韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2005. 8. 제 44권, 제 3호, 457-475.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2005, Vol. 44, No. 3, 457-475.

통계적 개념 발달에 관한 인식론적 고찰

이 영 하 (이화여자대학교)
남 주 현 (이화여자대학교 대학원)

I. 서 론

통계학은 불확실한 상황을 다루는 학문으로써 수학교육과정에 포함되어 다루어지고 있지만 전통적인 수학과는 크게 다르다는 것이 일반적 견해이다(Moore, 1990). 이와 같은 주장은 확실한 근거에 의한 판단을 하는 수학이 추구하는 엄밀성과 연역적 사고보다는 불확실한 상황에 의한 의사결정을 하는 통계학은 유용성과 귀납적 사고능력을 배양하는 것에 목적을 두고 있는 차이점에 기인한 것이라 볼 수 있다.

그런데 통계적 소양, 추론, 사고와 같은 것들의 교육적 결과들이 지금까지의 연구들에서 적절하게 설명되어지지 않았기 때문에 교육과정 프로그램에서의 기초를 제공하지 못해왔다는 것이 점점 명백해지고 있다(Ben-Zvi & Garfield, 2004). 따라서 학습자의 통계적 소양, 추론, 사고의 발달이 무엇인가에 대한 명확한 정립뿐 만 아니라, 이것의 기초가 되는 핵심적인 통계적 개념들이 무엇인가에 대한 정립도 필요로 된다.

이와 같이 주요한 통계적 개념들에 대한 설명의 필요성은 선행 연구자들(예, Ben-Zvi & Arcavi, 2001; Hancock et al., 1992; Konold et al., 1997; Garfield & Ben-Zvi, 2004)에 의해서도 제기된 문제로, 학생들은 적절한 개념적(인식론적) 구조가 없이는 자료를 통계적 자료 분석을 위해 필수적인 것으로 지각하지 못한다. 그러나Garfield & Ben-Zvi(2004)가 언급한 것처럼, 중요한 통계적 아이디어들이 무엇이고 어떻게 발달되는가에 대한 것은 명확하지 않은 채, 교실 수업에서는 개별적인 개념과 기술들만이 강조되고 절차와 계산에 의해 중요한 아이디어들은 불분명한 채로 남아있는 것이 현실이다.

예를 들어, 현행 교육과정에서 다루어지는 히스토그램은 밀도도수분포의 극한형으로 볼 때 확률밀도함수의 그래프로 연계되는 주제이다. 그러나 확률밀도함수의 그래프가 도입될 때는 연역적으로 정의할 뿐 히스토그램과의 연계가 되지 않고 있다. 그렇기 때문에 히스토그램은 막대그래프의 일종으로 생각하고 왜 배우는가에 대한 명확한 목표 설정이 이루어지지 않는 것이다.

또한 학생들이 중심과 퍼짐의 개념들과 예를 들어, 표본과 분포와 같은 다른 개념들과의 관계성을 완전하게 이해하지 않고, 중심이나 변이성의 서로 다른 측도들을 계산하는 방법에만 연역적으로 초점을 맞출 수도 있다. 이렇게 되면 기술 통계학에서의 중심과 퍼짐의 개념을 가지고 표집분포의 중심과 퍼짐의 개념을 연계하는데 실패할 수도 있다(Garfield & Ben-Zvi, 2004).

이와 같은 것들은 낱낱의 통계적 개념들을 가르치는데 있어서 전체에서 그 개념의 위치가 무엇인지, 무엇을 목적으로 교수학습을 하고 있는지에 대한 명확한 인식(인식론적 목표의식)이 부족하기 때문이다.

그러나 통계학의 핵심적인 중요한 개념들을 정립하게 되면 교사가 직면하는 주요한 도전들은 개별적 개념들과 기술들을 넘어서기 위한 방법을 찾는 것뿐만 아니라, 학생들로 하여금 중요한 아이디어들과 그것들 사이의 상호관계성에 관한 이해를 발달시키는 것이다. 따라서 통계학의 중요한 아이디어에 초점을 맞추는 접근은 교사로 하여금 교육과정을 통해 중요한 아이디어들을 명확하게 하고 눈에 쉽게 보이게 만든다(Garfield & Ben-Zvi, 2004).

이러한 중요성에 대한 인식으로 몇몇 연구자들에 의해 핵심적인 통계적 개념들의 제안이 이루어졌다. Bakker(2004)는 다섯 가지 주요한 통계적 개념으로 변이성(variability), 표본추출(sampling), 자료, 분포, 공변량

* 2005년 8월 투고, 2005년 8월 심사 완료.
* ZDM분류 : K10
* MSC2000분류 : 97C50
* 주제어 : 통계학, 개념, 교육과정.

을, Garfield & Ben-Zvi(2004)는 Friel(in press)의 제안을 토대로 통계학의 핵심적인 "중요한 아이디어(big ideas)"로써 자료, 분포, 경향성(trend), 변이성, 모형(model), 연합(association), 표본과 표본추출, 추론(inference)을 제안하였다. 또한 통계적 개념이 통계적 추론의 주요 대상이 된다는 관점에서 Garfield(2002)는 통계적 추론의 기초로 분포, 중심, 퍼짐, 연합, 불확실성, 무작위성, 표본추출을 제시하고 있다.

본 연구에서는 통계교육에서 핵심적인 통계적 개념을 무엇으로 볼 것인가에 대하여 선행연구들이 제안한 것들(예를 들어, Bakker, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2004; Garfield, 2002)을 기초로 분포, 요약, 표본개념의 세 가지를 제안하고자 한다. 여기서 사용한 "통계적 개념"이라는 용어는 Garfield & Ben-Zvi(2004)가 사용한 통계적 추론의 대상이 되는 "중요한 아이디어(big ideas)"라는 용어적 의미를 내포하는 것으로써 다양한 개별적 통계 개념과 기술들을 다시 범주화 한 상위개념이라고 할 수 있다.

기존의 다른 연구들이 언급하듯 기존에 제시된 통계적 개념들은 서로 겹쳐지면서 여러 가지 통계 개념들을 포괄(overarching)한다. 그러나 제시된 위의 세 개념은 통계학 내용 영역에 더 밀접하고, 교수학습을 고려할 때 더 발달적이고 가능성과 무작위성, 표집, 대표값, 분포의 표현등과 같이 낱낱의 통계적 개념의 발달을 다룬 연구들은 몇몇 존재하지만, 본 연구에서 제시하는 통계적 개념의 발달을 다룬 연구는 존재하지 않기 때문에 발달가능성에 관한 정당화는 후속연구로 제한한다. 다만 선행연구들을 통해 발달가능성의 존재를 추측할 수 있기 때문에 그 범위 안에서 세 가지 통계적 개념을 나누었다., 설정된 각 개념들은 상호 배타적이면서 모든 통계적 개념들을 포괄할 수 있어야 한다는 원칙에서 도출된 것이다. 즉, 예를 들어, 표집분포라는 통계적 개념은 분포, 요약개념이 충분히 발달한 후, 고도의 표본개념과의 연계로 이루어진 복합적 개념이다.

