

상호상관 PIV기법을 위한 빠르고 정확한 FFT 알고리즘의 개발

Development of Fast and Exact FFT Algorithm for Cross-Correlation PIV

류 권 규* / 김 동 수** / 윤 병 만***

Yu, Kwonkyu / Kim, Dongsu / Yoon, Byungman

Abstract

Normalized cross-correlation (correlation coefficient) is a useful measure for pattern matching in PIV (Particle Image Velocimetry) analysis. Because it does not have a corresponding simple expression in frequency domain, several fast but inexact measures have been used. Among them, three measures of correlation for PIV analysis and the normalized cross-correlation were evaluated with a sample calculation. The test revealed that all other proposed correlation measures sometimes show inaccurate results, except the normalized cross-correlation. However, correlation coefficient method has a weakpoint that it requires so long time for calculation. To overcome this shortcoming, a fast and exact method for calculating normalized cross-correlation is suggested. It adopts Fast Fourier Transform (FFT) for calculation of covariance and the successive-summing method for the denominator of correlation coefficient. The new algorithm showed that it is really fast and exact in calculating correlation coefficient.

keywords : Particle Image Velocimetry (PIV), Fast Fourier Transform (FFT), cross-correlation, correlation coefficient

요 지

정규 상호 상관 (상관계수)은 입자영상유속계(PIV) 분석에서 형태 분석을 위한 가장 정확하고 적합한 척도이다. 그러나 상관계수는 주파수 영역에서 그에 상응하는 간단한 수식 표현이 없기 때문에, 빠르지만 부정확한 척도들이 종종 이용된다. 이러한 척도 중에서 선정된 세 가지 방법과 상관계수법을 상호 비교하였다. 그 결과 상관계수법을 제외한 나머지 척도들은 모두 종종 부정확한 결과를 도출함을 알 수 있었다. 그러나 상관계수법은 계산 시간이 많이 걸린다는 단점을 지니고 있다. 이 문제를 해결하기 위해, 상관계수법을 계산하는 빠르고 정확한 방법을 제시하였다. 이 방법은 상관계수의 분산을 계산하는 FFT 알고리즘과 분모를 계산하는 순차가감법을 결합한 것이다. 시험 결과 이 방법은 상관계수를 빠르고 정확하게 계산할 수 있음을 보였다.

핵심용어 : 입자영상유속계, FFT, 상호상관, 상관계수

1. 서 론

입자영상유속계(PIV, Particle Image Velocimetry)는

연속된 두 장의 영상에서 영상 조각의 패턴을 비교하여 유속을 측정하는 장비이다 (Raffel, et al., 1998). PIV는 측정이 비교적 쉬울 뿐 아니라 점유속이 아닌

* 정회원, 명지대학교 토목공학과 연구원, 공학박사 (e-mail: kwonkyu@mju.ac.kr)

** 정회원, U. of Iowa, Graduate Student (e-mail: dongsu-kim@uiowa.edu)

*** 정회원, 명지대학교 토목공학과 교수, 공학박사 (e-mail: bmyoon@mju.ac.kr)

유속장을 한꺼번에 측정할 수 있기 때문에 1990년대 이후 실험실의 유속 측정에서 하나의 표준적인 장비가 되었다.

PIV의 핵심은 영상 조각을 서로 비교하여 가장 가까운 영상 조각을 찾아내는 기술이다. 이를 위해 가장 널리 이용되는 것이 상호상관법(cross-correlation)이며, 그 외에 영상의 휘도차의 유클리드 거리(Euclidian distance)를 이용하는 방법 등이 이용되고 있다. 이들 모두 계산 시간을 줄이기 위해 고속 푸리에 변환(FFT, Fast Fourier Transform)를 채택하고 있다. 공간 영역(spatial domain)의 상호상관이나 유클리드 거리는 FFT와 회선정리(convolution theorem)를 이용하면 주파수 영역(frequency domain)에서 손쉽게 계산할 수 있다.

그러나 상호 상관을 정규화한 정규상호상관(normalized cross-correlation) 또는 상관계수(correlation coefficient)는 주파수 영역에서는 간편한 형태로 나타낼 수 없다. 이 때문에 기존의 대부분의 PIV기법에서는 상관계수를 공간 영역에서 그대로 계산하거나 빠르기는 하지만 약간 부정확한 방법을 이용하기도 했다.

본고는 상관계수를 주파수영역으로 표현하는 방법을 제시하고 아울러 순차가감법(successive summing)을 이용하여 빠르고 정확하게 상관계수를 계산하는 방법을 제시한다.

