

# 페트로프-갤러킨 자연요소법 : I. 개념

## The Petrov-Galerkin Natural Element Method : I. Concepts

이 홍 우†

Lee, Hong-Woo

조 진 래\*

Cho, Jin-Rae

(논문접수일 : 2004년 8월 10일 ; 심사종료일 : 2005년 4월 11일)

### 요 지

본 논문에서는 수치적분 정도를 향상시킬 수 있는 새로운 무요소 기법을 제안한다. 저자들에 의해 페트로프-갤러킨 자연요소법(PG-NEM)이라 명명된 이 새로운 기법은 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화에 기반을 두고 있으며, 이는 BG-NEM이라 불리는 기존의 자연요소법과 개념적으로 동일하다. 하지만, 동일한 시험 형상함수와 시도 형상함수를 선택하는 BG-NEM과는 달리, PG-NEM에서는 지지영역이 적분을 위한 배경격자에 정확하게 일치하도록 시험 형상함수를 독립적으로 선택하는 페트로프-갤러킨 개념에 기반을 두고 있다. 따라서, 제안된 기법은 BG-NEM과 비교하여 수치적분 정도를 현저히 향상시킬 것으로 기대된다.

**핵심용어** : 무요소법, 보로노이 다이어그램, 델라우니 삼각화, 자연요소법, 페트로프-갤러킨 자연요소법

### Abstract

In this paper, a new meshfree technique which improves the numerical integration accuracy is introduced. This new method called the Petrov-Galerkin natural element method(PG-NEM) by authors is based on the Voronoi diagram and the Delaunay triangulation which is based on the same concept used for conventional natural element method called the Bubnov-Galerkin natural element method(BG-NEM). But, unlike the BG-NEM, the test basis function is differently chosen, based on the concept of Petrov-Galerkin, such that its support coincides exactly with a regular integration region in background mesh. Therefore, it is expected that the proposed technique ensures the remarkably improved numerical integration accuracy in comparison with the BG-NEM.

**keywords** : meshfree method, Voronoi diagram, Delaunay triangulation, natural element method, Petrov-Galerkin natural element method

### 1. 서 론

요소(element)를 기반으로 한 수치기법의 단점을 극복하기 위한 방안으로 많은 연구자들이 무요소법(meshless or meshfree method)의 개념에 관심을 기울이기 시작하였으며, 1992년 Nayroles 등(1992)의 DEM(Diffuse Element Method)이 발표된 이후로 편미분방정식의 새로운 해법으로 무요소 개념에 대한 집중적인 연구가 이루어져 왔다. 대표적으로 EFGM(Element Free Galerkin Method; Belytschko 등, 1994), RKPM(Reproducing Kernel Particle

Method; Liu 등, 1995), PUM(Partition of Unity Method; Melenk 등, 1996), h-p Clouds(Duarte 등, 1996) 등이 무요소 개념을 바탕으로 제안된 방법들이다. 이러한 방법들로부터 매우 짧은 기간동안 무요소의 개념이 확고히 정립되어 졌으며, 현재 다양한 공학 문제에 대한 적용이 성공적으로 이루어지고 있다.

제안된 대부분의 무요소법들은 공통적인 문제점들을 내포하고 있으며, 대표적으로 필수경계조건(essential boundary condition)의 처리와 약 형식(weak form)의 수치적분을 들 수 있다. 전자는 대부분의 무요소법에서 적용하는

† 책임저자, 정회원 · 부산대 기계설계 Post-Doc.  
전화: 051-510-3206 ; Fax: 051-514-7640  
E-mail: leehongw@pusan.ac.kr  
\* 정회원 · 부산대 기계공학부 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

형상함수가 엄격한 보간특성을 만족하지 않기 때문에 발생한다. 이를 해결하기 위해 많은 방법들이 연구되었으며, 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method; Belytschko 등, 1994), 벌칙 정식화(penalty formulation; Duarte 등, 1996), 필수경계를 따른 유한요소의 적용 등의 방법(Krongauz 등, 1998)이 흔히 이용되고 있다. 후자는 두 가지 오차유발 요인에 의해 수치적분의 정도가 저하되는 결과를 초래하게 된다(Dolbow 등, 1999). 첫째는 무요소법의 형상함수가 공간에 대해 다항함수가 아니라 유리함수라는 것이며, 둘째는 적분함수(integrand)의 지지영역(함수가 '0'이 아닌 영역)이 배경격자(back ground mesh)의 영역과 일치하지 않는다는 것이다. 이 중 지지영역간의 불일치는 첫째 요인보다 훨씬 심각한 오차를 유발하게 되며, 해석결과와 정확도뿐만 아니라 수렴율에도 매우 큰 영향을 미치게 된다. 이와 같은 수치적분에 관한 문제점을 해결하기 위해 많은 연구자들이 다양한 방법을 제시하고 있다.

자연요소법(Natural Element Method; NEM; Sukumar, 1998; Sukumar 등, 2001)은 보로노이 다이어그램(Voronoi diagram)과 델라우니 삼각화(Delaunay triangulation)와 같은 기하학적 개념을 도입하여 Sibson 및 Laplace 기저함수(basis function)를 구성한다. 이러한 Sibson 및 Laplace 기저함수는 정확하게 보간특성을 지니게 되므로 유한요소법과 같이 필수경계조건을 직접적으로 처리할 수 있는 장점을 가진다. 또한, MLS 근사기법(moving least square approximation) 등과는 달리 절점의 기하학적 정보를 이용하여 함수를 구성하기 때문에 불규칙한 절점배치에서도 매우 적절한 형상함수를 제공하게 된다. 하지만, 자연요소법에서도 수치적분 오차에 대한 문제점은 여전히 미해결 과제로 남아있다.

