

국소 최적성과 순차 기준을 바탕으로 한 검파 기법: 2. 성능 분석

준회원 최 상 원*, 강 현 구*, 이 주 미*,
정회원 박 소 령**, 종신회원 김 선 용***, 송 익 호*

Detection Schemes Based on Local Optimality and Sequential Criterion: 2. Performance Analysis

Sang Won Choi*, Hyun Gu Kang*, Jumi Lee* *Associate Members,*

So Ryoung Park** *Regular Members,* Sun Yong Kim***, Ickho Song* *Lifelong Members*

요 약

이 논문에서는, 약한 신호를 검파하는 데에 알맞도록 1부에서 얻은 순차 검파 방식의 성능을 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식, 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식의 성능과 견주어 본다. 제안한 순차 검파 방식은 순차 확률비 검파 방식과 견주어 볼 때, 열개가 같거나 덜 복잡하고 신호를 더 빠르게 검파할 때가 많다. 아울러, 제안한 순차 검파 방식은 고정 표본 검파 방식과 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식과 견주어 열개가 덜 복잡하거나 같고 필요한 관측수가 늘 적다.

Key Words : sequential detection, locally optimum detection, fixed sample size (FSS) test, sequential probability ratio test (SPRT), truncated sequential probability ratio test (TSPRT).

ABSTRACT

In this paper, the performance of the sequential detection scheme proposed in Part 1 is compared with that of the fixed sample size (FSS) test, sequential probability ratio test (SPRT), and truncated sequential probability ratio test (TSPRT). The proposed sequential detection scheme requires less complexity and, in most cases, smaller sample size than the SPRT. It is also observed that the proposed sequential detection scheme has always lower complexity and smaller sample size than the FSS test and TSPRT.

I. 머리말

여러 검파 방식 가운데, 순차 확률비 검파 방식은 [1] 두 잘못 확률 조건을 만족시키는 검파 방식인데 대체로 고정 표본 검파 방식보다 더 빠르게 신호를 검파한다 [2]. 이와 같은 특성을 써서 [3]에서는 순

차 검파 방식을 직접수열 대역확산 시스템에 적용하여 부호를 빠르게 획득하고자 하였고, [4]에서는 어렵셈을 바탕으로 간단한 순차 부호 획득 방법들을 제안하고 그 성능을 분석하였다. 또한, [5]에서는 열개를 자유롭게 바꿈으로써 부호를 빠르게 획득하는 순차 추정기를 제안하였다. 그런데, 순차 확률비

* 한국과학기술원 전자전산학과 ({swchoi, khg, jmlcc}@Sejong.kaist.ac.kr, i.song@ieee.org)

** 가톨릭대학교 정보통신전자공학부 (srpark@catholic.ac.kr),

*** 건국대학교 전자공학부 (kimsy@konkuk.ac.kr)

논문번호 : KICS2005-06-239, 접수일자 : 2005년 6월 9일

** 이 논문은 과학기술부가 지원하고 한국과학재단이 주관하는 국가지정연구실 사업의 지원을 받아 연구한 것입니다.

검파 방식은 만족시켜야 하는 두 잘못 확률이 낮으면, 고정 표본 검파 방식보다 더 느리게 신호를 검파한다는 문제를 지니고 있다.

순차 확률비 검파 방식의 모자람을 매우고자, [6]에서 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식을 제안하였다. 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식은 혼합 상수를 써서 고정 표본 크기 검파 방식과 순차 검파 방식을 섞은 것이다. 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식을 쓰면 순차 확률비 검파 방식보다 신호를 빠르게 검파할 수도 있지만, 그 방식에서 쓰이는 두 혼합 상수를 정하기가 쉽지 않다는 모자람 점이 있다. 한편, 이진 가설에서 신호를 순차 검파하는 것을 [7, 8]에서 다진 가설 신호 순차 검파로 넓혔고, 그 접근 성능을 살펴보았다.

이렇듯, 순차 검파 방식은 이제까지 여러 사람이 많이 연구해 왔으나, 약한 신호에 알맞은 순차 검파 방식을 그리 많이 연구하지는 않았다. 이에, [9]에서는 새로운 약신호 검파 기법을 제안하고, 국소 최적 검파 기법과 새로 얻은 약신호 검파 기법을 잘 모아 새로운 순차 검파 방식을 생각하였다.

이 논문에서는 [9]에서 제안한 순차 검파 방식의 열개와 성능을 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식과 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식의 열개와 성능과 견주어 본다.