본 연구는 세 가지 통계적 개념이 무엇인가를 분명히 하려는 연구목적 하에, 세부 연구내용으로서 먼저 통계학의 주요한 절차인 자료수집과 자료분석 과정에서 이 세 가지 통계적 개념이 어떻게 핵심적 구조를 이루며 관련이 되는지를 보는 것이다. 이를 통해 세 가지 통계적 개념의 정의와 하위속성 또는 개념에 대한 고찰을 한다. 마지막으로 현행 수학교육과정에서다루어지고 있는 내용들이 세 가지 통계적 개념과 어떻게 관련되는지를 봄으로써 그 시사점을 찾아본다.

II. 자료처리과정과 통계적 개념

통계학은 기본적으로 자료수집과 자료분석의 두 부분으로 나뉘고 자료분석은 자료의 기술에 관한 기술통계, 자료로부터 모집단의 특성을 추정 및 검정하는 통계추론(statistical inferences)으로 나뉜다(이외숙 외., 2002). 이와 같은 커다란 구조에는 변함이 없지만, 형식적인 통계교육에 대한 비판과 반성이 일어나면서 새로운 철학이 반영된 통계교육이 주장되기 시작했다.

대표적인 것이 1977년 John W. Tukey가 주장한 탐색적 자료분석(EDA)으로써 이것은 통계추론에서 이루어지는 본 분석에 앞서 이루어지는 사전분석의 성격을 가지고 여러 나라의 교육과정(예. 미국, 네델란드, 호주, 뉴질랜드 등)에 반영되어왔다. 특히, 탐색적 자료분석의 출현은 전통적인 통계 교육과정과 지도방법에 적지 않은 변화를 요구하고 있으며 전통적인 기술통계의 내용을 탐색적 자료분석 방법으로 대체하여 실제적인 자료분석을 다룰 것을 요구하고 있다(우정호, 2000). 이 절에서는 앞서 제안한 통계적 개념이 통계학의 내용과 어떻게 밀접하게 관련되는지를 자료수집과 자료분석의 과정 속에서 살펴보고자 한다.

1. 자료수집과 통계적 개념

자료수집이나Moore(1990), Cobb & Moore(1997)가 언급한 자료산출(data production) 과정은 어떤 문제상황에 대하여 알고자 하는 것이 진술될 때 이에 답하기 위한 적절한 자료가 필요로 될 때 일어나게 되는 과정이다. 이때 우리는 원하는 모든 자료를 다 얻거나 관찰할 수도 있지만 실질적으로 여러 가지 조건에 의하여 불가능하게 될 수도 있다. 따라서 모집단 전체가 아닌 그 일부를 수집하거나 관찰할 수 있게 된다. 그러므로 모집단의 특성을 잘 대표하는 자료를 수집하여야만 자료분석에서 의사결정에 적절한 정보를 얻을 수 있으므로 자료수집은 매우 중요하다(우정호, 2000). 그렇기 때문에 이러한 자료수집과정의 핵심적 개념은 표본이라고 할 수 있다.

2. 자료분석과 통계적 개념

자료분석은 특정한 모집단을 대상으로 수집된 자료에 적절한 통계적 분석 방법을 적용하여 모집단에 대한 의사결정에 사용되는 정보를 생산하는 과정이다(우정호, 2000). 여기에서는 크게 EDA를 포함한 기술통계의 입장과 추리통계의 입장으로 나누어 보고자 한다.

(1) 기술통계와 통계적 개념

자료의 기술, 즉 자료의 정리 및 요약이 중점적인 목표가 되는 경우는 모집단 전체를 조사할 수 있는 경우이고, 자료를 통한 통계추론이 중점적인 목표가 되는 경우는 표본추출이 필요한 경우이다. 기술통계에서는 표본개념을 다루지 않고, 수집된 자료의 분류, 요약 정리에 적용된다(이외숙 외., 2002).

먼저 기술통계학에서 다루어지는 각종 도표(표, 원그래프, 띠그래프, 막대그래프, 히스토그램, 줄기와 잎 그림)는 자료의 속성에 따른 범주화와 자료의 분포 상태 파악에 목표를 두고 있다. 예를 들어, 보고자 하는 것에 따라 수집된 자료를 목적에 알맞게 범주화 하는(분류하는) 활동이 먼저 이루어지는 데, 이것은 요약의 초기단계라고 할 수 있다.

이렇게 분류된 자료가 다양한 시각적 표현으로 나타내어지는 것은 자료의 분포 형태를 더 쉽게 파악하고 해석하는 것에 목적을 두고 있는 것이다. 따라서 이것은 분포 개념과 관련된 것이라고 할 수 있다.

그리고 이런 자료의 분포상태와 같은 정보를 총체적인 입장에서 요약을 한 것이 자료의 중심에 관한 척도들과 자료의 퍼짐에 관한 척도들이다. 즉, 자료의 중심이나 퍼짐에 관한 척도들을 목적에 알맞게 구할 수 있는 것은 다시 요약 개념과 관련된 것이다.

Cobb & Moore(1997)이 언급하고 있는 자료분석은 John Tukey의 탐색적 자료분석 철학과 부합된 더 수치적이고 더 정교한 현대적 의미의 기술통계학이다. 이것은 자료가 모집단을 대표하는지에 관하여 처음부터 특별하게 고려하기보다는 자료에서 패턴을 관찰하는, 소위 자료가 무엇을 말하는가를 받아들이는 것을 목적으로 한다. 따라서 탐색적 자료분석에서는 자료의 표현을 바꾸고, 다양한 표현을 사용하여 자료의 구조를 쉽게 탐색하는 것을 강조하게 된다.

그렇다면 탐색적 자료분석 과정에 있어서 다양한 그래프적 표현을 다루고 탐색하는 본질적 대상은 무엇인가? Moore(1990)는 자료에 관하여 학습할 때 단일 변량의 분포를 표현하는 것으로부터 시작하도록 주장한다. 즉, 자료분석 과정에서 자료를 표현하는 방법들은 분포의 표현과 관련된 것으로 볼 수 있다. 따라서 이러한 입장에서 본다면 표현법 익히기를 포함하는 활동이더라도 탐색적 자료분석 과정에서 다루어지는 다양한 그래픽 표현들을 탐구하는주요 목적은 분포 개념과 관련된 고찰이라고 할 수 있다.

또한 Moore(1990)는 자료 집합의 분석과 자료에 관한 교수에 있어서 분포의 총체적인 패턴을 중심경향성의 측도나 퍼짐의 측도와 같이 수치적인 측도로 요약하는 것을 원칙으로 내세우고 있다. 따라서 탐색적 자료분석에서도 분포, 요약개념이 주가 되고 있음을 알 수 있다.

지금까지 논의된 것들을 바탕으로 기술통계학에서 이루어지는 자료처리의 과정이 어떤 통계적 개념을 목적으로 관련되는가를 나타내면 <그림1>과 같다.

자료수집---->분류---->도표---->자료의 중심, 퍼짐에 관한 측도 구하기

요약 분포 요약

<그림 1> 자료처리과정과 관련된 통계적 개념

(2) 추리통계와 통계적 개념

모집단에서 랜덤표본을 추출하여 자료가 수집된 후, 통계자료분석의 가장 중요한 목적은 표본자료에 함축된 정보로 모집단의 특성을 찾아내는 것이다(이외숙 외., 2002). 이런 분석과정을 통틀어 통계추론이라 하고, 이와 같이 어떤 특성을 요약하고 요약된 통계량을 기준으로 모집단의 분포를 통해 살펴보고 그 결과에 대한 일반화를 하는 것을 통계적 추론방법이라고 한다.