본 논문에서는 자연이웃(natural neighbor) 기반의 La-

place 보간함수를 적용한 자연요소법의 장점을 그대로 유지하는 동시에 수치적분 오차를 감소시키는 방안에 대해서 논의하고자 한다.

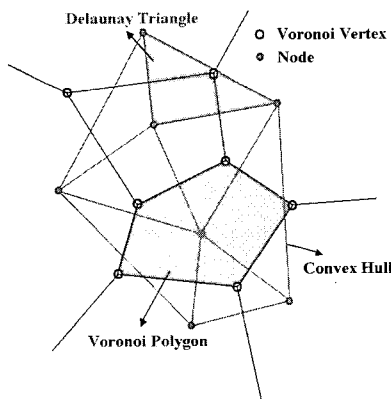
## 2. 자연이웃 기반의 보간기법

### 2.1 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화

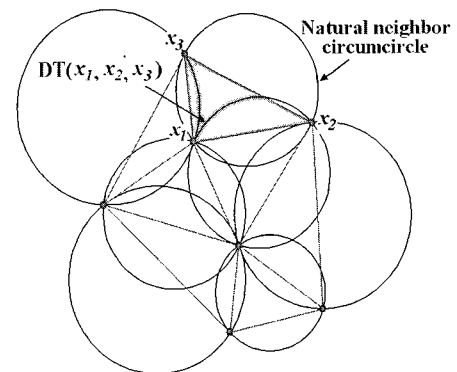
본 논문에서의 적용에 대한 설명을 위해 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화의 개념은 2차원 유클리드(Euclidean) 공간  $R^2$ 에서 정의하도록 한다. 평면상의 서로 다른 점 집합  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $P \in R^2$ 를 고려하자. 점 집합  $P$ 의 1차 보로노이 다이어그램은 평면상의 서로 다른 점의 분포로부터 국부영역  $V_I$ 로 평면을 분할하게 한다. 각각의 국부영역  $V_I$ 는 절점  $x_I$ 와 관련되어 있으며,  $V_I$  내부의 임의의 점은 영역 밖의 어떠한 점  $x_J \in P (J \neq I)$ 보다  $x_I$ 와 가장 가깝게 구성되어 있다. 영역  $V_I$ 는  $x_I$ 의 보로노이 다각형(Voronoi polygon)이 되며, 다음과 같이 정의된다(Green 등, 1978).

$$V_I = \{p \in R^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J) \forall J \neq I\} \quad (1)$$

여기서,  $d(\cdot, \cdot)$ 는 유클리드 메트릭(metric) 즉, 두점 사이의 거리를 의미한다. 그림 1(a)에 7개의 절점으로 구성되는 점 집합  $P$ 의 보로노이 다이어그램을 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 각각의 보로노이 다이어그램  $V_I$ 는 절점  $x_I$ 와  $x_J (J \neq I)$ 를 끝점으로 하는 선분을 수직 2등분하는 직선에 의해 구분되는 많은 반 공간(half-space)의 교집합에 의해 형성된다. 결과적으로 모든 절점들은 닫힌 볼록(convex) 부영역 또는 경계가 없는(unbound) 부공간으로 분할 되어



(a) Voronoi diagram and Delaunay triangulation



(b) Delaunay circumcircle

그림 1 Geometric representation

진다. 보로노이 다이어그램의 특성 및 응용에 대한 자세한 내용은 Okabe 등(1992)의 참고문헌에서 찾을 수 있다.

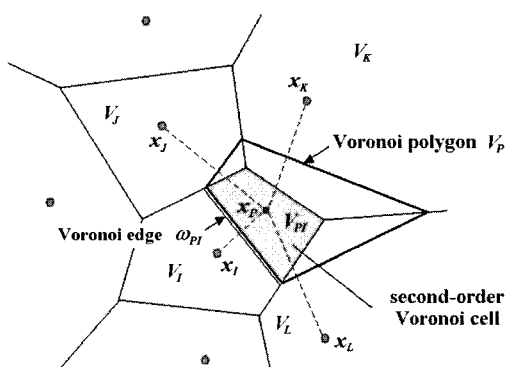
텔라우니 삼각화는 보로노이 다이어그램의 기하학적 듀얼(geometric dual)로서 보로노이 다각형의 경계를 공유하는 절점을 연결하여 구성할 수 있다. 이러한 텔라우니 삼각형은 주어진 절점으로부터 구성할 수 있는 모든 삼각형 중에 최소각을 최대화하는 특성을 가지고 있다(Okabe 등, 1992). 텔라우니 삼각화의 다른 중요한 특성은 빈 외접원 기준(empty circumcircle criterion)으로 임의의 텔라우니 삼각형의 외접원 내부에는 다른 절점을 전혀 포함하지 않아야 하며, 이러한 텔라우니 외접원의 중심은 보로노이 다각형의 꼭지점이 된다는 것이다. 그림 1에 7개의 절점으로 구성된 텔라우니 삼각형과 외접원을 도시하였다.

### 2.2 Sibson 보간

그림 2(a)에 임의의 점  $x_p$ 에 의해 구성되는 보로노이 다각형  $V_p$ 를 도시하였다. 그림에서 음영으로 표시된 부분은 절점  $x_I$ 와 점  $x_p$ 에 의해 형성되는 2차 보로노이 다각형  $V_{PI}$ 이며, 이는 점  $x_p$ 에 가장 가깝고, 절점  $x_I$ 에 두번째로 가까운 영역으로 다음과 같이 정의할 수 있다(Sibson, 1980).

$$V_{PI} = \{x \in R^2 : d(x, x_p) < d(x, x_I) < d(x, x_j)\} \quad (2)$$

여기서,  $\forall I \neq J$ 이다. 2차원 문제에서 1차 보로노이 다각형  $V_p$ 의 면적을  $A(x_p)$ , 2차 보로노이 다각형  $V_{PI}$ 의 면적을  $A_I(x_p)$ 라 두면, 임의의 점  $x_p$ 에서의 Sibson좌표 혹은 기저함수(basis function)는 1차 보로노이 다각형과 2차 보로노이 다각형의 면적 비로 정의된다(Dolbow 등, 1999; Sukumar, 1998).