2. 영상의 비교 척도

영상 조각을 비교하기 위한 가장 간단한 방법은 두 영상 조각의 차이를 다음과 같은 유클리드 거리로 나타내는 방법이다.

$$D_{f,g}^2(m,n) = \sum_{x,y} [f(x,y) - g(x-m,y-n)]^2 \quad (1)$$

여기서 x 와 y 는 각각 영상에서 가로 및 세로 방향의 좌표이며, 이들의 상한은 X 와 Y 라고 하자. 또한 $f(x,y)$ 는 비교할 첫번째 영상 조각(시험 영상, template image)이며, $g(x,y)$ 는 두번째 영상조각(표적 영상, target image)이다. 일반적으로 $f(x,y)$ 와 $g(x,y)$ 를 PIV 분석에서는 'interrogation window'라고 부른다. 여기서는 '영상 조각'이라 하기로 하자. 또한 m 과 n 은 각각 x 와 y 방향의 이동량이며, m 과 n 의 변화 범위를 탐색영역(searching area)라고 부른다. Eq. (1)을 최소화시키는 m 과 n 이 PIV에서 찾아낸 영상 조각 $f(x,y)$ 와 $g(x,y)$ 사이의 변위이다.

Eq. (1)을 PIV에서 직접 이용하는 것은 몇 가지 문제가 있다. 가장 심각한 문제는 영상 조각이나 탐색 영역이 커지면 Eq. (1)을 계산하는 데 필요한 곱셈이 기하급수적으로 증가한다는 것이다. FFT를 이용하면 계산량을 획기적으로 줄일 수 있기 때문에, 이 문제는 FFT를 이용하여 해결할 수 있다.

두번째 문제는 Eq. (1)에 의해 계산된 값이 과연 두 영상 조각이 얼마나 비슷한가에 대한 객관적인 기준을 제시해주지 못한다는 점이다. 이 문제는 Eq. (1)을 적합한 방법으로 무차원화하면 해결할 수 있다. 즉, FFT와 정규화를 결합하면 두 가지 문제를 동시에 해결할 수 있을 것으로 보인다. 그러나, 불행히도 두 방법은 양립할 수 없다.

Eq. (1)을 전개하면 다음과 같다.

$$D_{f,g}^2(m,n) = \sum_{x,y} f(x,y)^2 - 2 \sum_{x,y} f(x,y)g(x-m,y-n) + \sum_{x,y} g(x-m,y-n)^2 \quad (2)$$

Eq. (2)의 우변의 첫번째 항은 상수이다. 만일, 우변의 셋째항, $\sum_{x,y} g(x-m,y-n)^2$ 을 상수라고 가정하면, Eq. (2)의 둘째항만 고려하여 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$C_{f,g}^2(m,n) = \sum_{x,y} f(x,y)g(x-m,y-n) \quad (3)$$

이때, Eq. (3)을 최대화시키는 m 과 n 이 바로 Eq. (1)을 최소화시키는 값이 된다.

따라서 만일 Eq. (2)의 우변의 셋째항을 상수라고 한 가정이 타당하다면, Eq. (3)은 영상 조각 $f(x,y)$ 와 $g(x,y)$ 가 얼마나 비슷한가를 나타내는 척도로 이용될 수 있다. Eq. (2)와 달리 Eq. (3)은 매우 간단한 형태로 되어 있고, 이 때문에 회선 정리를 이용하여 FFT를 적용할 수 있다. 이런 이유로 일반적으로 Eq. (3)을 상호상관(cross-correlation)이라고 부른다(Brigham, 1988). Eq. (3)은 Kean and Adrian (1992), Westerweel (1993), Fincham and Spedding(1997) 등 종전의 많은 PIV기법에서 이용되어 왔다.

Eq. (1)과 비교해 볼 때 Eq. (3)은 매우 간단한 구조로 되어 있으며, FFT의 적용에도 매우 유리하다. 그러나 Eq. (3)은 PIV에 이용하는 데 다음과 같은 문제를 지니고 있다. 일반적으로 지적되는 문제는 다음과 같은 두 가지이다(Gonzalez and Woods, 1992; Lewis, 1995;

Raffel, et al., 1998).

첫째, 만일 영상의 에너지(또는 밝기)가 위치에 따라 급격히 변화한다면, Eq. (2)의 셋째항 $\sum_{x,y} g(x-m, y-n)^2$ 이 상수라는 가정이 틀리게 된다. 이 경우 대부분은 영상내에서 이상적으로 밝은 부분이 상호상관이 더 큰 것으로 나타나게 된다.

둘째, 여전히 상호상관 $C_{f,g}^2(m,n)$ 의 값은 영상 조각의 크기에 따라 변한다. 다시 말하자면 Eq. (3)은 두 영상 조각이 어느 정도 비슷한가에 대한 객관적인 기준을 제시하지 못한다는 것이다. 예를 들어 Eq. (3)의 값이 50,000이라고 할 때 이것이 두 영상 조각이 잘 일치한다는 것인지 아닌지 알 수 없다는 것이다.

위의 두 가지 문제중에서 두번째 문제를 해결하기 위해 Utami, et al. (1991)은 Eq. (3)을 변형시킨 평균상호상관(mean cross-correlation)을 이용하였다.

$$M_{f,g}(m,n) = \frac{1}{XY} \sum_{x,y} f(x,y)g(x-m, y-n) \quad (4)$$

평균상호상관은 Eq. (3)의 상호 상관을 계산에 이용된 전체 픽셀의 수로 나눈 것이다. 따라서 Eq. (4)는 회색영상(grayscale)을 이용할 경우 $0 \sim 255^2$ 의 범위를 가지게 된다. 그러나 평균상호상관은 여전히 Eq. (3)의 첫번째 문제를 지니고 있다. 또한 계산된 평균상호상관이 어떤 값을 가질 경우 어느 정도 두 영상이 비슷한가에 대해 만족할 만한 기준을 제시하지 못한다.