통계적 추론방법으로 크게 두 가지로 나뉠 수 있는데 하나는 모수적 방법이고 다른 하나는 비모수적 방법이다. 각각의 경우에 대해 알아보고 두 방법 간의 공통점과 차이점을 알아봄으로써 통계적 개념과의 관련성을 생각해보기로 한다.

가. 모수적 방법

통계학의 목표는 표본에 담긴 정보에 기초한 모집단

에 관하여 추론하는 것이다(Mendenhall et al., 1990). 이러한 통계적 추론에서 두 가지 중요한 문제들은 추정 과 가설 검정이다.

먼저 추정의 문제는 다음과 같이 개괄적으로 정의된다. 모집단에서 요인들의 몇 가지 특성이 밀도가 $f_X(\cdot;\theta)=f(\cdot;\theta)$ 인 확률변수 X 에 의해 표현되어질 수 있는데, 여기서 밀도의 형태는 미지의 모수 θ 를 포함한다는 것을 제외하고 아는 것으로 가정한다(만약 θ 를 안다면 밀도 함수는 완전하게 설명되어질 것이고 그것에 관해 추론을 할 필요도 전혀 없다). 더 나아가 $f(\cdot;\theta)$ 로부터 확률변수 $X_1, X_2, , X_n$ 의 값들 $x_1, x_2, , x_n$ 이 관찰되어질 수 있다는 것을 가정한다. 관찰된 표본 값들 $x_1, x_2, , x_n$ 에 기초하여 미지의 모수 θ 의 값 또는 미지의 모수에 관한 어떤 함수의 값 $\tau(\theta)$ 을 추정하는 것을 기대한다(Mood et al., 1974).

이 추정은 점 추정과 구간 추정 두 가지로 나뉠 수 있는데, 점 추정은 어떤 통계량 값 $t(X_1,\ldots,X_n)$ 이 미지수 $\tau(\theta)$ 를 나타내거나 추정하도록 하는 것으로 이와 같은 통계량 $t(X_1,\ldots,X_n)$ 을 점 추정량이라고 부른다. 두 번째로 구간 추정은 두 개의 통계량 $t_1(X_1,\ldots,X_n)$ 과 $t_2(X_1,\ldots,X_n)$ 를 정의하는데, $t_1(X_1,\ldots,X_n) < t_2(X_1,\ldots,X_n)$ 이고 $(t_1(X_1,\ldots,X_n), t_2(X_1,\ldots,X_n))$ 은 미지수 $\tau(\theta)$ 를 포함하는 확률이 결정되어질 수 있는 하나의 구간을 구성한다.

예를 들어, $f(\cdot;\theta)$ 가 정규 밀도이고, 다시 말해

$$f(x;\theta)=f(x;\mu,\sigma)=\phi_{\mu,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

이고 평균, 즉, $\tau(\theta)=\mu$ 임을 예측하길 기대한다면, 통계량 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 은 $\tau(\theta)=\mu$ 의 가능한 점 추정량이 되고, $\left(\bar{X}-2\sqrt{\frac{S^2}{n}},\ \bar{X}+2\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right)$ 은 $\tau(\theta)=\mu$ 의 가능한 구간 추정량이 된다.

단, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

이러한 점 추정은 두 가지 문제를 가능하게 하는 데, 통계량을 얻기 위한 수단을 고안하여 추정량으로써 사용한다는 것과 규준과 기술을 선택하기 위해 많은 가능한 추정량들 중에서 "가장 적절한(best)" 추정량을 정의하고 찾는 것이다. 점 추정량들을 찾는 몇 가지 방법들 중 하나는 아마도 가장 중요한 방법인 최대우도추정법일 것이다(Mood et al., 1974).

나. 비모수적 방법

비모수적 방법은 모수적 방법이 아닌 모든 방법을 말한다. 모집단의 누적 분포함수 $F(x)$ 에 대해 아무것도 가정하지 않거나 연속이거나 연속이고 대칭이라는 것만을 가정한다. 이것은 모집단에 대한 가정을 특수한 분포함수의 모수형으로 하지 않는다는 것을 뜻하는 것으로, 분포무관법(distribution-free method)과 비슷하게 쓰이고 있는 데 이것은 가설검정 하에서 검정통계량이 모집단의 분포함수와 거의 무관하다는 것을 뜻한다(김우철 외., 1991). 여기서 모집단 분포 $F(x)$ 의 중앙값 θ 에 관한 추론을 하는 경우 "중앙값 θ"는 모수이기 때문에 비모수적이라는 표현은 적절치 않고 "분포무관법"이 더 적절한 표현이라고 주장되기도 하는 것이다.

용어적 논의와는 무관하게 비모수적방법의 중요한 특징은 모수의 사용여부에 있는 것이 아니라 모집단의 분포를 어떤 류(class)로 한정했느냐의 여부에 있다. 그리고 방법의 절차상의 특징은 분포를 특정 유형으로 가정하지 않고도 할 수 있는 추론을 사용한다는 점이다. 예를 들어, "중앙값 θ"를 가정하면 특정 표본값 X 가 θ 이상일 확률 $p(X \geq \theta)=\frac{1}{2}$ 이며 이는 분포함수 $F(x)$ 와 무관하다. 이런 이유로 비모수적 방법에서 가장 널리 사용되는 것은 순서통계량이다. 이것은 주어진

자료 $X_1, X_2, , X_n$을 크기 순서대로 나열한 $Y_1 < < Y_n$을 말하는데 이들이 특정값을 가질 확률은 $F(x)$에 의존하지만 이들의 상호관계는 그렇지 않을 수도 있다는 데 근거한다. 이와 같이 비모수적 통계적 방법들은 확률 분포 또는 추리적 문제에 포함된 모수의 본질에 관한 꽤 일반적인 가정 하에서 잘 이용된다(Mendenhall et al., 1990)

모수적 방법은 분포를 알고 있는 경우에 사용되는 방법이고, 비모수적 방법은 분포를 가정하지 않거나 아주 약하게 가정하고 있는 경우에 사용되는 통계적 예측과 가설검정의 방법들임을 살펴보았다. 다음으로 이 두 방법 간의 공통점과 차이점을 통계적 개념의 관점으로 살펴보기로 한다.

다. 모수적 방법과 비모수적 방법의 공통점과 차이점

통계적 자료분석의 필수적 특성은 자료 집합의 총체적 형태를 설명하고 예측하는 것이다(Bakker & Gravemeijer, 2004). 다시 말해개별 사례 하나하나로 볼 때는 예측할 수 없는 우연현상을 총체적으로 파악하려는 방법이며, 이를 위해 총체(*aggregate*)의 범주별 빈도를 토대로 전체의 분포를 분석하려는 것이다.