(a) second order Voronoi cell of  $x_p$

$$\phi_I(x_p) = \frac{A_I(x_p)}{A(x_p)}, \quad A(x_p) = \sum_{J=1}^m A_J(x_p) \quad (3)$$

여기서,  $m$ 은 점  $x_p$ 에 관련된 자연이웃 점의 개수이다.

### 2.3 Laplace 보간

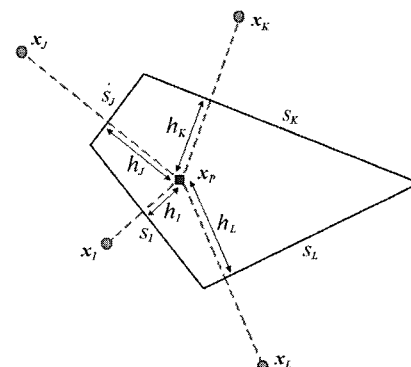
Laplace 보간은 Belikov 등(2000)과 Hiyoshi와 Sugihara(1999)가 제시한 자연이웃 기반의 보간법이다. Laplace 좌표를 정의하기 위해 보로노이 다각형  $V_p$ 와  $V_J$ 의 1차원 공통 면(facet) 즉, 보로노이 모서리  $\omega_{PJ}$ (그림 2(a) 참조)를 다음과 같이 정의한다(Sukumar, 1998).

$$\omega_{PI} = \{x \in \overline{V_p} \cap \overline{V_I}\}, \quad \overline{V_p} = V_p \cup \partial V_p \quad (4)$$

여기서,  $V_p$ 와  $V_I$ 사이에 공통의 모서리가 존재하지 않으면,  $\omega_{PI}$ 는 공집합이 된다. 그림 2(b)에 나타난 것처럼 점  $x_p$ 와 절점  $x_I$ 에 의해 형성되는 보로노이 모서리  $\omega_{PI}$ 의 길이를  $s_I(x_p)$ , 점  $x_p$ 에서  $\omega_{PI}$ 까지의 수직거리를  $h_I(x_p)$ 라 두면, Laplace 기저함수  $\phi_I(x_p)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_I(x_p) = \frac{\alpha_I(x_p)}{\sum_{J=1}^m \alpha_J(x_p)}, \quad \alpha_I(x_p) = \frac{s_I(x_p)}{h_I(x_p)} \quad (5)$$

식 (5)에서 알 수 있듯이 2차원일 때의 Laplace 기저함수는 1차 보로노이 모서리와 관련된 길이비로 정의된다. 반면, 식 (3)에서 처럼 Sibson 기저함수는 2차 보로노이 다각형의 면적비로 정의된다. 그러므로, 계산 비용 측면에서 Laplace 보간이 Sibson 보간에 비해 효율적인 방법이라 할 수 있다.



(b) geometric definition of the polygon  $V_p$

그림 2 Geometric definition of Voronoi polygon

### 2.4 특 성

Sibson 및 Laplace 보간법에 의해 유도된 자연이웃 기반의 기저함수는 항상 양(+)의 값을 가지며, 절점 데이터를 정확히 보간하고, 단위분할(partition of unity)의 성질을 보여준다. 구성된 기저함수의 기본적인 특성을 정리하면 다음과 같다(Dolbow 등, 1999; Sukumar, 1998).

$$0 \leq \phi_I(x_p) \leq 1 : \text{positivity} \tag{6a}$$

$$\phi_I(x_J) = \delta_{IJ} : \text{Kronecker delta} \tag{6b}$$

$$\sum_{I=1}^m \phi_I(x_p) = 1 : \text{partition of unity} \tag{6c}$$

또한, 자연이웃 기반의 기저함수는 선형일관성(linear consistency) 조건을 만족한다. 즉, 임의의 선형 장(linear field)을 정확하게 재구성할 수 있다(Dolbow 등, 1999; Sukumar, 1998).

$$x = \sum_{I=1}^m \phi_I(x_p) x_I \tag{7}$$

자연이웃 기저함수  $\phi_I(x_p)$ 의 영향 영역은 절점  $x_I$ 를 통과하는 델라우니 외접원들과 모든 절점에 의해 형성되는 볼록 영역(convex hull)의 교집합으로 정의된다. Sibson 및 Laplace 기저함수는 1차원에서 정확하게 선형보간 특성을 보이며, 이는 1차원 선형 유한요소의 형상함수와 동일함을 의미한다. 또한, 2차원에서 자연이웃 절점이 3개일 경우 3절점 일정 변형을 유한요소 형상함수와 같다. 4개일 경우 4절점 사각형 유한요소의 형상함수(bilinear shape function)와 동일한 특성을 보인다(Becker 등, 1981; Watson, 1994). 반면, Sibson과 Laplace 기저함수의 차이점은 유순함에서 나타난다. 즉, Sibson 기저함수는 절점에서  $C^0$ , 델라우니 외접원 상에서  $C^1$ , 그 외의 영역에서는  $C^\infty$ 의 연속성을 가지고 있으나, Laplace 기저함수는 델라우니 외접원 상에서도  $C^0$ 의 연속성만을 보인다(Belikov 등, 2000; Hiyoshi 등, 1999).