한편, Willert and Ghalib (1991)은 Eq. (3)의 정규화된 형태를 다음과 같이 제시하였다.

$$W_{f,g}(m,n) = \frac{\sum_{x,y} f(x,y)g(x-m, y-n)}{\sum_{x,y} f(x,y) \sum_{x,y} g(x-m, y-n)} \quad (5)$$

그러나 Eq. (5)와 같은 형태의 정규화는 Eq. (3)의 문제를 근본적으로 완전히 해결할 수 없다. 실제로 Eq. (5)는 영상 조각의 크기에 따라서 값이 달라지며, 대부분의 경우 실제 계산 결과 Eq. (5)의 값은 1보다 상당히 작으며, 계산값은 m 과 n 의 변화에 매우 둔감하다. 이것은 PIV에 이용할 경우 나쁜 결과를 초래할 수도 있다.

비록 PIV 기법에 응용된 사례는 없지만, Pratt (1991, p. 653)는 다음과 같은 형태를 제시하기도 하였다.

$$P_{f,g}(m,n) = \frac{\sum_{x,y} f(x,y)g(x-m, y-n)}{\sum_{x,y} f(x,y)^2} \quad (6)$$

Eq. (6)이 Eq. (5)에 비해 개선된 점은 Eq. (6)은 계산된 값이 확실하게 1.0으로 정규화되었다는 점이다. 다시 말하자면 두 영상 조각이 완벽히 같을 경우 Eq. (6)은 확실하게 1.0인 값을 제시해 주며, 반대로 완전히 반대 영상인 경우 0.0의 값을 계산해준다는 것이다. 그러나 Eq. (6)은 때때로 1.0보다 큰 값을 나타낼 수도 있다. 따라서 Eq. (6)보다는 이를 개선한 형태로 다음과 같은 식이 PIV에 이용되기도 하였다(Ritter and Wilson, 2000).

$$T_{f,g}(m,n) = \frac{\sum_{x,y} f(x,y)g(x-m, y-n)}{\sqrt{\sum_{x,y} f(x,y)^2} \sqrt{\sum_{x,y} g(x,y)^2}} \quad (7)$$

Eq. (7)은 분모가 m 과 n 의 함수가 아니기 때문에 여전히 FFT의 적용이 가능하다. Eq. (7)의 보다 정확한 정규화 형태는 다음의 Eq. (8)과 같은 형태여야 할 것이다.

$$T'_{f,g}(m,n) = \frac{\sum_{x,y} f(x,y)g(x-m, y-n)}{\sqrt{\sum_{x,y} f(x,y)^2} \sqrt{\sum_{x,y} g(x-m, y-n)^2}} \quad (8)$$

Eq. (8)과 같은 형태일 경우에만 상호상관이 정확히 0과 1사이로 정규화 되었다고 볼 수 있다. 그러나 Eq. (8)은 분모가 m 과 n 의 함수이기 때문에 FFT의 적용이 불가능하다.

이와 같이 대부분 PIV연구자들은 빠른 계산과 정확성이라는 문제 사이에서 갈등을 겪게 될 때, 정확성을 희생하고라도 속도를 우선하는 방안을 채택하였다. 즉 Eq. (3)에서 Eq. (7)까지는 FFT의 적용이 가능한 형태이다.

한편, 속도를 희생하고 정확성을 택할 경우 Eq. (1)의 정규화된 형태가 바로 정규상호상관 또는 상관계수이다.

$$R_{f,g}(m,n) = \frac{\sum_{x,y} [f(x,y) - \bar{f}] [g(x-m, y-n) - \bar{g}_{m,n}]}{\sqrt{\sum_{x,y} [f(x,y) - \bar{f}]^2} \sqrt{\sum_{x,y} [g(x-m, y-n) - \bar{g}_{m,n}]^2}} \quad (9)$$

여기서 \bar{f} 와 $\bar{g}_{m,n}$ 은 지역 평균으로 다음과 같이 표현 된다.

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_{x,y} f(x,y) \\ \bar{g}_{m,n} &= \sum_{x,y} g(x-m,y-n) \end{aligned} \quad (10)$$

Eq. (9)는 두 영상을 비교하여 완벽히 일치할 경우는 1.0, 완전히 불일치할 경우는 -1.0의 값을 갖는다. Eq. (9)는 두 영상 조각을 비교하는 데 있어 가장 정확하고 강력한 방법이다 (Fincham and Spedding, 1997). Draper (1998)와 같은 통계학이나 회귀 분석에 대한 일반적인 교과서들의 대부분이 Eq. (9)를 두 자료군 사이의 일치성을 검증하는 유일무이한 척도로 제시하고 있다.