결국 모수적 방법과 비모수적 방법의 공통점 중 하나는 분포의 분석이 통계적 추론방법의 핵심으로써, 이것의 기본적 개념이 분포 개념이라는 것이다. 물론 비모수적 방법에 있어서도 이 방법이 분포를 가정하지 않는 것처럼 보이지만, 앞서 논의된 것처럼 아주 약하게 가정하거나 가설검정의 과정에서 확률이 1/2라는 것을 사용하고 있는 것은 결국 분포를 가정하고 있다는 것을 보여주고 있는 것이다.

두 번째로, 분포의 분석에서 분포의 서술적 특성, 예를 들면 값들은 대개 어느 정도의 크기의 값들인가와 같은 특성의 정량적 표현에서 요약 개념이 필요로 된다. 즉, 서술의 정량화 개념으로써 요약 개념이 필수적 개념으로 또 하나의 토대가 되는 것이다. 예를 들어 모수적 방법에서 모집단의 분포와 관련된 모집단의 특성의 정량화로써 $\tau(\theta)$와 같은 것을 예로 들 수 있다. 모집단의 평균을 추정하는 경우라면 이것은 모집단 평균 μ가 될 것이다. 이와 비교할 때 비모수적 방법에서는 관심특성 자체가 요약 개념이다. 예를 들어, 두 모집단을 비교할 때 위치모수 θ가 모집단의 분포에 대해서 모수처럼 사용되는데 이것은 분포 자체를 설명해주는 것이 아니라 단지 관심특성이 될 뿐이다. 물론 분포를 알고 있다면 이것이 평균, 중앙값, 최빈값과 같은 위치측도가 될 수도 있다.

세 번째로, 모수적 방법이든 비모수적 방법이든 분포의 분석 결과에 대한 일반화의 단계를 거치게 된다. 이 과정에서 가장 흔히 사용되는 표본에 의한 추론을 할 때 표본 개념이 필요로 되며, 귀납 추론의 오류 가능성 문제를 극복하기 위한 여러 방법들, 즉 확률 분포에 의한 추론이 요구된다. 결과적으로 추리통계에 있어서 대표적인 통계적 추론방법인모수적 방법과 비모수적 방법 양쪽 모두에 있어서 공통적으로 분포, 요약, 표본 개념은 통계적 추론방법의 구조를 만드는 중요한 개념이 되고 있음을 알 수 있다.

반면 모수적 방법과 비모수적 방법의 차이점은 모집단의 분포의 유형을 정하고 출발하느냐 아니냐 이다. 모수적 방법의 경우에는 모집단의 분포를 아는 것으로 가정하고 시작을 하지만, 비모수적 방법의 경우에는 모집단의 분포를 가정하지 않거나 약하게 가정하고 있다. 그러나 앞서 살펴본 것처럼 모집단의 분포를 가정하지 않는다고 해서 분포 개념이 쓰이지 않는 것은 아니다.

이와 같이 모수적 방법과 비모수적 방법의 차이점이 존재함과 상관없이, 두 방법에 있어서 핵심이 되는 통계적 개념은 크게 분포, 요약, 표본 개념임을 알 수 있었다. 통계학의 내용에 있어서 주축을 이루고 있는 세 가지 통계적 개념들에 대한 것을 살펴보았는데, 구체적으로 이 세 가지 통계적 개념들은 어떻게 정의되고, 어떤 특성을 가지고 있는지를 알아보기로 한다.

III. 세 가지 통계적 개념

1. 분포 개념

분포의 사전 상의 의미는 한 변수의 변량의 패턴, 한 변수의 모든 가능한 수치적 값들과 어떻게 각 값이 발생하였는지를 기록하는 것, 관찰했거나 이론적인 분류상의 발생의 빈도수를 보여주는 하나의 정렬이다(Oxford Dictionary, 2005). 다시 말해, 분포란 여러 가지 사회 현

상, 자연 현상 속에서 발현되는 사물의 속성이 다양할 때 그 다양한 속성 각각의 빈도를 생각하는 개념이다. 이것은 Bakker(2004)가 제시하는 분포와 Garfield(2002)가 제시하고 있는 분포 개념, 연합 개념과 맥을 같이 한다고 볼 수 있는데 이 중 연합은 두 분포간의 결합이라는 입장에서 또는 그 자체로 이차원 분포의 문제라는 입장에서 분포 개념의 일부로 본다.

분포는 통계학에서 다른 개념들과 연관된 가장 중요한 개념으로(Bethlehem & De Gooijer, 2000; Bakker, 2004), 변이성에서 패턴을 파악하도록 개념적 구조를 조직하고 총체로써 자료 집합을 볼 수 있게 한다(Bakker, 2004). 그러나 강력하고 포괄적인 개념일수록 그 개념에 대한 이해는 용이하지 않듯 분포 개념도 마찬가지이다. 다시 말해 분포는 도수 분포로부터 확률 분포 함수에 이르기까지 많은 측면과 가능한 이해의 서로 다른 층을 가지고 있는 복잡한 개념이기 때문에, 학생들이 가지고 있고 발달시킬 수 있는 분포의 서로 다른 개념들을 얻어내야만 할 필요가 있다(Bakker, 2004).

어떤 특정한 상황에 대하여 그것이 어느 정도의 빈도를 차지하는가에 대한 판단은 초기에는 경험에 의존된 것이라고 볼 수 있다. 이것은 분포 개념의 첫번째 하위개념인 빈도 개념으로써 어떤 사건에 대한 가능성의 크기 개념이라고 볼 수 있다. 예를 들어 "참새는 많고 호랑이는 드물다", "넓은 공간보다 좁은 공간에서 잃어버린 물건을 찾기가 쉽다" 등은 학습자들이 실생활 속에서 접하는 많은 경험에 의해 누적된 빈도로써 판단하는 결과라고 할 수 있다.(참새는 많고 호랑이는 적다라는 것은 생물 교과의 지식일 수 있다. 분포 개념은 지식 자체보다는 그와 같은 판단에 이르는 방법론적 근거가 되는 개념이며 이런 접근이 통계적 개념에 대한 인식론적 기초가 되는 것이다.) 나아가 경험적으로 친숙하지 않은 상황에 대해서는 자료수집을 통해 자료에 근거한 판단을 하게 될 것이다. 이것이 분포 개념의 발달 모습이다.

한편 경험에 의해 누적된 빈도로부터 벗어나, 주어진 자료의 분포 상태 특히 상대도수에 근거하여 확률 비교, 판단, 예측을 하는 것이 일어난다. 이것이 분포 개념의 두 번째 하위개념이라고 할 수 있는 확률적 분포 개념이다. Cobb & Moore(1997)는 통계학에서의 확률의 역할에 대해 다음과 같이 언급하고 있다:

"확률은 무작위 현상에서 우연 변이성을 설명한다. 우연 기제mechanism가 자료를 산출하기 위해 명백하게 사용되었을 때, 확률은 똑 같은 설정에서 똑 같은 모집단 또는 반복된 실험들로부터 반복된 표본들을 보는 것을 기대하는 변량을 설명한다. 다시 말해, 확률은 질문 "무수히 많이 하면 무슨 일이 생길까?"에 답을 한다. 표준 통계적 추론은 확률에 기반을 둔다. 결론에서 우리가 어떻게 신뢰하는 가에 관한 지시와 함께 자료로부터 결론을 준다. 신뢰에 관한 진술은 "우리가 이 추론 방법을 무수히 많이 사용한다면 무슨 일이 일어날까?"를 묻는 것에 기초한다. 이것이 확률이 대답해 줄 수 있는 것이다. 통계적 방법에서 확률의 언어로 표현된 신뢰의 지시는 탐색적 자료분석과 같은 것에 기초한 비형식적 결론으로부터 형식적 추론을 구별하게 하는 것이다."