### 3. 페트로프-갤러킨 자연요소법

가우스 구적법은 유한요소법의 수치적분에서 널리 적용되어 왔으며, 적분을 위한 배경격자를 필요로 한다. 배경격자의 구성에 따라 수치적분 결과의 정확도는 달라질 수 있으며, 적분 오차를 줄이기 위한 배경격자의 구성이 또 다른 해석상의 어려

움으로 작용하게 된다(Dolbow 등, 1999). 자연요소법은 배경격자로서 델라우니 삼각형을 사용하게 되며, 델라우니 삼각형은 Laplace 보간함수를 구성하는 과정에서 생성되는 정보이기 때문에 이를 구성하기 위한 해석 비용 및 어려움이 증가하지는 않는다. 하지만, 자연요소법도 기존의 무요소법에서 적분오차를 유발하는 요인을 여전히 내포하고 있다. 앞서 언급한 것처럼 다항함수(polynomial function)가 아닌 경우에 발생하는 적분오차는 고차의 가우스 구적법을 적용함으로써 어느 정도 적분오차를 줄일 수 있으나, 적분영역과 함수 지지영역의 불일치는 보다 심각한 오차의 원인으로 무요소법 해석결과의 정확성과 수렴성에 매우 큰 영향을 끼치게 된다. 기본적으로 Sibson 및 Laplace 기저함수는 선형 일관성 조건을 만족하므로 선형의 변위장 또는 일정 변형률장을 정확하게 구현하여 하나, 조각시험(patch test)을 통과하지 못하는 결과를 보여주고 있다. 이러한 결과는 EFG, RKPM등의 다른 무요소법에서도 동일하게 나타나고 있으며, 이 또한 적절하지 않은 배경격자의 선정으로 인한 적분오차가 대부분의 원인을 차지하는 것으로 보고된다(Dolbow 등, 1999). 본 절에서는 적분영역인 델라우니 삼각형과 Laplace 기저함수의 지지영역 불일치로 인한 적분 오차를 감소시키기 위한 방안에 대해 논의한다.

#### 3.1 자연요소법에서의 수치적분 오차

전체 영역이  $\Omega \subset R^2$ 이고, 경계가  $\Gamma$ 인 2차원 선형 탄성체를 고려하면, 정적 평형방정식은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \text{ in } \Omega \tag{8}$$

여기서,  $\sigma_{ij}$ 는 Cauchy응력,  $b_i$ 는 체적력(body force)을 나타내며,  $(\cdot)_{,j} = \partial(\cdot)/\partial(\cdot)_j$ 를 의미한다. 한편, 필수 및 자연경계(essential and natural boundary)조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ on } \Gamma^u, \quad \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i, \text{ on } \Gamma^t \tag{9}$$

여기서,  $n_i$ 은 영역  $\Omega$ 의 외부로 향하는 단위 법선 벡터이며,  $\bar{u}_i$ 와  $\bar{t}_i$ 는 각각 미리 규정된 변위 및 표면력(surface traction)이다. 또한,  $\Gamma^u$ 와  $\Gamma^t$ 는 각각 필수 및 자연경계를 나타낸다.

선형 탄성거동을 가정하면, 응력과 변형률 사이의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{10}$$

여기서,  $C_{ijkl}$ 은 물성계수(material moduli)이며,  $\epsilon_{kl}$ 은 미소 변형률(small strain)로서 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (11)$$

식 (8)에 시험함수(test function)  $v_i$ 를 곱하여 전체 영역  $\Omega$ 에 대하여 적분한 후 발산정리(divergence theorem)와 경계조건을 적용하면 다음의 약 형식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v)d\Omega = \int_{\Omega} b_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i v_i d\Gamma \quad (12)$$

여기서, 시도함수(trial function)  $u$ 와 시험함수  $v$ 는 각각  $V = [H^1(\Omega)]^2$ 와  $V_0 = [H_0^1(\Omega)]^2$ 에서 선정된다.  $H^1(\Omega)$ 는 1차의 Hilbert 함수공간이며,  $H_0^1(\Omega)$ 는 필수경계  $\Gamma_u$ 에서  $v=0$ 를 만족하는 함수로 구성된 1차 Hilbert 함수공간을 의미한다.

식 (12)의 약 형식으로부터 이산화 방정식을 얻기 위해 시도함수와 시험함수를 다음과 같은 근사함수로 가정한다.

$$u_i(x) = \sum_I \phi_I(x) u_{iI}, \quad v_i(x) = \sum_I \psi_I(x) v_{iI} \quad (13)$$

여기서,  $\phi_I$ 와  $\psi_I$ 는 각각 시도함수 및 시험함수를 이산화하는 형상함수이며,  $u_{iI}$ 와  $v_{iI}$ 는 각각 절점  $I$ 에 해당하는 시도 및 시험함수의 절점값을 의미한다. 부브노프-갤러킨 개념(Bubnov-Galerkin concept)에 기반을 둔 유한요소법과 무요소법에서는 동일한 형상함수를 이용해 시도 및 시험함수를 근사화하며, 기존의 자연요소법(BG-NEM)에서는 형상함수로서 Sibson 또는 Laplace 기저함수를 사용한다.

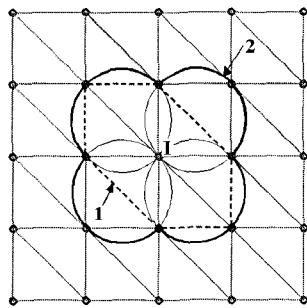
식 (13)을 식 (12)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 이산화 할 수 있다.

$$\sum_I \sum_J \left[ \int_{\Omega_I^r} C_{ijkl} \psi_{I,j} v_{iI} \phi_{J,l} u_{J,k} d\Omega \right] = \sum_I \left[ \int_{\Omega_I^r} b_i \psi_I v_{iI} d\Omega + \int_{\Gamma_I^t} \bar{t}_i \psi_I v_{iI} d\Gamma \right] \quad (14)$$

여기서,  $\Omega_I^{te}$ 는 절점  $I$ 에 해당하는 시험 형상함수의 지지영역(support)이며,  $\Omega_I^{tr}$ 은 시도 형상함수의 지지영역을 나타낸다. 식 (14)에서 알 수 있듯이 이산화된 약 형식은 시험 형상함수의 지지영역 내에서 적분이 이루어진다.