불행히도 Eq. (9)는 분모에 있는 $\bar{g}_{m,n}$ 이 m 과 n 의 함수이기 때문에 FFT로 손쉽게 나타낼 수 없다. 따라서 현재까지 이 식을 PIV에 이용하고자 할 경우는 FFT를 이용하지 않고 공간영역에서 그대로 계산하는 방법을 이용해 왔다. 이 경우 영상 조각이나 검사 영역이 커지면 계산량이 기하급수적으로 증가하는 문제가 있다.

한편, Gui and Merzkirch (2000)은 Eq. (1)을 픽셀의 수로 나누는 방법으로 정규화하여 이를 최소자승차이 (MQD, Minimum Quadratic Difference)라고 하였다. 이들이 이용한 MQD는 다음과 같은 형태이다.

$$G'_{f,g}(m,n) = \frac{1}{XY} \sum_{x,y} [f(x,y) - g(x-m,y-n)]^2 \quad (12)$$

이것은 Utami, et al. (1991)의 평균상호상관과 마찬가지로 회색영상을 이용할 경우 $0 \sim 255^2$ 의 범위로 정규화한 방법이다. 그러나 평균상호상관은 여전히 Eq. (3)의 두번째 문제를 지니고 있다.

효율적인 계산 방법은 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

- (1) 정규화가 되어 있어야 한다. 어떤 방법에 의해 계산된 상호상관값이 어떤 값이 나왔을 때 이것이 과연 유의성이 있는지 없는지 쉽게 판가름되어야 한다.
- (2) 계산된 상호상관값을 등고선으로 나타냈을 때 최대값이 주변의 값과 변별력이 있어야 한다. 상호상관값의 등고선이 밋밋한, 거의 평평한 구조를 가질 경우 PIV분석에서 오류를 범할 가능성이

높아지기 때문이다.

3. 상호상관 계산방법의 상호 비교

앞서 제시한 방법들 중 Wilert and Ghalib (1991)의 상호상관법(CCW), Ritter and Wilson (2000)에 의한 상호상관법(CCR), Gui and Merzkirch (2000)에 의한 MQD, 그리고 상관계수를 이용한 방법 (NCC), 이상 네 방법의 PIV분석의 정확성을 검토해 보기로 한다. 이들 중 CCW, CCR, NCC는 모두 0과 1사이의 값으로 나타낼 수 있으나 MQD만은 $0 \sim 255^2$ 의 값을 갖는다. 또한 앞의 세 방법은 모두 1에 가까울수록 상관성이 높으나 MQD만은 작은 값을 가질수록 상관성이 높다. 따라서 Eq. (12)를 이용하여 계산하고 그림으로 나타낼 경우는 다음과 같이 변형시켜 이용하였다.

$$\begin{aligned} G'_{f,g}(m,n) &= \\ 1 - \frac{1}{255} \sqrt{\frac{1}{XY} \sum_{x,y} [f(x,y) - g(x-m,y-n)]^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Eq. (13)은 Eq. (12)의 특성을 지니며 아울러 0과 1사이로 정규화된 값을 나타낸다. 또한 값이 1에 가까울수록 상관성이 높은 것을 나타낸다.

비교 시험을 위해 Fig. 1과 같은 영상 자료를 이용하였다. Fig. 1(a)의 세 영상 조각은 각각 휘도(brightness)가 고, 중, 저인 세 가지 영상을 선택하였으며, Fig. 1(b)는 표적 영상이다. 영상의 크기는 각각 55이다. 일반적인 PIV 분석을 위해서는 비교적 작은 영상이지만, 각 방법의 특징을 비교하기에는 무리가 없는 것으로 보인다.

휘도가 높은 경우에 대한 비교 결과는 Fig. 2와 같다. 이 때 정확한 변위는 (2,6)이다. 모든 방법이 비교적 타당한 결과를 보여주고 있다. CCR의 결과는 0.79~0.97 범위의 값을 보였으나 대부분의 값은 0.90이상의 매우 높은 값을 보였다. 특히 영상의 경계 부근에서는 최대값 지점에서 아주 멀리 떨어져 있는 경우에도 매우 큰 값을 보이는 경향이 있다. 이것은 CCR의 경우 최대값을 갖는 지점을 찾는 변별력에 문제가 있을 수 있음을 보여주는 결과이다.

중간 휘도의 결과는 Fig. 3과 같다. 이 때 정확한 변위는 (4,4)이다. 여기서 CCW와 NCC는 정확히 변위를 찾아 내었지만 CCR과 MQD는 약간 다른 값을 제시하고 있다. 여기서 유의할 것은 이 두 방법에 의해 계산된 상호상관값이 상당히 평평한 면을 이룬다는 것이다. 다시 말하자면, 변별력이 떨어지는 결과를 보여주고 있다.

Fig. 4는 휘도가 낮은 경우의 결과이다. 이때 정확한 변위는 (10,6)이다. Fig. 4에 나타난 바와 같이 NCC와 CCR은 정확한 결과를 보여주고 있으나 MQD는 약간 편이된 결과를 보여주고 있다. 또한 CCW는 전혀 엉뚱

한 곳을 변위로 계산해 내었다. Fig. 4에서 특징적인 점은 NCC가 다른 방법들에 비해 상호상관의 값이 상당히 굵곡이 큰 면을 이룬다는 것이다. 이것은 변별력이 높아서 최대값 지점을 찾는 데 상당히 유리하다.