통계학이 수학과 확률을 사용하는 학문이더라도 확률은 실질적으로 수학의 한 분야이다. 그런데 초기 통계교육의 대부분은 확률의 교수학습에 초점을 맞춰왔다는 반성에 의해 최근 연구들의 흐름은 자료와 자료분석에 관한 추론과 사고에 초점을 맞춰오고 있다(Ben-Zvi & Garfield, 2004).

실질적으로 교수학적 측면에서 확률개념에 대한 어떤 개념적 접근이 필요한가에 있어서는 많은 견해가 있고 실질적으로 통계교육에서 확률 개념을 가르칠 때 통계적 확률과 수학적 확률 모두를 다룬다. 그러나 본 연구에서는 수학적 확률이 통계학의 높은 수준에서 사용되더라도 이것은 수학의 한 분야를 통계에서 사용하는 것으로 보고 논의 대상에서 제외하기로 한다. 여기서 논하는 확률적 분포개념은 주어진 자료의 분포 상태를 특히 상대도수에 근거하여 (통계적) 확률 비교, 판단, 예측을 하는 것을 의미한다. 단일 분포에서의 범주간의 통합 또는 상대도수의 비교에 의한 확률적 판단을 함에 있어서 비례개념이 수반될 것이다.

일변량 분포로부터 이변량 분포가 처음으로 다루어지기 시작하는 것은 상관 개념을 통해서이다. 현상 A가 나타나면 현상 B가 자주 일어나거나 그렇지 않은 관계에서 통계적 의미의 상관 개념이 등장한다. 즉, 상관은 이변량 결합(확률)분포와 관련된 것으로, 상관계수는 표준화된 변수들의 동일성(identity)에 대한 근접성(closeness)의 하나의 척도로 해석되어질 수도 있다

(Falk & Well, 1997).

통계학에서는 수치형 자료의 경우 결합분포를 통해 조건부 기대값으로 두 변량의 변화하는 방향관계와 단위까지 고려된 상관계수를 구할 수 있다. 이때 높은 상관은 두 변량의 강한 선형적 관계성을 나타낸다(Hawkins et al., 1992). 분할표를 통한 상관은 실질적으로 확률적 상관으로써 주어진 결합분포를 확률을 이용하여 결합확률분포로 바꾸어 조건부 확률(상대도수) 분포를 통해 상관을 판단하는 것이다.

또한 상관은 사건의 독립성과 관련이 되는데, 두 사건 A와 B에 대한 수학적 관계 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$는 사건 A와 B의 독립성을 뜻하는 것이다. 즉, "A 이거나 A가 아니거나(A^C)에 관계없이 B와 B^C의 상대적 빈도가 항상 일정하면 A의 발생여부와 무관하게 B는 일정한 비율로 출현할 확률이 있다."라고 할 수 있다.

이와 같이 확률을 필요로 하는 확률적 상관과는 달리 관찰하고 있는 어떤 현상을 측정한 결과들의 속성이 범주형 자료가 아니라 이산 또는 연속변수인 경우에는 다른 의미의 상관이 전개된다. 그것은 두 변량간의 선형적 관계성을 살펴보는 함수적 상관인데 여기서 관찰점들을 산점도-일반적으로 현행 중·고등학교 교과서에서는 이것을 상관도라고 부른다-라는 그래프를 그려봄으로써 일차적으로 살펴보게 된다. 더 나아가 독립변수 (또는 설명변수)의 값이 오차없이 측정되고 실험자에 의해 조절될 수 있다는 전제 하에 임의로 고정된 독립변수의 값에 주어진 자료를 이용하여 종속변수 (또는 반응변수)의 예측을 함으로써 독립변수의 영향력을 결정하기도 한다(이외숙 외., 2002). 이것이 바로 회귀와 관련된 것으로 분포적 가정의 견지에서 보면 주어진 독립변수의 값에 관한 종속변수 상에서의 단일변량(univariate) 형태로 조건부분포를 관찰하는 것이다(Hawkins et al., 1992).

결국 상관은 조건부 분포의 비교의 문제이며, 따라서 상관 역시 분포 개념의 일부가 된다.

2. 요약 개념

범주란 사람들이 동일 유목에 함께 속한다고 생각하는 사물들의 유목을 지칭하며 범주화란사람들이 사물이나 사건들을 범주로 할당하는 과정을 말한다. 일반적으로 개념이 지식표상의 기본단위로써 수많은 경험 자극에 직면했을 때 이런 경험들을 의미있고 심리적으로 대처가능한 단위로 분할하는 것이 일차적 과제이다. 즉, 범주화는 개념이 가지고 있는 일차적인 기능으로 입력자극이 기억에 저장된 개념과 연계되는 초기 지각단계에서부터 시작된다(신현정, 2000).

또한 범주 항목이 복잡해질 때는 일차적 범주만으로는 안되고 범주와 범주의 결합(곱의 형태)을 가능하게 하는 조합논리가 필요로 된다. 따라서 범주화는 경험에 의한 자연적 범주화와 조합논리에 의한 확률적 범주화로 나뉠 수 있다.

물론 교육과정 상에서는 자료가 이미 범주화가 된 상태로 제시되어 분포를 관찰하는 것을 목적으로 하는 경우가 대부분이지만, 실생활에서 존재하는 것들은 이런 범주화부터 스스로 해나가야 한다. 이와 같이 생활 속의 상황, 사물, 익숙한 자료 등을 범주화하고(분류하고) 사건의 줄거리를 이해하는 것은 요약 그 자체이자 요약을 목적으로 하는 것이라 할 수 있다.

요약은 통계적 요약(statistical summary)의 주제로써 기술통계의 도입으로부터 다루어진다. 측정형 자료의 경우에는 도수분포표로부터 자료의 특성을 파악할 수도 있지만 측정값들을 객관적으로 대표할 수 있는 측도들을 많이 사용하게 된다. 주로 주어진 자료가 어떤 값을 중심으로 분포되어 있는가를 나타내는 위치특성을 나타내는 측도와 각 대표값을 중심으로 자료들이 산포되어있는 정도를 나타내주는 측도가 많이 이용되고 있다(김우철 외., 1992).

위치 측도로서 많이 사용되는 측도로는 평균, 중앙값, 최빈값이 있고 이들을 통틀어 대표값 또는 중심경향값이라고 부른다. 그런데 대표값은 오랫동안 산술평균과 동의어이었고 20세기 중반까지도 평균은 여전히 수학교과서에서논의된 중심경향성의 측도였다(Watson & Moritz, 2000). 그러나 이후 중앙값이나 최빈값과 함께 중심경향성의 세 가지 측도로써 다루어지고 있고 산포에 관한 측도로 많이 사용되는 것은 분산과 표준 편차이다. 이러한 값들은 자료의 중심경향성이나 퍼짐의 정도를 수치로 요약하는 것에 목적을 두고 있다. 이러한 요약은 자료의 총제적 특성을 대표하는 것으로 보여질 뿐만 아니라 다

른 자료들과의 비교를 위해 사용되기도 한다.