II. 관측 모형과 제안한 순차 검파 방식

단계 m 에서 순차 검파 문제의 귀무가설 $H_{0,m}$ 과 대립가설 $H_{1,m}$ 을 나타내면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{0,m}: \underline{z}_m &= \underline{v}_m, \\ H_{1,m}: \underline{z}_m &= \theta \underline{s}_m + \underline{v}_m, \quad \theta > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

관측 모형 (1)에서 $\underline{z}_m = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ 은 관측 벡터이고, θ 는 신호 세기이며 $\underline{s}_m = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$ 은 신호 벡터로 $|s_i|^2 = 1, i = 1, 2, \dots, m$ 이다. 순 덧셈꼴 잡음 벡터 $\underline{v}_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ 은 서로 독립이고 분포가 같은 확률 벡터로 그 결합 확률밀도함수는 $f_{\underline{v}_m}(\underline{v}_m) = \prod_{i=1}^m f_{v_i}(v_i)$ 이고, f_{v_i} 는 v_i 의 한계 확률밀도함수인데 짝함수라 둔다. 여기서, $\underline{v}_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ 은 m 차원 실수 벡터이다.

이 논문에서는 다음과 같이 둔다. 첫째, 확률밀도함수 f_v 의 일차 미분 $f_v'(x) = \frac{df_v(x)}{dx}$ 는 모든 x 에서 뜻이 있다. 둘째, 피쳐 정보 $I_0(f_v)$ 는 유한하다. 곧,

$$I_0(f_v) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{LO}^2(x) f_v(x) dx < \infty \quad (2)$$

이다. 여기서, 비선형 함수

$$g_{LO}(x) = -\frac{f_v'(x)}{f_v(x)} \quad (3)$$

은 국소 최적 비선형성이라 부른다.

이제, 허용 오경보 확률이 α 이고 허용 놓침 확률이 β 일 때, [9]에서 제안한 순차 검파 방식을 다시 써보면 아래와 같다.

(1) $m = 1, 2, \dots, \delta_p - 1$ 일 때에는,

$$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) < \tau_{WDL, m}(\beta) \text{ 이면, } H_{0, m} \text{을 받아들임;}$$

$$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) \geq \tau_{LOI, m}(\alpha) \text{ 이면, } H_{1, m} \text{을 받아들임;}$$

$$\tau_{WDL, m}(\beta) \leq \Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) < \tau_{LOI, m}(\alpha) \text{ 이면,}$$

관측을 하나 더 받아보고 결정 내림;

(2) $m = \delta_p$ 일 때에는,

$$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) < \tau_{\delta_p}(\alpha, \beta) \text{ 이면, } H_{0, m} \text{을 받아들임;}$$

$$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) \geq \tau_{\delta_p}(\alpha, \beta) \text{ 이면, } H_{1, m} \text{을 받아들임.}$$

여기서,

$$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^m s_i \{g_{LO}(z_i) - \epsilon\} \quad (4)$$

이고 $\rho > 0$ 와 ϵ 은 실수이다. 아울러,

$$\delta_p = \arg \min_m \{ \tau_{LOI, m}(\alpha) \leq \tau_{WDL, m}(\beta) \} \quad (5)$$

이고, $\tau_{LOI, m}(\alpha)$ 는 새로 얻은 약신호 검파에서 쓰는 문턱값이며, $\tau_{WDL, m}(\beta)$ 는 국소 최적 검파 기법에서 [10] 쓰는 문턱값이다. 한편, 문턱값 $\tau_{\delta_p}(\alpha, \beta)$ 는 아래 식을 만족시키도록 마음대로 고를 수 있다 [9].

$$\tau_{LOI, \delta_p}(\alpha) \leq \tau_{\delta_p}(\alpha, \beta) \leq \tau_{WDL, \delta_p}(\beta). \quad (6)$$

III. 검정 통계량의 보기 몇가지

이제, 제안한 검파 기법의 열개를 구체적인 보기를 들고 다른 검파 기법의 열개와 견주어 살펴보자. 먼저, 제안한 순차 검정 통계량 (4)를 몇 가지 분포에서 얻어 보자. 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식과 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식에서 쓰는 대수 가장 비슷함 또는 가장 비슷함 검정 통계량은

$$\Lambda_{LL}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m g_{LL,i}(z_i) \quad (7)$$

이다. 여기서,

$$g_{LL,i}(x) = \ln \left\{ \frac{f_v(x - \theta s_i)}{f_v(x)} \right\} \quad (8)$$

은 ‘대수 비슷함 비’라 부른다.

3.1 일반화된 정규 분포에서

확률밀도함수가 아래와 같은 분포를 일반화된 정규 분포라 [11] 한다.

$$f_{GG}(x) = \frac{k}{2A_{GG}(k)\Gamma(1/k)} \cdot \exp \left\{ -\frac{|x|^k}{A_{GG}^k(k)} \right\}. \quad (9)$$

여기서,

$$A_{GG}(k) = \left\{ \sigma_{GG}^2 \frac{\Gamma(1/k)}{\Gamma(3/k)} \right\}^{1/2} \quad (10)$$