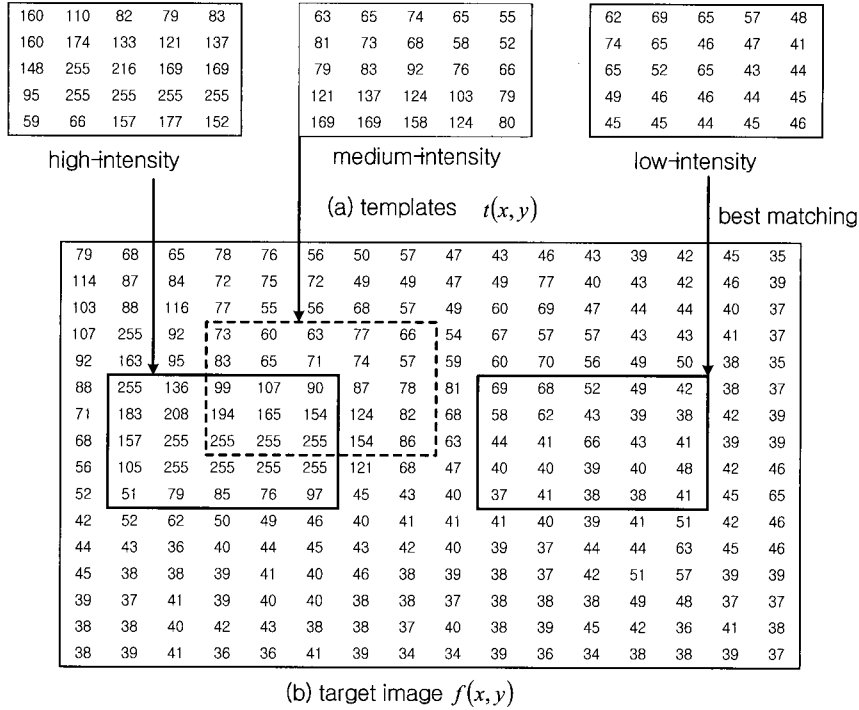


Fig. 1. Test image and target image for comparison PIV schemes

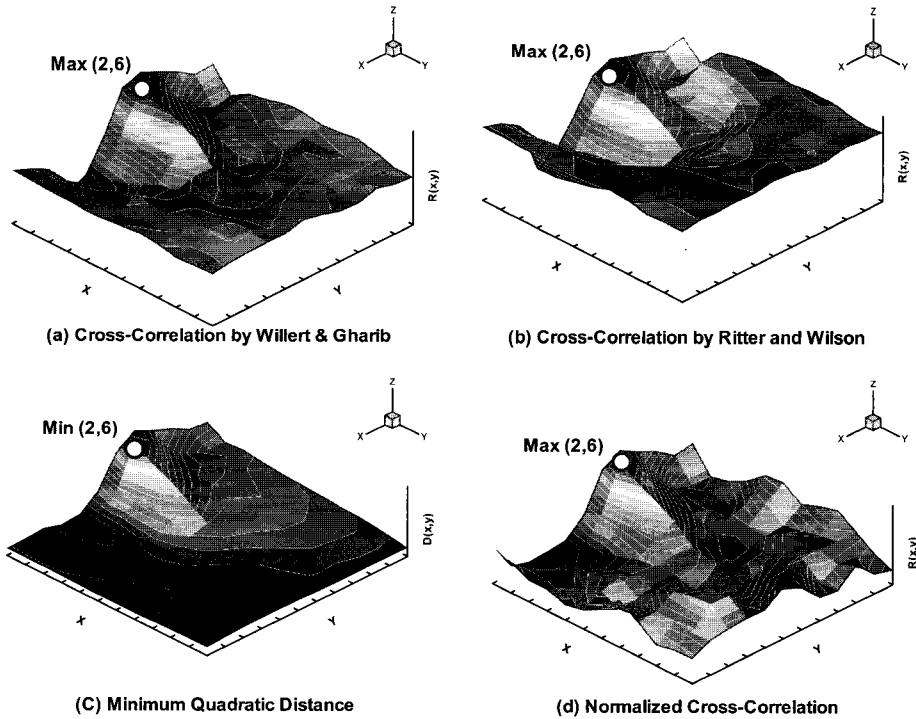


Fig. 2. Correlation contours for high intensity case

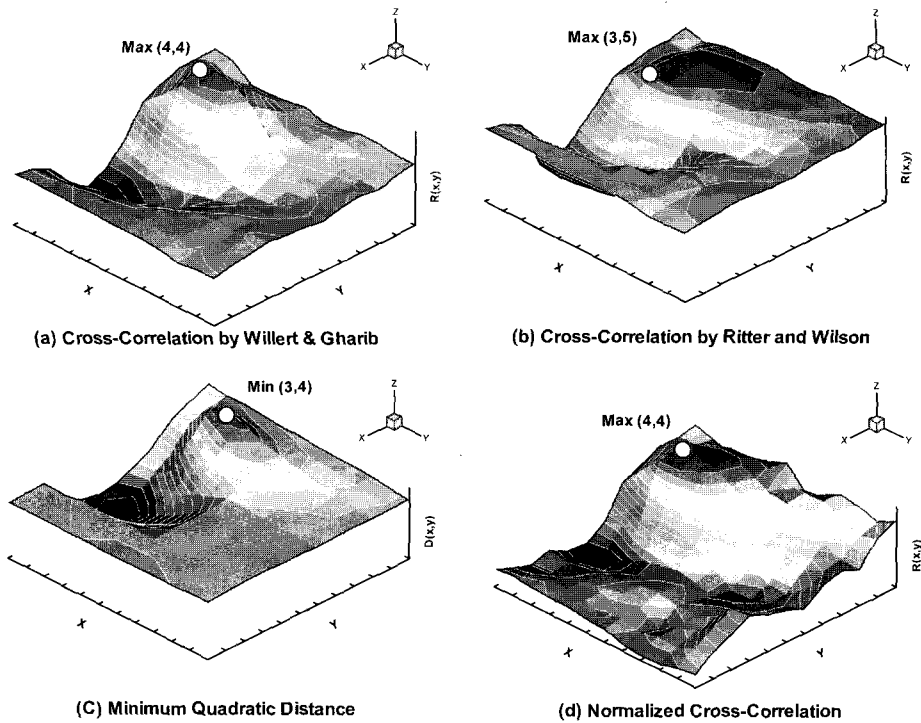


Fig. 3. Correlation contours for medium intensity case

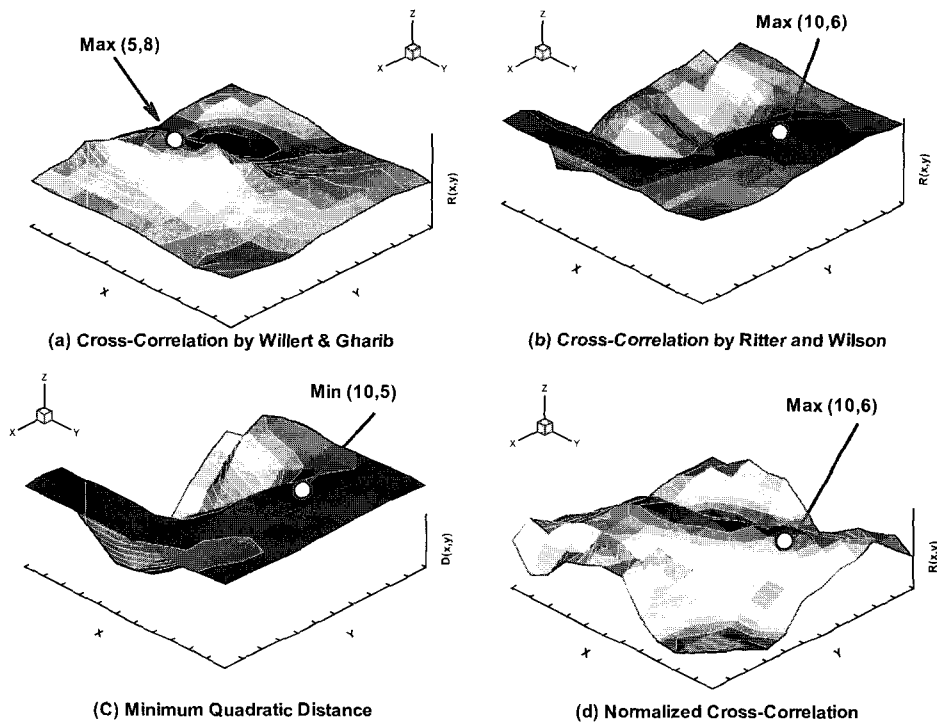


Fig. 4. Correlation contours for low intensity case

결과적으로 Fincham and Spedding (1997)가 주장한 바와 같이 NCC가 두 영상의 일치 분석을 하는 데 있어 가장 적합한 방법임을 알 수 있다.

4. 고속 상관계수 계산법

Eq. (9)를 FFT를 이용하여 계산할 수 있다면, 정확하고 빠른 상관계수 계산법이 될 것이다. 일찍이 Lewis

(1995)는 Eq. (9)를 변형시켜 FFT를 적용할 수 있는 아이디어를 제시한 바 있다. 본고의 방법은 Lewis (1995)의 제안에 순차가감법(successive summing)을 추가하여 좀 더 빠르고 효율적인 계산이 가능하도록 변형시킨 것이다.