이변량 자료의 초기 관찰은 상관과 회귀의 문제로 귀착된다. 이변량 자료에서 주로 다루어지는 관찰의 목적은 두 변량간의 관계성과 관련된다(Batanero et al., 1994). 이변량 분포를 관찰하는 가장 기본적인 그래프는 산점도로써 가장 단순한 총체적 패턴이 선형적 경향성이다(Moore, 1990). 이러한 선형적 경향성은 방정식의형태로 요약이 되고, 선형적 연합의 강도에 대한 요약은 상관계수와 같은 수치적 측도로써 요약이 된다. 높은 상관은 X, Y 사이의 강한 선형적 관계성을 나타내고 이것을 기초로 X 에 관한 Y 의(또는 Y 에 관한 X 의) 회귀를 전개할 수 있다. 다만 상관과 회귀의 근본적 차이는 회귀는 예측적 모델링의 본질을 반영하고 있다는 것이다(Hawkins et al., 1992). 분포적 가정의 견지에서 볼 때 주어진 독립변수(또는 모델에서 오차 구성요소 상에서)의 값에 관한 반응변수(종속변수) Y 상에서 단일변량(univariate) 분포를 관찰하는 것이 회귀라고 할 수 있는데 (Hawkins et al., 1992), 이때 두 변량 간의 통계적 관계를 방정식의 형태로 요약한 것이 회귀모형이다.

즉, 종속변수 Y 의 값은 독립변수의 값인 X 에 의해 체계적으로 결정되는 부분인 $f(X)$ 와 설명할 수 없는 부분인 오차 ε 의 합 $Y = f(X) + \varepsilon$ 으로 표시하고 오차 ε 은 확률변수로 생각하여 관찰점의 $f(X)$ 둘레의 분포를 설명한다(이외숙 외., 2002). 앞서 언급된 것처럼 회귀모형의 가장 단순한 형태는 $f(X)$ 가 선형적 경향성을 지닌 일차함수로 가정된다. 일반적으로 비선형 회귀함수의 경우에 통계적인 분석이 어렵지만 어떤 경우에는 변수 X 또는 Y 를 변환해서 변환된 새로운 변수들의 관계가 직선에 가깝도록 하는 것이 가능하다. 이와 같은 것은 대학수준 이상에서 다루어지므로 본 연구에서는 자세하게 다루지 않으며 다만 여기서 $f(X)$ 는 모형에 의해 유도된 Y 에 대한 요약이라는 것이다.

이변량 자료의 관찰에 있어서 두 번째 문제는 상관인데, 두 변수 X, Y 간의 선형적 관계성의 크기 또는 강도를 요약한 것이 상관계수이다. 이때 두 변수가 모두 순위 또는 숫자 변수이라면 상관계수는 방향성과 단위가 모두 고려되고, 명목 변수인 경우에는 상호영향을 주고 받는 정도의 강도에 대한 측도로 방향성은 고려되지 않는 연합계수(association coefficient)의 측면이 된다. 이 상관계수는 사건의 독립성과도 관련이 되는 데 두 사건이 독립이라면 상관계수는 0이 되지만 그 역은 성립하지 않는다.

이와 같이, 통계적 요약이란 불확실한 상황에서 자료에 근거한 판단을 하기 위해 자료들을 숫자 또는 방정식으로 줄여서 나타내는 것을 말한다. 전체 자료를 줄여서 특정한 값 또는 방정식으로 나타내기 때문에 통계적 요약은 통계조사의 목적과 밀접한 관련이 된다. 자료 수집 이전에 내가 알고자 하는 목적을 분명히 하고 난 뒤 무엇을 측정할 것이며 어떻게 조사해야 하는가의 계획을 세우는 것이 필요로 된다. 자료 수집 후에 얻어진 자료로부터 무엇을 계산할 것이며, 이 자료 값들이 변이성을 가지고 있음에도 불구하고 서로 얼마나 비슷한지를 알기 위해서 무엇을 구해야 하는가가 고려되어야 한다.

이것은 그 계산(요약)이 왜 중요한지를 고려하는 것으로써 목적 타당성을 기준으로 판단되어야 하는 것이다. 이러한 요약의 핵심은 요약하려는 서술적 표현의 정량화와 관련된 것으로 어떻게 형성될 것이고 촉진될 것인가의 문제이다. 먼저 목적에 맞는 모수를 고찰하고 모수를 모르는 경우 표본에서 어떻게 볼 것인지, 오차변동가능성인 부분(우연변인)과 결정적인 부분을 분리시키고 결정적인 부분을 어떻게 요약할 것인가와 관련된 것이다.

3. 표본 개념

표본은 통계조사를 위하여 선택된 모집단의 일부로써 모집단의 단순한 하위집합으로써의 의미가 아니라 모집단의 의사(擬似)-비례적, 소규모 판(small-scale version)으로써의 포위 심상(*encompassing image*)이다(Saldanha & Thompson, 2002). 표본에 기초한 모집단의 표본추출과 통계적 추론의 쌍대 관념은 실생활의 많은 측면에서 예측과 의사결정을 할 때 근본적인 것으로(Australian Education Council, 1991), 분포에 대한 인식의 토대가 되며 통계학의 주요 이론적 아이디어이다(Bakker, 2004).

이와 같은 표본 개념은 몇 가지 속성을 지니게 된다. 첫 번째, 표본 개념은 우연과 필연의 구분으로부터 나온다. 예를 들어 어떤 한 가지 현상이 내가 경험한 몇 가지 경우들을 통한 결과로 판단하게 될 때 그것은 우연적으로 발생된 것일 수 있다. 그렇다면 이것이 우연한 상

황이 아니라 필연적이라는 확신은 어떻게 얻을 수 있는가? 이때 필요로 되는 것이 가급적 많은 경우들을 통해 경험을 하던지 경험할 수 없는 많은 상황들까지도 추측해야 할 필요가 생긴다. 실질적으로 모든 경우에 대한 경험을 한다는 것은 많은 측면에서 불가능하다.

따라서 여러 가지 제한 속에서 수집될 수 있는 몇 가지 자료 즉, 표본을 가지고 목표에 알맞게 전체를 추론해야만 하는 상황이 생기는 것이다. 이런 의미에서 표본 개념을 우연과 필연의 구분을 통한 상황 인식으로부터 출발한 것이라 보는 것이다. 예를 들면 중학교 3학년 학생 조차도 앞면의 확률이 1/2인 동전을 20번 던졌을 때, 정확히 10번 앞면이 나오지 않았다는 것에 고민하는 것을 종종 볼 수 있다. 다시 반성적으로 물으면 당연히 10번 나와야 될 이유가 없다는 것을 인정하면서도 말이다.