이고 $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$ 는 감마 함수이다. 위 (9)에서 알 수 있듯이 일반화된 정규 분포의 확률밀도함수는 짝함수이고, 꼭지점이 하나이며 두 매개변수로 정의할 수 있다. 그 두 매개변수는 분산 σ_{GG}^2 과 확률밀도함수가 줄어드는 비율을 나타내고 0보다 큰 수 k 이다. 이제, v_i 의 확률밀도함수 $f_v(x)$ 가 (9)와 같을 때 (3)과 (8)에서

$$g_{LO}(x) = \frac{k|x|^{k-1} \text{sgn}(x)}{A_{GG}^k(k)} \quad (11)$$

과

$$g_{LL,i}(x) = |x|^k - |x - \theta s_i|^k \quad (12)$$

를 얻을 수 있다. 여기서,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

일반화된 정규 확률밀도함수는 여러 확률밀도함수를 나타낼 수 있으므로 매우 쓸모 있는 확률밀도함수이다. 보기를 들면, $k=2$ 이면 일반화된 정규 확률밀도함수는 정규 확률밀도함수이다. 이때, (4)에 $\rho = 2/A_{GG}^2(2)$, $\epsilon = 0$ 이라 두면, (11)에서 검정 통계량

$$\Lambda_{LO}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m s_i \cdot z_i \quad (13)$$

을 얻고, (12)를 (7)에 넣어 가장 비슷함 검정 통계량

$$\Lambda_{LL}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m (|z_i|^2 - |z_i - \theta s_i|^2) \quad (14)$$

를 얻는다.

한편, $k=1$ 이면 일반화된 정규 확률밀도함수는 아래에 보인 겹치수 확률밀도함수이다.

$$f_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{GG}} \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_{GG}} \right\}. \quad (15)$$

확률밀도함수 $f_v(x)$ 가 (15)에 나타낸 $f_D(x)$ 와 같을 때 (3)과 (8)에서 각각

$$g_{LO}(x) = \left\{ \frac{2}{\sigma_{GG}^2} \right\}^{1/2} \text{sgn}(x) \quad (16)$$

과

$$g_{LL,i}(x) = |x| - |x - \theta s_i| \quad (17)$$

을 얻을 수 있다. 따라서, $\rho = \sqrt{2}/\sigma_{GG}$, $\epsilon = 0$ 이라 두면 (4)와 (16)에서

$$\Lambda_{LO}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m \text{sgn}(z_i) \quad (18)$$

을 얻고, (7)과 (17)에서

$$\Lambda_{LL}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m (|z_i| - |z_i - \theta s_i|) \quad (19)$$

를 얻을 수 있다.

3.2 일반화된 코쉬 분포에서

확률밀도함수를 0보다 큰 세 매개변수 σ_{GG}^2, k, u 로

$$f_{GG}(x) = \frac{\overline{B}_c(k, u)}{\overline{D}_c^{u+1/k}(x)} \quad (20)$$

과 같이 쓸 수 있는 분포를 일반화된 코쉬 분포라 [11] 한다. 여기서,

$$\overline{B}_c(k, u) = \frac{k\Gamma(u+1/k)}{2u^{1/k}A_{GG}(k)\Gamma(u)\Gamma(1/k)} \quad (21)$$

이고

$$\overline{D}_c(x) = 1 + \frac{1}{u} \left\{ \frac{|x|}{A_{GG}(k)} \right\}^k \quad (22)$$

이다. 일반화된 코쉬 확률밀도함수의 꼬리는 지수 특성이 아니라 대수 특성을 보인다. 곧, $|x|$ 가 클 때 일반화된 코쉬 확률밀도함수의 꼬리는 $|x|^{-(ku+1)}$ 와 비례하며 줄어든다. 한편, $k=2$ 이고 $2u$ 가 정수이면 일반화된 코쉬 확률밀도함수는 중심 t 확률밀도함수임이 알려져 있고 [11], $k=2$ 이고 $u=1/2$ 이면 일반화된 코쉬 확률밀도함수는 아래와 같은 코쉬 확률밀도함수이다.

$$f_C(x) = \frac{\sigma_{GG}}{\pi(x^2 + \sigma_{GG}^2)} \quad (23)$$

매개변수 σ_{GG}^2 과 k 가 정해져 있을 때, $u \rightarrow \infty$ 이면 일반화된 코쉬 확률밀도함수는 일반화된 정규 확률밀도함수와 가까워진다. 더 나아가, $k=2$ 이고 $u \rightarrow \infty$ 이면, 일반화된 코쉬 확률밀도함수는 정규 확률밀도함수이다. 일반화된 정규 확률밀도함수와 마찬가지로 일반화된 코쉬 확률밀도함수는 여러 잡음 환경을 모형화하는데 쓸모있다.