먼저 다음과 같은 새 변수를 도입하자.

$$g'(x-m, y-n) \equiv g(x-m, y-n) - \bar{g}_{m,n} \quad (14)$$

그러면 Eq. (9)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R_{f,g}(m,n) = \frac{\sum_{x,y} [f(x,y) - \bar{f}] g'(x-m, y-n)}{\sqrt{\sum_{x,y} [f(x,y) - \bar{f}]^2} \sqrt{\sum_{x,y} g'(x-m, y-n)^2}} \quad (15)$$

Eq. (15)의 분모는 두 영상조각 사이의 공분산(covariance)이다. Eq. (15)의 분모만 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} N_{f,g}(m,n) &\equiv \sum_{x,y} [f(x,y) - \bar{f}] g'(x-m, y-n) \\ &= \sum_{x,y} f(x,y) g'(x-m, y-n) - \bar{f} \sum_{x,y} g'(x-m, y-n) \\ &= \sum_{x,y} f(x,y) g'(x-m, y-n) \end{aligned} \quad (16)$$

Eq. (16)은 Lewis (1995)가 처음 제안한 것이며, FFT를 이용하여 주파수 영역에서 상호상관계수의 분모 부분을 계산할 수 있다. 목표 영상인 $g(x,y)$ 에 비해 $f(x,y)$ 이 상대적으로 작기 때문에 $g'(x-m, y-n)$ 의 계산은 많은 계산량을 요구하지 않는다. 또한 $g'(x-m, y-n)$ 는 단지 한 번만 계산되면 되므로 계산 시간을 크게 줄일 수 있다.

한편, 순차가감법을 추가하면, Eq. (15)를 좀더 효율적으로 계산할 수 있다. Eq. (15)의 분모의 앞부분을 다음과 같이 표현하도록 하자.

$$S_f \equiv \sqrt{\sum_{x,y} [f(x,y) - \bar{f}]^2} \quad (17)$$

Eq. (17)은 상수이다. 분모의 두번째 부분은 다음과 같이 표현하자.

$$S_g \equiv \sqrt{\sum_{x,y} g'(x-m, y-n)^2} \quad (18)$$

그러면 이 식은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} S_g^2 &= \sum_{x,y} g'(x-m, y-n)^2 \\ &= \sum_{x,y} g(x-m, y-n)^2 - \frac{1}{XY} \left[\sum_{x,y} g(x-m, y-n) \right]^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Eq. (19)의 계산을 실제로 계산할 경우 m 과 n 이 1씩 순차적으로 증가하는 데 착안해서 계산하면 전체 영역에 대해 계산을 되풀이하지 않아도 되므로 계산 시간을 단축할 수 있다.

순차가감법은 Fig. 5와 같이 표현할 수 있다. Eq. (19)의 첫번째항과 둘째항을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$S_g^2(m,n) = P(m,n) - \frac{1}{XY} Q(m,n) \quad (20)$$

여기서

$$P(m,n) = \sum_{x,y} g(x-m, y-n)^2 \quad (21)$$

$$Q(m,n) = \sum_{x,y} g(x-m, y-n) \quad (22)$$

Eq. (21) and Eq. (22)의 처음 값 $P(0,0)$ 과 $Q(0,0)$ 은 다음과 같이 계산된다 (Fig. 5.a).

$$P(0,0) = \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} g(x,y)^2 \quad (23)$$

$$Q(0,0) = \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} g(x,y) \quad (24)$$

그 다음 첫번째 열에 대한 값을 계산하면 다음과 같다 (Fig. 5b).

$$\begin{aligned} P(0,n) &= P(0,n-1) \\ &\quad + \sum_{x=0}^{X-1} [g(x, Y+n-1)^2 - g(x, n-1)^2] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Q(0,n) &= Q(0,n-1) \\ &\quad + \sum_{x=0}^{X-1} [g(x, Y+n-1) - g(x, n-1)] \end{aligned} \quad (26)$$

Eq. (23)~(24)와 비교해 보면 Eq. (25)~(26)은 한번에 한 행씩 빼주고 더해주면 계산이 되므로 순차적으로

Table 1. Number of computations

schemes	terms	multiplication & division	addition & subtraction
direct computation of Eq. (9)	numerator	2.1×10^6	4.2×10^6
	denominator	4.2×10^6	8.4×10^6
computation of Eq. (29) by using FFT & successive-summing	numerator	49,200	?
	denominator	8,450	4,900

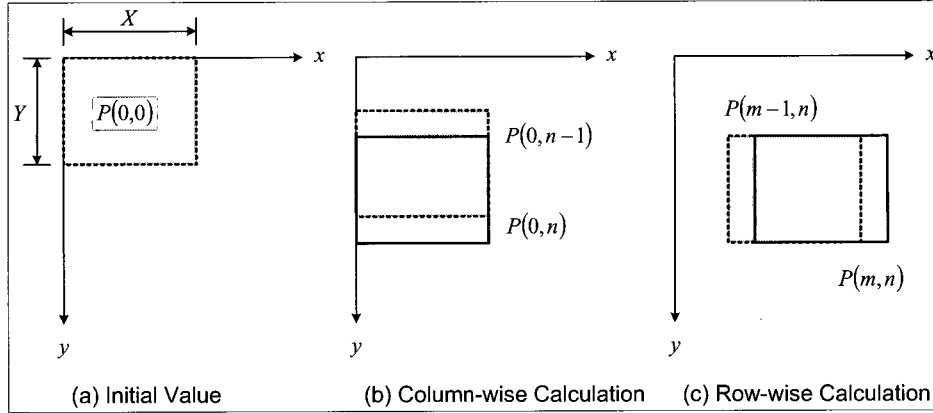


Fig. 5. Successive summing algorithm

계산될 수 있는 것이다. 이렇게 첫째 행에 대한 계산이 끝나면 다른 행에 대해서도 첫째행의 값을 이용하여 순차적으로 계산할 수 있다.