표본은 전체의 일부이고, 표본추출에서 불가피하게 수반되는 표본오차(sampling error)와 같은 변이성 때문에 모집단의 특성값을 그대로 재현하는 표본을 얻을 수 있다는 것은 비현실적이다(이외숙 외., 2002). 따라서 표본 개념이 포함하는 두 번째 속성은 부분이 전체를 대표하는 형태의 귀납추론에서 일반화의 오류 가능성에 대하여 인지하는 것이다. 이것은 귀납적 논증에 의하여 일반화된 명제가 전적으로 참이라고는 할 수 없지만 확률적으로는 참이라고 할 수 있다는 것을 의미한다(이경화, 1996). 예를 들어 "대부분 ~하다", "~할 확률이 ~이다"와 같은 과정을 거쳐 오류 가능성의 정량화 단계로 이르는 체계화 과정을 거치는 것을 의미한다. 이러한 일반화의 오류 가능성을 최대한 줄이기 위해서 고려되는 것이 표본추출에 있어서 무작위성과 표본의 크기이다.

표본추출과 관련되는 것이 표본 개념의 세 번째 속성이라고 할 수 있는데, Rubin et al.(1991)은 표본추출과 통계적 추론을 응집성 있게 이해하는 것은 표본 대표성의 아이디어와 분포에 관해 추론하기 위한 표본추출 변이성을 통합하는 것을 수반한다고 주장하였다.

통계학에서 변이성의 중심적 역할에도 불구하고, 표본추출 변이성에 관한 학생들의 이해와 통계 교수에서 핵심적으로 조직화된 아이디어로써 변이성의 역할에 관한 이해는 거의 연구의 주목을 받지 않아왔다 (Shaughnessy et al., 1999). 변이성은 표본이 모두 동일한 것이 아니고 표본이 선택되어 온 모집단과 모두 닮은 것도 아니라는 것을 말해준다(Batanero et al., 1994). 따라서 이러한 변이성에 대한 인식은 표본추출에 있어서 무작위성을 고려해야 함을 필요로 한다.

무작위성(randomness)에 대한 이해는 반복되는 표본 추출에서 얻어지는 자료의 변이성에도 불구하고 전체적 특성(분포, 위치 등)은 개연적으로 유사하다는 것을 이해하는 것이다. 또한 이것이 무작위 추출에 의한 것임을 이해하는 것을 의미하기도 한다. Falk(1981)는 무작위성을 인식하고 구성하는 것이 학습자들에게 빈약하다는 것을 주장하고 있다. 그러나 다른 측면에서 본다면 무작위 추출이라는 것은 독립적 표본을 얻는 "과정"이지 "결과"가 아니기 때문에, 기존 연구들에서처럼 결과를 보고 무작위성을 판단하는 과제 예를 들어, Falk(1981)가 사용한 과제는 다음과 같다: 21개의 초록색(G)과 노란색(Y) 카드의 연속을 중등 학생들에게 보여주고 섞인 카드들이 얼마나 랜덤한가를 결정하도록 질문하였다. 다음 연속들의 각각이 얼마나 랜덤하게 나오는가?

YYYGGYYGGYYYGGGGGYYYGYGYGYGYYGY GYYGYGGYGG로는 무작위성을 학습자들이 이해했는가를 논하는데 한계가 있을 수 있다. 이와 같이 무작위성은 "독립성"과 "동일분포"의 복합 개념으로서 모두 분포 개념과도 관련되는 것이기 때문에 어느 정도 분포개념이 발달한 후에 이해 가능한 표본 개념의 속성이라 할 수 있다.

표본 대표성은 표본을 선택하는 과정이 적당하게 실행되어졌을 때 표본은 모집단의 특성과 유사한 특성들을 자주 가지게 된다는 것을 의미한다(Batanero et al., 1994). 그러나 이런 표본 대표성과 관련하여 사람들이 가지는 오개념은 표본의 크기를 무시하고 모집단에 근접하게 닮았는가에 기초하여 표본의 가능성(likelihood)을 예측한다는 것이다. 이것은 무작위성과도 관련되는 것으로써 예를 들어 앞면과 뒷면이 똑같이 나오는 동전 던지기의 표본은 앞면이 더 많고 뒷면이 더 적게 나온 표본보다 훨씬 더 쉽게 일어난다고 판단한다(Kahneman, Slovic, & Tversky, 1982). 그러나 실제는 이 표본들은 확률적으로 그 반대이거나 같은 가능성을 가진 것들이다. 표본이 모집단의 특성을 잘 반영하기 위해서는 가능한 사건들이 골고루 반복해서 나와야 하는 것(결과)이 아니라, 반복추출에 의한 표본추출의 "과정"에 있어서 무작위

추출이 이루어져야 한다는 것을 의미하는 것이다.

세 가지 통계적 개념을 정립하기 위한 원칙으로써 각 개념들이 상호배타적이지만 통계학에서의 다른 개념들을 포괄할 수 있어야 함을 앞서 언급하였다. 예를 들어, 표집분포의 개념은 실질적으로 분포, 요약, 표본의 세 가지 개념들로 이루어진 것이라 볼 수 있다. 지금까지 여러 학자들이 제안한 통계적 개념들을 본 연구에서의 원칙 하에서 세 가지로 제안을 하고 그 정의와 그 특성에 관하여 살펴보았다. 이에 기준 할 때 현행 교육과정에서는 이 세 가지 핵심적인 통계적 개념들이 어떻게 다루어지고 있는지를 살펴보고자 한다.

IV. 학교수학에서의 통계적 개념

현행 제 7차 교육 과정에서 확률과 통계는 1단계부터 10단계까지 <표 1>과 같이 구성되어 있다. 각 단계별 내용에 맞게 구성된 7차 교과서와 교사용 지도서를 중심으로 어떤 통계적 개념이 다루어지고 있는지를 분석하였다. 교과서에서는 활동내용을 중심으로 각 활동에서 사용되는 질문 등을 중점적으로 분석하였고 교사용 지도서에서는 각 활동을 어떻게 지도하는지에 관하여 서술된 내용들을 중심으로 분석을 하였다. 그 결과로 얻어진 각 단계에서 다루어진 주제들이 어떤 통계적 개념과 관련되는지를 <표 1>로 제시한다.

1-가: 분류하여 세어 보기는 통계학의 가장 기본이 되는 것으로써 자료를 수집하고 정리하는 이유를 알게 함을 목적으로 하고 있다(교육인적자원부, 2000). 자료를 속성에 따라 분류하는 것은 요약 개념과 관련되고, 분류된 각 속성에 해당되는 자료의 빈도를 세는 것은 분포 개념과 관련된 활동이다. 예를 들어, 아이들이 좋아하는 옷의 색깔을 수로 나타낸 표나 그래프로 만든 후, "어떤 색깔의 옷이 많이 팔릴 것이라고 생각합니까?"와 같은 질문은 정리된 표나 그래프에서 어떤 속성이 도수가 더 많은가를 판단하는 분포 개념과 관련된 것이다. 여기서 다루어지는 자료의 성격은 범주형 자료이기 때문에 연속형 자료와는 달리 분포의 변화과정을 논할 수는 없다. 연속형 자료의 경우에는 분류기준의 다양성, 모호성의 문제점으로 이 단계의 학습자들에게 적절하지 않기 때문으로 볼 수 있다.

