 서울: 고려출판.

한인기 (1999). 힐베르트의 세 번째 문제, 한국수학사학회지 12(2), pp.25-40.

한인기 · 신현용 (2001). 다각형의 넓이 및 그 활용에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 12, pp.155-170.

Atanasyan, L.S.; Butuzov, V.F.; Kadomtsev, S.B.; Poznyak, E.G. & Yudina, I.I. (1996). *Geometriya: Ucheb. dlya 7-11 kl.* Moskva: Prosveshenie.

Lopatin, V.V. & Lopatina, L.E. (1994). *Russkii Tolkovy Slovar.* Moskva: Russki Yazyk.

Moro, M.I.; Bantova, M.A.; Beltyukova, G.V.; Vapnyar, N.F. & Stepanova, S.V. (1993). *Matematika 4.* Moskva: Prosveshenie.

Pogorelov, A.V.(1996). *Geometriya: Ucheb. dlya 7-11 kl.* Sankt-Peterburg: Hardford.

Vilenkin, N.Ya; Chesnokov, A.S.; Shvartsburd, S.I. & Dzohov, V.I. (1992). *Matematika 5.* Moskva: Prosveshenie.

A comparative study on the area of polygon in mathematics textbooks of Korea and Russia

Inki Han

Gyeongsang National University, Dept. of mathematics Education, Jinju, 660-701, Korea

inkiski@gsnu.ac.kr

This study is to compare contents of mathematics textbooks of Korea and Russia laying stress on the area of polygon. We analyzed and compared descriptions of the concept 'area of polygon' and varification on formula of area of polygon in Korean and Russian mathematics textbooks.

* ZDM classification: U23

* MSC2000 classification: 97U20