이제, 잡음 확률밀도함수가 (20)일 때 비선형 함수 $g_{LO}(x)$ 를 얻으면,

$$g_{LO}(x) = \frac{(uk+1)|x|^{k-1}sgn(x)}{uA_{GG}^k(k) + |x|^k} \quad (24)$$

와 같고, 대수 비슷함 비는 (8)에서

$$g_{LL,i}(x) = \ln(A_{GG}^k(k)u + |x|^k) - \ln(A_{GG}^k(k)u + |x - \theta_{S_i}|^k) \quad (25)$$

임을 알 수 있다. 끝으로, (4)에 $\rho = uk+1, \epsilon = 0$ 이라 두고 (24)를 넣으면 검정 통계량

$$\Lambda_{LOl}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m \frac{|z_i|^{k-1}sgn(z_i)}{uA_{GG}^k(k) + |z_i|^k} \quad (26)$$

을 얻고, (25)를 (7)에 넣어

$$\Lambda_{LL}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m \{ \ln(A_{GG}^k(k)u + |z_i|^k) - \ln(A_{GG}^k(k)u + |z_i - \theta_{S_i}|^k) \} \quad (27)$$

을 이끌어낼 수 있다.

2.3 중심 t 분포에서

중심 t 분포의 확률밀도함수는 아래와 같다 [11].

$$f_T(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n\pi)^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (28)$$

여기서, n 은 자유도라 부른다. 중심 t 분포에서 국소 최적 비선형성은

$$g_{LO}(x) = \frac{(n+1)x}{x^2 + n} \quad (29)$$

이고 대수 비슷함 비는

$$g_{LL,i}(x) = \ln\{x^2 + n\} - \ln\{(x - \theta_{S_i})^2 + n\} \quad (30)$$

이므로, (4)에 $\rho = n+1, \epsilon = 0$ 이라 두고 (29)를 넣어 검정 통계량

$$\Lambda_{LOl}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m \frac{z_i}{z_i^2 + n} \quad (31)$$

을 얻고, (7)에 (30)을 넣어 가장 비슷함 검정 통계량

$$\Lambda_{LL}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m [\ln(z_i^2 + n) - \ln\{(z_i - \theta_{S_i})^2 + n\}] \quad (32)$$

를 얻는다.

3.4 분석과 토의

제한한 검파 방식은 근본적으로는 국소 최적 검정 통계량을 쓰기 때문에 가장 비슷함 검정 통계량

을 쓰는 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식과 끝을 지른 순차 확률비 검파 방식보다 열개가 간단하고 계산량이 적는데, 이는 비정규 잡음에서 더욱 두드러진다.

정규 잡음에서 검정 통계량 (13)과 가장 비슷함 검정 통계량 (14)를 견주어 보면 이 둘이 같은 열개임을 알 수 있다. 하지만, 비정규 잡음에서는 검정 통계량 $\Lambda_{LoI}(\cdot)$ 이 가장 비슷함 검정 통계량 $\Lambda_{LL}(\cdot)$ 보다 계산량이 적고, 신호 세기 θ 의 영향을 받지 않으므로, 신호 세기에 따라 그 모양을 바꾸지 않아도 된다.

IV. 성능 비교

제한한 순차 검파 방식에서는 신호 세기 θ 의 영향을 받지 않는 검정 통계량 (4)를 써서 신호를 검파한다. 아울러, 단계 m 에서 쓰는 두 문턱값 가운데, 위 문턱값 $\tau_{LoI,m}(\alpha)$ 는 신호 세기의 영향을 받지 않고, 아래 문턱값 $\tau_{wDI,m}(\beta)$ 는 신호 세기의 영향을 받는다. 이와 같은 사실을 새겨두고, 검파기를 실제 쓸 때의 신호 세기 $\tilde{\theta}$ 가 문턱값 $\tau_{wDI,m}(\beta)$ 를 정할 때 쓴 신호 세기 θ 와 다를 수도 있을 때, 제한한 순차 검파 방식이 어떤 성능을 보이는지 알아보고자 모의실험으로 여러 검파 방식의 성능을 검파력과 효율면에서 견주어 살펴보자.

4.1 성능 특성 함수와 평균 관측수

제한한 순차 검파 방식의 검파력 함수를 $r = \tilde{\theta}/\theta$ 로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 P(r) = & P\{\Lambda_{LoI}(\underline{z}_1) \geq \tau_{LoI,1}(\alpha)\} \\
 & + P\{\Lambda_{LoI}(\underline{z}_2) \geq \tau_{LoI,2}(\alpha), \\
 & \tau_{wDI,1}(\beta) \leq \Lambda_{LoI}(\underline{z}_1) < \tau_{LoI,1}(\alpha)\} \\
 & + P\{\Lambda_{LoI}(\underline{z}_3) \geq \tau_{LoI,3}(\alpha), \\
 & \tau_{wDI,2}(\beta) \leq \Lambda_{LoI}(\underline{z}_2) < \tau_{LoI,2}(\alpha), \\
 & \tau_{wDI,1}(\beta) \leq \Lambda_{LoI}(\underline{z}_1) < \tau_{LoI,1}(\alpha)\} \\
 & + \dots \\
 & + P\{\Lambda_{LoI}(\underline{z}_{\delta_s}) \geq \tau_{LoI,\delta_s}(\alpha), \\
 & \tau_{wDI,\delta_s-1}(\beta) \leq \Lambda_{LoI}(\underline{z}_{\delta_s-1}) \\
 & < \tau_{LoI,\delta_s-1}(\alpha), \dots, \\
 & \tau_{wDI,1}(\beta) \leq \Lambda_{LoI}(\underline{z}_1) < \tau_{LoI,1}(\alpha)\}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

순차 검파 방식에서는 검파력을 나타내는 잣대로서, 귀무가설을 받아들일 확률 $1 - P(r)$ 을 자주 쓰는데, 이를 성능 특성 함수라 한다.