$$P(m,n) = P(m-1,n) + \sum_{y=n}^{Y+n-1} [g(X+m-1,y)^2 - g(m-1,y)^2] \quad (27)$$

$$Q(m,n) = Q(m-1,n) + \sum_{y=n}^{Y+n-1} [g(X+m-1,y) - g(m-1,y)] \quad (28)$$

이들을 다시 종합하면 Eq. (13)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_{f,g}(m,n) = \frac{N_{f,g}(m,n)}{S_f \sqrt{P(m,n) - \frac{1}{XY} Q(m,n)}} \quad (29)$$

즉 Eq. (29)는 분자는 FFT로, 분모는 순차가감법으로 각각 계산한다. 이 방법을 이용하면 분자의 경우 계산량이 영상의 전체 픽셀수(XY)의 제곱에 비례하던

것이 $XY \log_2(XY)$ 에 비례하게 되고, 분모의 경우는 원래 계산량의 약 $2/X$ 로 계산량이 줄어들게 된다. 이를 구체적으로 시험 영상과 표적 영상이 각각 16×16 이고 검사 영역을 포함한 전체 영상을 64×64 로 하였을 경우 전체 계산량을 대략적으로 산정하면 Table 1과 같다. Table 1은 상관계수를 직접 계산하는 경우에 비해 본고에서 제시된 방법이 수십 배 이상 심지어는 100배 이상 빠른 결과를 보여주고 있다. 실제 이 알고리즘을 PIV 프로그램에 적용한 결과 다른 루틴이다 GUI (Graphical User Interface) 등 때문에 약 20배 정도의 속도 향상을 가져왔다.

5. 요약 및 결론

정규상호상관 (또는 상관계수)는 PIV분석에서 영상 조각을 비교하는 데 있어, 가장 정확한 방법이다. 다만 상관계수를 계산하는데 FFT를 이용할 수 없었기 때문에 부정확하지만 빠른 방법과 정확하지만 느린 방법의 둘 중 하나를 택하여 이용하여 왔다. 인공 영상을 이용하여 분석한 결과 종전에 이용되어 왔던 상호상관법은 PIV분석에 이용할 때 종종 엉뚱한 결과를 보임을 증명되었다. 아울러 상관계수를 이용한 방법이 가장 정확함이 재입증되었다.

이렇게 정확한 상관계수법을 빠르게 계산할 수 있도록 하기 위해 FFT와 순차가감법을 조합한 방법을 제안하였다. 이 방법은 상관계수의 식을 변형시킨 뒤, 분자는 FFT로, 분모는 순차가감법으로 계산하는 방법이다. 상관계수를 계산하는 과정 중에 일체의 생략이나 근사를 하지 않았으므로 이 방법은 상관계수를 정확히 계산할 수 있다. 또한 FFT와 순차가감법을 이용하여 계산 횟수를 획기적으로 감소시켰으므로 매우 빠른 계산이 가능한 방법이다.

감사의 글

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술사업단의 연구비지원(과제번호 2-1-2)에 의해 수행되었습니다.

참고 문헌

- Brigham, E. O. (1988). *The fast Fourier transform and its applications*, Prentice-Hall, Inc.
- Draper, N. R., and Smith, H. (1998). *Applied regression analysis*, John Wiley & Sons, Inc.
- Fincham, A. M., and Spedding, G. R. (1997). "Low cost, high resolution DPIV for measurement of turbulent fluid flow." *Experiments in Fluids*, 23, 449-462.
- Gonzalez, R. C., and Woods, R. E. (1992). *Digital image processing*, Addison-Wesley Pub.
- Gui, L., and Merzkirch, W. (2000). "A comparative study of the MQD method and several correlation-based PIV evaluation algorithms." *Experiments in Fluids*, 28(1), 36-44.
- Keane, R. D., and Adrian, R. J. (1992). "Theory of cross-correlation analysis of PIV images." *Applied Scientific Research*, 49, 191-215.
- Lewis, J. P. (1995). "Fast template matching." *Vision Interface*, 120-123.
- Pratt, W. K. (1991). *Digital Image Processing*, John Wiley & Sons, Inc.
- Raffel, M., Willert, C. E., and Kompenhans, J. (1998). *Particle image velocimetry, a practical guide*, Springer.
- Ritter, G. X., and Wilson, J. N. (2000). *Handbook of computer vision algorithms in image algebra*, CRC Press.
- Utami, T., Blackwelder, R. F., and Ueno, T. (1991). "A cross-correlation technique for velocity field extraction from particulate visualization." *Experiments in Fluids*, 10(4), 213-223.
- Westerweel, J. (1993). *Digital particle image velocimetry theory and application*, Delft University Press.
- Willert, C. E., and Gharib, M. (1991). "Digital particle image velocimetry." *Experiments in Fluids*, 10(4), 181-193.

(논문번호:05-107/접수:2005.07.20/심사완료:2005.08.18)