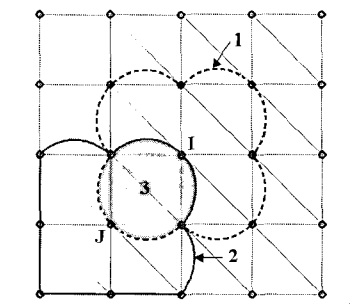
잘 알려진 바와 같이 일정 변형률 유한요소(CS-FE : Constant Strain Finite Element; Becker 등, 1981)에서 식 (14)의 적분을 위한 국부 영역  $\Omega_I^{te}$ 는 절점  $I$ 를 공유하는 삼각형 요소로 구성되며, 해당 형상함수는 유한요소의 구성과정에서  $\Omega_I^{te}$ 내에서만 정의되도록 설정되어 있다. 따라서, 유한요소법에서는 요소 자체가 매우 적절한 적분 영역을 제공하게 되며, 적분 함수의 지지영역과 적분영역의 불일치로 인한 적분오차는 발생하지 않게 된다.

반면, BG-NEM의 경우 델라우니 삼각형을 적분영역으로 설정하기 때문에 CS-FEM과 동일하게 영역을 분할하게 되지만, 절점  $I$ 에 해당하는 시험 형상함수의 지지영역은 델라우니 삼각형 경계를 기준으로 나누어지지 않는다. 그림 3(a)에 균일 절점분포에 대한 CS-FEM과 BG-NEM에서의 절점 시험 형상함수 지지영역  $\Omega_I^{te}$ 를 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 CS-FEM에서는 시험 형상함수의 지지영역과 적분영역인 삼각형 요소의 경계가 정확하게 일치하고 있다. 반면, BG-NEM에서 Laplace 기저함수의 지지영역은 적분영역인 델라우니 삼각형의 경계와 일치하지 않음을 보여준다. 그림 3(b)에 나타낸 것처럼 Laplace 기저함수를 이용하여 시도 및 시험함수를 구성한 경우(BG-NEM)에 두 함수의 교차영역은 델라우니 외접원이 겹치는 지점에서 형



1 - Sub-domain  $\Omega_{te}^I$  for CS-FE  
2 - Sub-domain  $\Omega_{te}^J$  for BG-NEM

(a) CS-FEM and BG-NEM



1 - Sub-domain  $\Omega_{te}^I$  2 - Sub-domain  $\Omega_{tr}^J$   
3 - Intersections of  $\Omega_{te}^I$  and  $\Omega_{tr}^J$

(b) Intersection of shape functions(BG-NEM)

그림 3 Supports of shape functions

성되며, 이로 인해 적분함수의 지지영역과 적분영역의 불일치가 발생하게 된다.

### 3.2 페트로프-갤러킨 개념의 도입

기존 BG-NEM(Dolbow 등, 1999; Sukumar, 1998).에서는 시도 및 시험함수를 Laplace 기저함수를 이용하여 구성하였으며, 이는 적분함수의 지지영역과 적분영역(델라우니 삼각형)의 불일치를 유발하여 심각한 적분정도의 저하를 야기시켰다. 이와 같은 적분오차로 인하여 BG-NEM은 조각시험을 통과하지 못할 뿐만 아니라, 점근적 수렴률을 보장하지 못하는 경우도 발생하게 된다. 본 논문에서는 이러한 적분오차를 억제하기 위하여 시험 형상함수의 지지영역을 적분영역과 동일하게 구성하는 방법을 제시한다. 이는 기존의 부브노프-갤러킨 기반의 자연요소법과는 달리 시도함수와 시험함수를 다르게 구성하기 때문에 페트로프-갤러킨(Petrov-Galerkin) 기반의 자연요소법으로 볼 수 있다. 따라서, 새로운 자연요소법을 기존의 BG-NEM에 대비하여 페트로프-갤러킨 자연요소법(PG-NEM: Petrov-Galerkin Natural Element Method)으로 명명한다.

PG-NEM에서 시험함수는 델라우니 삼각형 기반의 형상함수를 이용하여 구성한다. 이러한 델라우니 삼각형 기반의 형상함수는 CS-FEM의 형상함수와 동일하며, 적분점에서 함수계산은 면적좌표(area coordinates)를 이용하여 얻을 수 있다. 그림 4(a)에 균일한 절점분포에서 모든 대각선의 방향이 동일하도록 삼각형 분할이 이루어진 경우에 대하여 델라우니 삼각형 기반의 형상함수를 도시하였다. 그림에서 구성된 형상함수의 지지영역은 절점  $I$ 를 둘러싼 델라우니 삼각형의 합(union)영역과 동일하다. 이러한 특성은 약형식의 적분이 델라우니 삼각형에서 이루어지는 것을 고려할 때, 적분영역과 적분함수 지지영역의 불일치로 인한 적

분오차를 억제할 수 있는 매우 적절한 형상함수를 제공하게 된다. 즉, 그림 4(b)에서 절점  $I$ 의 시험 형상함수 영역  $\Omega_I^{te}$ 와 절점  $J$ 의 시도 형상함수 영역  $\Omega_J^{tr}$ 의 교차영역은 적분영역인  $\Omega_I^{te}$ 내부에서만 정의됨을 알 수 있다. 따라서, 어떠한 경우에 있어서도 적분함수와 적분영역이 항상 일치하게 되며, BG-NEM의 가장 큰 단점인 적분의 부정확성에 의한 오차를 크게 줄일 수 있게 된다. 한편, 델라우니 삼각형은 Laplace 보간함수를 구성하는 과정에서 정의되어야 하는 사항이므로 시험 형상함수를 계산하기 위한 부가적인 절차는 필요하지 않다.