한편, 단계 m 에서 귀무가설을 받아들이는 결정 영역, 대립가설을 받아들이는 결정 영역, 결정을 미루고 관측을 더 받아 다음 단계에서 새로 판단하는 결정 영역을 각각 $Z_{0,m}$, $Z_{1,m}$, $Z_{2,m}$ 이라 할 때,

$$\begin{aligned}
 z_m \in Z_{0,m}, \quad r = 0, \\
 z_m \in Z_{1,m}, \quad r > 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

이면 더 바랄 나위가 없을 것이다. 식 (34)가 뜻하는 바는, $r=0$ 일 때에는 실제 관측의 신호 성분의 신호 세기가 0이므로 귀무가설을 받아들일 확률이 높을수록, $r>0$ 일 때에는 실제 관측의 신호 성분의 신호 세기가 0보다 크므로 귀무가설을 받아들일 확률이 낮을수록 바람직하다는 것이다. 따라서, 이상적인 성능 특성 함수는 아래와 같은 성질을 지닌다.

$$\begin{aligned}
 L(r) = 1, \quad r = 0, \\
 L(r) = 0, \quad r > 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

이상적으로는, 음이 아닌 모든 r 에서 순차 검파 방식의 성능을 살펴보는 것이 좋겠지만, $r=1$ 일 때 얻은 순차 검파 방식의 성능으로 $r>1$ 일 때의 성능을 어느 정도 짐작할 수 있다. 이에, 일반적으로 순차 검파 문제에서는 $r \in [0, 1]$ 일 때의 성능을 살펴본다 [2,6].

순차 검파 방식의 또 다른 성능 잣대로 효율성을 생각해볼 수 있다. 검파기 D_2 에 대한 검파기 D_1 의 상대 효율은 [1, 10] 아래와 같다.

$$RE_{1,2} = \frac{n_2(r)}{n_1(r)}. \tag{36}$$

여기서, $n_i(r)$ 은 크기와 (곧, 허용 오정보 확률) 힘이 (곧, 1-허용 농침 확률) 일정할 때, 검파기 D_i 가 쓴 평균 관측수를 r 의 함수로 나타낸 것이다. 상대 효율 $RE_{1,2}$ 가 1보다 크다는 것은 검파기 D_1 이 D_2 보다 평균적으로 적은 관측으로 신호를 검파함을, 곧, 검파기 D_1 이 D_2 보다 더 효율적임을 뜻한다.

적은 관측으로 신호를 바르게 검파하는 것이 바람직하지만, 성능 특성 함수와 평균 관측수는 서로 엇갈리는 잣대이기에, 일반적으로 성능 특성 함수가

이상적인 성능 특성 함수쪽으로 가까워지면 평균 관측수는 많아지고, 성능 특성 함수가 이상적인 성능 특성 함수에서 멀어지면 평균 관측수는 적어진다. 이런 까닭에, 서로 다른 순차 검파 방식을 견줄 때에는 두 잘못 확률 조건을 만족시키도록 성능 특성 함수를 맞추어 놓고, 평균 관측수를 갖대로 성능을 살펴본다.

4.2 제안한 방식의 성능 특성 함수

평균이 0이고 분산이 σ^2 인 덧셈꼴 흰빛 정규 잡음 환경에서 검파 방식의 성능을 모의실험하였다. 아울러, 신호 세기의 제곱 β^2 과 덧셈꼴 흰빛 정규 잡음 분산 σ^2 의 비 β^2/σ^2 는 1로, 신호 벡터는 $s_m = [1, 1, \dots, 1]^T$ 로 두었다. 순차 확률비 검파 방식과 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식은 각각 [2]와 [6]에서 얻은 것을 바탕으로 모의실험하였다. 이때, 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식에서는 두 잘못 확률 조건을 만족시키고, 신호를 가장 빨리 검파하도록 혼합상수를 0.5로 두었다.

그림 1과 2는 각각 $\alpha = \beta = 10^{-3}$, 10^{-4} 일 때, 네 검파 방식이 나타내는 성능 특성 함수이다. 그림 1에서는 일백만번, 그림 2에서는 일천만번 거듭하여 점 하나씩을 얻었다. 그림 1과 2에서 $r=0$, 0.5, 1.0일 때, 네 검파 방식의 성능 특성 함수값이 모두 같고, 특히, $r=0.5$ 일 때에는 그 값이 0.5임을 눈여겨볼 만하다. 이는 네 검파 방식의 검정 통계량과 문턱값을 살펴봄으로써 알 수 있다. 구체적으로는, 관측 크기가 m 일 때 네 검파 방식의 검정 통계량은 모두

$$\sum_{i=1}^m z_i = \frac{1}{2} m\theta + \sum_{i=1}^m v_i \quad (37)$$

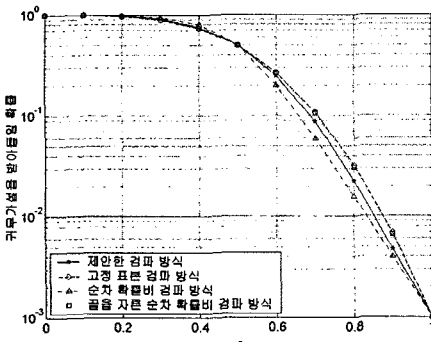


그림 1. 허용 잘못 확률 α 와 β 가 모두 10^{-3} 일 때 네 검파 방식의 성능 특성 함수.

이고, $\alpha = \beta$ 일 때 네 검파 방식의 문턱값은 아래와 같은 관계를 만족시킴을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{LOI,m}(\alpha) + \tau_{WDI,m}(\beta) &= m\theta, \quad 1 \leq m \leq \delta_p - 1, \\ 2 \tau_{F,m}(\alpha, \beta) &= m\theta, \quad m = \delta_f, \\ \tau_{SL,m}(\alpha, \beta) + \tau_{SU,m}(\alpha, \beta) &= m\theta, \quad m \geq 1, \\ \tau_{TL,m}(\alpha, \beta) + \tau_{TU,m}(\alpha, \beta) &= m\theta, \quad 1 \leq m \leq \delta_t - 1. \end{aligned} \quad (38)$$

여기서, $\tau_{F,m}(\alpha, \beta)$ 는 고정 표본 검파 방식의 문턱값이고, δ_f 는 오경보 확률 α' 이 허용 오경보 확률 α 와 같고 놓침 확률 β 이 허용 놓침 확률 β 와 같을 때 고정 표본 검파 방식의 관측 크기이다 [6]. 아울러, $\tau_{SL,m}(\alpha, \beta)$ 와 $\tau_{SU,m}(\alpha, \beta)$ 는 순차 확률비 검파 방식의 위 문턱값과 아래 문턱값을 뜻하고 [2], $\tau_{TL,m}(\alpha, \beta)$ 와 $\tau_{TU,m}(\alpha, \beta)$ 는 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식의 위 문턱값과 아래 문턱값을 뜻하며, δ_t 는 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식의 마지막 단계를 나타낸다 [6]. 위 (38)이 뜻하는 바는 두 문턱값의 산술 평균이 (고정 표본 검파 방식에서는 문턱값이) 검정 통계량 (37)의 평균과 같다는 것이다. 게다가, $\sum_{i=1}^m v_i$ 는 평균이 0인 정규 확률 변수이고, 그 확률밀도함수는 짝함수이다. 따라서, 네 검파 방식의 성능 특성 함수 값 $L(r)$ 은 모두 0.5이다.

한편, 제안한 순차 검파 방식은 $r \in (0, 0.5)$ 이면 순차 확률비 검파 방식에 이어 둘째로 낮은 검파력을 보이고, $r \in (0.5, 1)$ 이면 순차 확률비 검파 방식 다음으로 뛰어난 검파력을 보인다.

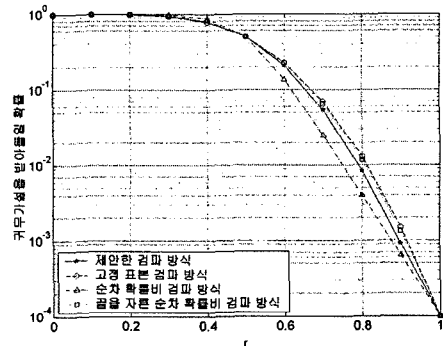


그림 2. 허용 잘못 확률 α 와 β 가 모두 10^{-4} 일 때 네 검파 방식의 성능 특성 함수.

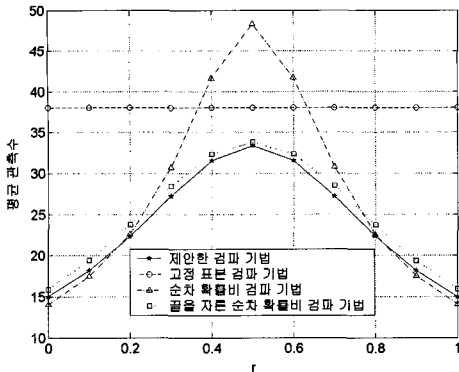


그림 3. 허용 잘못 확률 α 와 β 가 모두 10^{-3} 일 때 네 검파 방식의 평균 관측수.