이상과 같이 시험함수는 델라우니 삼각형 기반의 형상함수를 이용하여 근사화하고, 시도함수는 식 (5)의 Laplace 기저함수를 이용하여 구성하면 PG-NEM의 이산화 방정식을 얻을 수 있다.

$$K\bar{u} = f \tag{15}$$

여기서,  $K$ 는 강성행렬(stiffness matrix),  $f$ 는 하중벡터(load vector)를 나타내며, 다음과 같이 표현된다.

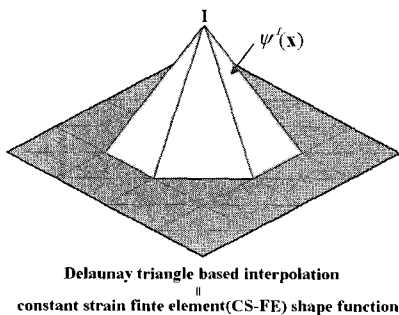
$$K_{IJ} = \int_{\Omega_I^{te}} (B_I^v)^T D B_J d\Omega \tag{16a}$$

$$f_I = \int_{\Omega_I^{tr}} \psi_I b d\Omega + \int_{\Gamma_I} \psi_I \bar{t} d\Gamma \tag{16b}$$

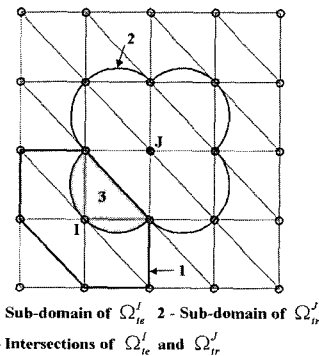
식 (16a)의 방정식에서  $B_I^v$ 와  $B_J$ 는 각각 시험 형상함수와 시도 형상함수의 미분으로 다음 식과 같이 주어진다.

$$B_I^v = \begin{bmatrix} \psi_{I1} & 0 \\ 0 & \psi_{I2} \\ \psi_{I2} & \psi_{I1} \end{bmatrix}, B_J = \begin{bmatrix} \phi_{J1} & 0 \\ 0 & \phi_{J2} \\ \phi_{J2} & \phi_{J1} \end{bmatrix} \tag{17}$$

2차원에서 선형 등방성(isotropic) 재료의 물성행렬  $D$ 는



(a) nodal test shape function



(b) Intersection of shape functions(PG-NEM)

그림 4 Supports of shape functions in PG-NEM

다음과 같다.

$$D = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

for plane strain (18a)

$$D = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 \\ \nu & 1-\nu \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

for plane stress (18b)

여기서,  $E$ 는 재료의 탄성계수이며,  $\nu$ 는 프와송 비를 의미한다.

식 (16a)의 강성행렬 성분을 검토해보면, 각 성분은 시험 형상함수의 미분과 시도 형상함수의 미분의 곱으로 구성 되어 있음을 알 수 있다.

그림 4(b)와 식 (16)으로부터 행렬성분을 계산하기 위한 적분은 적분함수가 '0'이 아닌 국부영역  $\Omega_I^e$ 내에서 이루어 짐을 알 수 있으며, 본 논문에서 제시된 PG-NEM에서 적분영역의 경계  $\partial\Omega_I^e$ 는 적분함수가 '0'이 되는 선분으로 구성되어 있음을 명백히 보여주고 있다. 따라서, 적분함수의 지지영역은 적분영역  $\Omega_I^e$ 와 정확하게 일치하게 되며, 이는 PG-NEM에서 적용한 시험 형상함수가 델라우니 삼각형을 적분영역으로 하는 경우에 가장 적절한 형상함수가 될 수 있다는 것을 의미한다.

#### 4. Laplace 기저함수의 구성

Sukumar(1989)의 최근 논문에서는 Watson(1994)의 알고리즘이 내포하는 단점을 극복하기 위해 Boywer-Watson (Boywer, 1981; Watson, 1981) 알고리즘을 적용하였으며, 본 논문에서도 Laplace 보간함수의 구성을 위해 기본적으로 Boyer-Watson의 알고리즘을 채택한다.

Laplace 기저함수의 구성은 그림 5에 도시한 것과 같은 순서로 이루어진다. 그림 5(a)와 같은 절점분포에서 임의의 점  $x_p$ 는 델라우니 외접원  $O(x_1, x_7, x_2)$ ,  $O(x_2, x_7, x_3)$ ,  $O(x_3, x_7, x_4)$ 의 내부에 존재하므로 빈 외접원 기준을 위배 하게 된다. 즉, 고려하는 델라우니 외접원의 중심을  $x_c$ , 반경을  $r$ 이라 하면 다음의 조건을 위배하게 된다.

$$\|x_c - x_p\|^2 < r^2 \tag{19}$$

식 (19)를 위배하는 삼각형을 찾아낸 후, 그림 5(b)에서와 같이 해당 삼각형의 내부 모서리를 제거하고, 경계에 위치하는 절점을 반시계 방향 순서로 저장한다. 저장된 절점들은 점  $x_p$ 의 자연이웃 점 집합이 되며, 그림 5(b)에서는 5개의 절점 집합  $N = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ 이 구성된다. 자연이웃 절점  $n_I, n_J$ 와 점  $x_p$ 를 포함하는 새로운 델라우니 삼각형을 구성하고, 새롭게 구성된 델라우니 삼각형의 외접원 중심  $c_I$  및 중심좌표의 미분  $c_{I,m}$ 을 계산한다. 여기서,  $I$ 는 점  $x_p$ 에 관련된 보로노이 꼭지점의 국부번호로서 반시계 방향 순서를 가진다. 즉, 그림 5(c)에서  $c_1(x_p)$ 는  $O(n_1, n_2, x_p)$ 의 중심좌표이며,  $c_5(x_p)$ 는  $O(n_5, n_1, x_p)$ 의 중심좌표를 나타낸다.