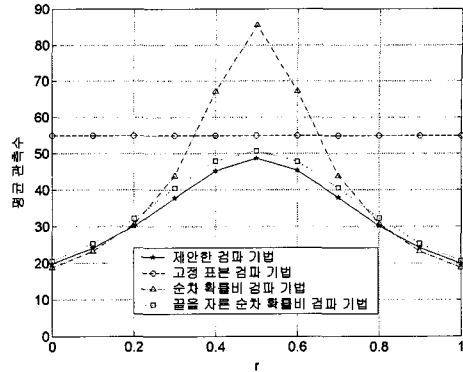


그림 4. 허용 잘못 확률 α 와 β 가 모두 10^{-4} 일 때 네 검파 방식의 평균 관측수.

4.3 제안한 방식의 평균 관측수와 효율

그림 3과 4는 각각 $\alpha = \beta = 10^{-3}, 10^{-4}$ 일 때, 네 검파 방식으로 신호를 검파하는데 필요한 평균 관측수를 나타낸다. 이 두 그림에서는, 점 하나를 얻을 때마다 모의실험을 이십만번 거듭하여 얻음으로써 상대 오차를 거의 무시할 수 있도록 했다. 이 두 그림을 살펴보면 아래를 알 수 있다. 먼저, 제안한 순차 검파 방식은 고정 표본 검파 방식과 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식보다 늘 적은 관측으로 신호를 검파한다. 한편, $r=0$ 과 1 근처일 때 제안한 순차 검파 방식의 평균 관측수가 순차 확률비 검파 방식의 평균 관측수보다 조금 더 많다. 이는 순차 확률비 검파 방식이 $r=0$ 과 1일 때 평균 관측수를 적게 하는 관점에서 최적이기 때문이다. 한편, $r=0.5$ 쯤일 때에는 제안한 순차 검파 방식의 평균 관측수가 순차 확률비 검파 방식의 평균 관측수보다 눈에 띄게 적다.

이제, $r=0, 0.5, 1$ 일 때 제안한 순차 검파 방식의 상대 효율을 살펴보자. 표 1은 허용 잘못 확률 α 와 β 가 $10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ 일 때 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식, 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식에 대한 제안한 순차 검파 방식의 상대 효율 $RE_{P,F}, RE_{P,S}, RE_{P,T}$ 를 보여준다. 먼저, r 이 0 또는 1일 때에는 순차 확률비 검파 방식이 상대적으로 가장 적은 평균 관측수를 보이며, 그 뒤를 이어 제안한 순차 검파 방식, 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식, 고정 표본 검파 방식 순으로 평균 관측수가 많아진다. 아울러, 두 허용 잘못 확률이 낮아질수록 $RE_{P,F}$ 와 $RE_{P,S}$ 는 커지고, $RE_{P,T}$ 는 작아짐을 알 수 있다. 이는, 더 정확하게 신호를 검파하고자 할수록 제안한 순차 검

표 1. 허용 잘못 확률 α 와 β 가 $10^{-3}, 10^{-4}$ 일 때 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식, 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식에 대한 제안한 검파 방식의 상대 효율.

	$\alpha = \beta$	$RE_{P,F}$	$RE_{P,S}$	$RE_{P,T}$
$r=0$	10^{-3}	2.53	0.94	1.06
	10^{-4}	2.78	0.95	1.04
$r=0.5$	10^{-3}	1.14	1.45	1.01
	10^{-4}	1.13	1.75	1.04
$r=1$	10^{-3}	2.54	0.94	1.06
	10^{-4}	2.78	0.94	1.04

파 방식의 효율성이 고정 표본 검파 방식의 효율성보다 높아지고, 순차 확률비 검파 방식의 효율성과 가까워짐을 뜻한다. 또한, 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식의 효율성은 제안한 순차 검파 방식의 효율성에 미치지 못한다는 것을 알 수 있다.

한편, $r=0.5$ 에서 제안한 순차 검파 방식의 상대 효율 $RE_{P,S}$ 는 두 잘못 확률이 $10^{-3}, 10^{-4}$ 일 때, 각각 1.45, 1.75로 순차 확률비 검파 방식은 눈에 띄게 상대적으로 많은 관측을 바탕으로 신호를 검파함을 알 수 있다. 또한, 두 잘못 확률이 낮아질수록 상대 효율이 커짐을 알 수 있다. 구체적으로, 허용 오경보 확률 α 와 허용 농침 확률 β 가 낮아질수록 다시 말해서, 신호를 더욱 바르게 검파하고자 할수록, 제안한 순차 검파 방식은 순차 확률비 검파 방식과 견주어 더 적은 관측으로 신호를 검파한다. 이와 같은 순차 확률비 검파 방식의 모자람을 매우고자 나온 끝을 자른 순차 검파 방식은 그림 3과 4에서 볼 수 있듯이 $r=0.5$ 에서 순차 확률비 검파 방식보다 더 적은 평균 관측수를 보인다.

다음으로, r 이 0과 1 사이에 있을 때 제안한 순차 검파 방식은 끝을 지른 순차 검파 방식과 견주어 늘 적은 평균 관측수로 신호를 검파한다. 덧붙여, $r=0.5$ 에서 $RE_{P,T}$ 는 두 허용 잘못 확률이 낮아질수록 커짐을 알 수 있다. 다시 말해서, 제안한 검파 방식의 평균 관측수는 끝을 지른 순차 검파 방식의 평균 관측수와 견주어 상대적으로 적어진다.