$s_I(x_p)$ 는 보로노이 꼭지점  $c_J$ 와  $c_I(J, I=$ 반시계 방향의 순환 순열)로 구성되는 모서리 길이를 의미하며, 식 (20)과 같이 계산되어 진다.

$$s_I(x_p) = \sqrt{\|c_I(x_p) - c_J(x_p)\|^2} \tag{20}$$

보로노이 모서리 길이의 좌표에 대한 미분  $s_{I,m}(x_p)$ 는 아래 식과 같이 표현된다.

$$s_{I,m}(x_p) = \frac{[c_I - c_J] \cdot [c_{I,m} - c_{J,m}]}{s_I} \tag{21}$$

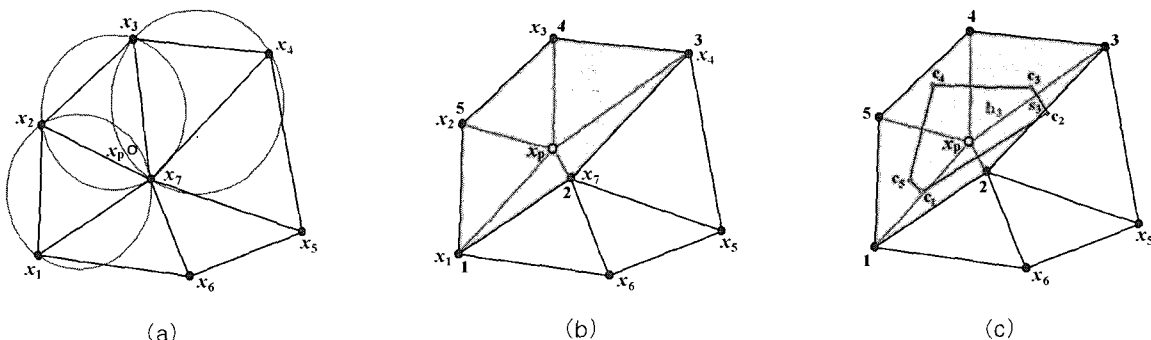


그림 5 Construction of Laplace basis function

여기서, 우변의 모든 항들은  $x_p$ 에 관한 함수이며, 간소화를 위해 생략하였다.

한편, 점  $x_p$ 에서 보로노이 모서리까지의 수직거리  $h_I(x_p)$ 와 그 미분  $h_{I,m}(x_p)$ 는 다음 식과 같이 계산된다.

$$h_I(x_p) = 0.5 \sqrt{\|x_p - n_I\|^2} \quad (22)$$

$$h_{I,m}(x_p) = \frac{x_{p,m} \cdot [x_p - n_I]}{4h_I(x_p)} \quad (23)$$

따라서, Laplace 기저함수  $\phi_I(x_p)$ 는 식 (20)과 식 (22)에서 계산된 결과를 이용하여 식 (5)와 같이 정의된다. 또한, 미분  $\phi_{I,m}(x_p)$ 는 다음 식과 같이 정의된다.

$$\phi_{I,m}(x_p) = \frac{\alpha_{I,m}(x_p) - \phi_I(x_p) \sum_{j=1}^m \alpha_{I,j}(x_p)}{\sum_{j=1}^m \alpha_{I,j}(x_p)} \quad (24a)$$

$$\alpha_{I,m}(x_p) = \frac{s_{I,m}(x_p) - \alpha_I(x_p) h_{I,m}(x_p)}{h_I(x_p)} \quad (24b)$$

그림 6에 균일 또는 불균일 절점 분포에 따른 델라우니 삼각형과 절점  $I$ 를 통과하는 델라우니 외접원을 나타내고, 해당하는 Laplace 기저함수  $\phi_I(x_p)$ 의 형상을 도시하였다. 그림 6(a)는 블록 영역내의 절점에서 정의되는 기저함수를 나타낸 것이고, 그림 6(b)는 오목 경계에 위치하는 절점에 해당하는 Laplace 기저함수이다. 본 논문에서는 Sambridge 등 (1995)의 알고리즘을 도입하여 오목 경계에서도 Laplace 기저함수의 선형거동이 완벽하게 보장될 수 있도록 하였으며, 그림 6(b)의 기저함수 형상으로부터 경계에서의 선형거동을 확인할 수 있다. 따라서, PG-NEM은 정식화 과정에서 필수경계조건 처리를 위한 부가적인 기법의 도입이 필요하지 않으며, 유한요소법과 같이 임의의 경계에서 필수경계

조건을 직접적인 처리가 가능하다.

### 5. 결 론

Sibson 또는 Laplace 보간기법을 채용한 기존의 BG-NEM은 MLS, RKPM 등의 근사기법의 단점을 보완할 수 있는 형상함수 자체의 우수한 성능-보간 특성, 불규칙한 절점배치에 대한 강인한 함수구성, 적분 배경격자의 자동적인 생성에도 불구하고 수치적분과정에서 상당한 오차를 유발하여 조각시험을 통과하지 못할 뿐만 아니라, 해석오차의 점근적 수렴을 보장하지 못하는 경우가 발생하기도 하였다. 이러한 BG-NEM의 단점을 보완하기 위한 방안으로 델라우니 삼각형 기반의 시험 형상함수를 도입하여 적분함수와 적분영역 경계의 불일치로 인한 적분오차의 발생을 최대한 억제시킬 수 있게 하였으며, 시도 형상함수의 구성은 BG-NEM과 동일하게 Laplace 보간기법을 적용하였다. 시험함수에 이용되는 델라우니 삼각형 기반의 형상함수는 일반적인 CS-FEM의 형상함수와 동일하며, Laplace 보간함수의 구성과정에서 델라우니 삼각형 정보는 이미 알려져 있으므로 시험 형상함수 적용을 위한 부가적인 계산비용은 거의 발생하지 않게 된다.

저자들이 제안한 PG-NEM의 개념은 EFGM에서 수치적분 정도를 향상시키기 위해 제시한 경계상자기법(bounding box technique; Melenk 등, 1996)의 기본 개념과 동일한 배경에서 출발하지만, 미리 정해진 적분영역인 델라우니 삼각형의 경계와 일치하는 시험 형상함수를 구성함으로써 적분영역 내부에서만 적분함수가 정의되도록 하기 때문에 방법상으로는 상반된 접근법이라 볼 수 있다. 또한, Atluri 등(1999)의 MLPG(Meshless Local Petrov-Galerkin)법은 시험 형상함수의 지지영역을 적분영역으로 활용하는 방법이다. 이는 저자들이 제안한 PG-NEM과 개념적으로 동일하나, 수치적분 오차를 제거하기 위한 방안은 고려되지 않고 있다. 즉, 국부 약 형식(local weak form)에 기반을 두어 배경격자의

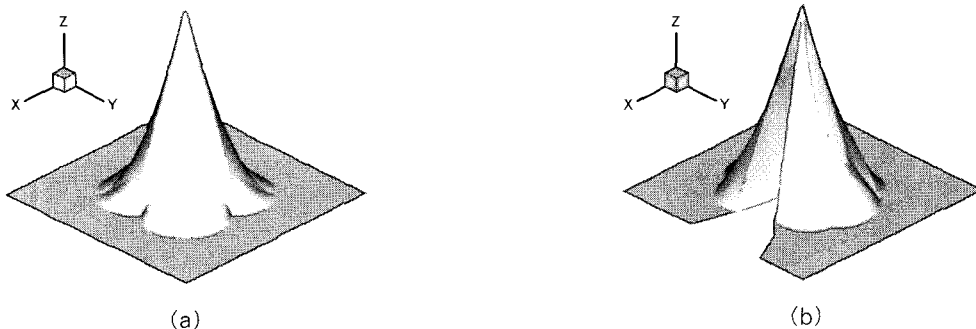


그림 6 Supports of Laplace basis function



이용을 근본적으로 제거하는 데 중점을 두고 있다.

한편, 제안된 PG-NEM은 적용된 기법의 특성으로 인해 강성행렬이 비대칭으로 구성되며, 이로 인한 저장용량 및 계산 시간의 증가는 불가피하며, 이는 BG-NEM의 적분오차로 야기되는 문제점을 해결하기 위해 감수해야 되는 부분이다. 저자들의 다음 논문에서는 선형 탄성문제와 기하학적 비선형 문제에 대한 적용을 통하여 PG-NEM의 타당성 및 성능을 검증한다.

### 감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지역혁신 인력양성사업(2003.6-2006.4)의 연구결과로 수행되었음.

### 참 고 문 헌

- Atluri, S.N., Kim, H.G., Cho, J.Y.(1999) A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) and Local Boundary Integral Equation(LBIE) methods, *Computational Mechanics*, 24, pp.348~372
- Becker, E.B., Carey, G.F., Oden, J.T.(1981) *Finite Elements: An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Belikov, V.V., Yu Semenov, A.(2000) Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive isolines generation, *Applied Numerical Mathematics*, 37, 2000, pp.371~387
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L.(1994) Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256
- Bower, A.(1981) Computing Dirichlet tessellations, *The Computer Journal*, 24, pp.162~166
- Dolbow, J., Belytschko, T.(1999) Numerical integration of the Galerkin weak form in mesh-free methods, *Computational mechanics*, 23, pp.219~230
- Duarte, C.A., Oden, J.T.(1996) An h-p adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, pp.237~262
- Green, P.J., Sibson, R.(1978) Computing Dirichlet tessellations in the plane, *The Computer Journal*, 21, pp.168~173
- Hiyoshi, H., Sugihara, K.(1999) Two generalizations of an interpolant based on Voronoi diagrams, *International Journal of Shape Modeling*, 5, pp.219~231
- Krongauz, Y., Belytschko, T.(1996) Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 131, pp.133~145
- Liu, W.K., Jun, J., Zhang, Y.F.(1995) Reproducing kernel particle methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20, pp.1081~1106
- Melenk, J.M., Babuska, I.(1996) The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, pp.289~314
- Nayroles, B., Touzot G., Villon, P.(1992) Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, 10, pp.307~318
- Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K.(1992) *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley & Sons, Chichester, England
- Sambridge, M., Braun, J., McQueen, H.(1995) Geophysical parameterization and interpolant of irregular data using natural neighbors, *Geophysical Journal International*, 122, pp.837~857
- Sibson, R.(1980) A vector identity for Dirichlet tessellation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 87, pp.151~155
- Sukumar, N.(1998) The natural element method in solid mechanics, Ph. D. Thesis, Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, U.S.A.
- Sukumar, N., Moran, B., Yu Semenov, A., Belikov, V.V.(2001) Natural neighbor Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp.1~27
- Watson, D.F.(1994) *nnggridr: An implementation of natural neighbor interpolation*, David Watson
- Watson, D.F.(1981) Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes, *The Computer Journal*, 24, pp.167~172
- Zhu, T., Atluri, S.N.(1998) A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method, *Computational Mechanics*, 21, pp.211~222