한편, $\alpha = \beta = 10^{-3}$, 10^{-4} 일 때 제안한 순차 검파 방식의 상대 효율 $RE_{P,F}$ 를 살펴보면 $r=0.5$ 일 때 $RE_{P,F}$ 는 모두 1.13쯤으로 거의 일정하다. 곧, $r=0.5$ 에서 제안한 순차 검파 방식은 고정 표본 검파 방식과 견주어 신호를 더 빠르게 검파한다.

간추려보면, $r \in [0, 1]$ 일 때 제안한 순차 검파 방식은 나머지 세 검파 방식과 견주어 꽤 고르게 적은 평균 관측수로 신호를 검파함을 알 수 있다.

VI. 맺음말

순차 확률비 검파 방식이 지닌 모자람을 풀고자 1부에서 제안한 순차 검파 방식의 성능을 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식, 끝을 지른 순차 확률비 검파 방식의 성능과 견주어 보았다.

제안한 순차 검파 방식은 순차 확률비 검파 방식보다 때로는 검파력이 낮으나, 열개가 같거나 덜 복잡하며, 같은 신호를 더 빠르게 검파한다. 아울러, 제안한 순차 검파 방식은 고정 표본 검파 방식과 끝을 지른 순차 확률비 검파 방식보다 열개가 같거나 더 간단하고, 적은 관측수로 신호를 검파한다. 곧, 제안한 순차 검파 방식은 나머지 세 검파 방식과 견주어 간단한 열개로 신호를 비교적 바르고 빠르게 검파한다고 할 수 있다.

참고 문헌

[1] A. Wald, *Sequential Analysis*, Wiley, 1947.
 [2] S. Tantaratana and J. B. Thomas, "Relative efficiency of the sequential probability ratio test in signal detection," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 24, pp. 22-31, Jan. 1978.
 [3] 김진범, 오정현, "DS/SS 시스템의 Noncoherent Sequential Acquisition에 관한 연구," 한국통신학회 학술발표회 논문집, 14권, 55-58쪽, 고려대학교, 서울, 1995년 11월.

[4] 정일택, 권형문, 이주미, 윤석호, 송익호, "어림 베셀함수를 바탕으로 열개를 간단히 한 비동위상 순차 부호획득 방법," 한국통신학회 논문지 (심사받고 있음).
 [5] 현광민, 박상규, "가변 구조를 갖는 순차 예측 방법을 이용한 m 계열 신호의 고속 포착," 한국통신학회 논문지, 27권, 664-672쪽, 2002년 7월.
 [6] S. Tantaratana and H. V. Poor, "Asymptotic efficiencies of truncated sequential tests," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, pp. 911-923, Nov. 1982.
 [7] C. W. Baum and V. V. Veeravalli, "A sequential procedure for multihypothesis testing," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 40, pp. 1994-2007, Nov. 1994.
 [8] V. P. Dragalin, A. G. Tartakovsky, and V. V. Veeravalli, "Multihypothesis sequential probability ratio tests-Part II: Accurate asymptotic expansions for the expected sample size," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, pp. 1366-1383, July 2000.
 [9] 최상원, 오종호, 권형문, 윤석호, 배진수, 송익호, "국소 최적성과 순차 기준을 바탕으로 한 검파 기법: 1. 문턱값 분석," 한국통신학회 논문지, 30권, 2005년 10월 (실릴 것임).
 [10] I. Song, J. Bae, and S. Y. Kim, *Advanced Theory of Signal Detection*, Springer, 2002.
 [11] 박철훈, 송익호, 남동경, 확률과정, 생능출판사, 2004년.

최 상 원 (Sang Won Choi)

준회원



2002년 2월 고려대학교 전기 전자전파공학부(공학사)
 2004년 2월 한국과학기술원 전자전산학과(공학석사)
 2004년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 박사과정

<관심분야> 이동통신, 통계학

적 신호처리, 검파와 추정

강 현 구 (Hyun Gu Kang)

준회원



2004년 8월 고려대학교 전자 및 정보공학부(공학사)

2004년 9월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 석사과정
<관심분야> 이동통신, 정보이론, 검파와 추정

박 소 령 (So Ryoung Park)

정회원

한국통신학회 논문지 제30권 5호 참조

김 선 용 (Sun Yong Kim)

종신회원

한국통신학회 논문지 제30권 6호 참조

송 익 호 (Ickho Song)

종신회원

한국통신학회 논문지 제30권 4호 참조

이 주 미 (Jumi Lee)

준회원



1998년 2월 이화여자대학교 수학과(이학사), 전자공학과 (공학사)

2000년 2월 한국과학기술원 전자전산학과(공학석사)

2000년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 박사과정
<관심분야> 이동통신, 정보이론