이 단계에서는 표본 개념이 다루어지지 않고 있는 데, 주목할 점은 교사용 지도서에서는 수업 분위기를 위해서 "3명 정도를 조사 대상"으로 하여 활동하는 것을 권장하고 있다는 점이다. 초등학교 저학년 아동들이 표본추출에 대하여 배우지 않았음에도 불구하고 표본은 전체의 부분이며 전체를 이해하기 위한 아이디어를 제공한다는 것을 보여주는 연구 결과들(예. Jacobs, 1997; Watson & Moritz, 2000)을 근거로 할 때, 이런 점은 문제점을 야기할 수 있다. 즉, 표본 개념이 언제부터 발달하기 시작하는가에 대한 연구가 명확하게 제시되지 않은 상태임

<표 1> 7차 교육과정의 확률과 통계 내용과 통계적 개념

단계	단원명	내용	통계적 개념
1-가	분류하여 세어보기	한 가지 기준으로 사물을 분류하기	요약, 분포
2-나	표와 그래프	표와 그래프만들기	분포
3-나	자료 정리하기	자료의 수집, 정리, 막대 그래프로 나타내기	분포
4-나	꺾은선 그래프	꺾은선 그래프, 여러 가지 그래프로 나타내기	분포
5-나	자료의 표현	줄기와 잎 그림, 평균	분포, 요약
6-가	비율그래프	비율그래프(띠그래프, 원그래프)	분포, 표본
6-나	경우의 수	경우의 수와확률	분포
7-나	통계	도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형, 도수분포표에서의 평균, 상대도수, 누적도수	분포, 요약
8-나	확률	확률의 뜻과 기본 성질, 확률의 계산	분포
9-나	통계	상관도, 상관표, 상관관계	분포
10-가	통계	산포도와 표준편차	분포, 요약

을 감안한다면 3학년보다 더 어린 아동들에게서도 표본 개념의 직관적 수준이 시작될 가능성이 존재한다고 볼 수 있다. 따라서 아동의 초기 경험이 중요하다는 점을 생각한다면, 표본의 크기에 대한 고려를 하지 않는다면 Kahneman & Tversky(1972)가 주장한 대표성 오류에 빠질 가능성이 더 높을 것이다.

2-나: 여러 가지 통계 자료를 실제로 조사하여 적절하게 정리(요약)하기 위해, 표나 그래프를 이용하는 것이 알아보기 쉽고 비교하는데 편리하다는 것을 학습자들이 이해하는 데 목적을 둔다(교육인적자원부, 2000). 자료를 표나 그래프로 표현하는 것은 자료의 독해 용이성과 편리성뿐만 아니라 총체적으로 자료를 파악하는, 즉 자료의 분포 특성과 같은 것을 파악하고자 함이다. 과거 약 1800년 전에는 과학자들이 표로 되어있는 자료를 더 선호하여 그래프를 드물게 사용하였지만, 그래프들은 자료 집합을 요약하거나 변이성에서 패턴을 요약하는 또 다른 방법으로 분포를 표현하는데 이용되어 질 수 있다 (Bakker, 2004). 이러한 장점을 고려하여 현재 교육과정에서처럼 자료를 표나 그래프로 표현하고 단순히 "가장 많은(또는 적은)~"과 같은 질문 유형으로 국한할 것이 아니라, 그래프를 이용하여 분포 특성을 파악해볼 수 있는 활동이 추가적으로 필요로 된다.

분포 개념과 관련하여 이 단계에서 추후 6학년 과정에서의 상대도수적 확률 개념과 관련된 활동이 나온다. 예를 들어, 돌림판 놀이를 하면서 나오는 눈의 색깔의 빈도를 표로 정리하게 하며, "계속해서 더 많이 돌려 보면 그 결과가 어떻게 될 것이라고 생각하는가?"라는 예상을 유도하도록 교사용 지도서에서 제시되고 있다. 물론 활동 자체는 상대도수가 아닌 절대도수로 이루어지고 있다. 이것은 돌림판 놀이가 가지고 있는 기하적 확률의 위험성은 논의에서 제외하고 생각할 때, 수학적 확률이 아닌 통계적 확률로 연결될 수 있는 것이다. 즉, 분포 개념의 빈도 개념으로 접근해 나가는 것을 보여주고 있는 것이다.

이외에 표본이나 요약과 관련된 것은 다루고 있지 않다.

3-나: 자료를 정리하는 방법으로써 막대그래프를 소개하고 있다. 막대그래프는 여러 항목의 수량을 전체적으로 한 눈에 쉽게 비교할 수 있고 전체적인 경향을 한 눈에 쉽게 알아볼 수 있는 장점이 있다. 이외에도 Bakker(2004)는 표로 주어진 자료 값들보다 수치-막대 그래프와 같은 막대 표현으로부터 자료 값들의 중심이 어디 있는지를 더 잘 알 수 있다고 주장한다. 9살~11살 학생들을 대상으로 막대그래프에대한 개념을 조사한 Pereira-Mendoza & Mellor(1991)는 학생들이 척도(scale)상의 오류, 그래프에서 패턴에 관한 확인 부족, 예측의 오류, 정보의 부적절한 사용을 하고 있음을 밝히고 있다. 그런데 현행 교과서에서와 같이 범주형 자료만을 다루고 수치형 자료는 다루고 있지 않기 때문에 속성 간 비교밖에 이루어질 수가 없어서 분포 개념의 (확률함수로의-x축은 숫자) 연계가 준비되지 않고 있다. 즉 수치적 자료를 통한 분포의 특성은 추후 다루어지게 될 확률(분포)함수로의 도입이기도 하다. 따라서 수치적 자료를 통해 변량이 "~할 수록" 또는 "대개 ~할 때" 도수가 "많다" 또는 "적다"와 같이 전체적인 분포의 특성을 파악해 보는 기회가 제공되도록 해야 할 것이다.

표본과 관련하여 볼 때, '우리 마을', '3학년 학생들'과 같이 모집단의 크기가 좀 더 큰 자료를 다루지만, 특별히 표본 개념 이해를 목적으로 하고 있는 것은 아니다.

4-나: 자료를 정리하는 방법으로써 꺾은선그래프를 소개하고 있다. 꺾은선그래프는 막대그래프와 달리 시간에 따른 변화를 파악하기 쉽고 보간법적 측면으로 유연화 효과를 가져온다. 또한 두 분포의 비교를 하는 경우에 막대그래프보다 더 잘 사용된다. 이와 같은 꺾은선그래프에 대한 주제는 학생들에게 자료의 분포 특성을 파악하도록 함으로써 분포 개념의 발달을 돕는다.

표본과 관련하여 볼 때, 예를 들어, 환경부의 환경 통계 연감에서 제시한 '한 사람이 하루에 배출하는 생활 쓰레기의 양'과 같이 모집단에 의한 자료 이외에도 표본조사에 의해 얻은 자료를 제공하고 있다. 그러나 표본의 한계에는 전혀 주목하지 않기 때문에 엄밀하게는 표본 개념과 관련된 것을 다룬다고 보기 어렵다.

5-나: 자료를 효율적으로 정리하기 위한 방법으로 줄기와 잎 그림을 소개하며 통계적 사실을 직관적으로 알아보는데 편리하다는 것을 강조하고 있다. 실질적으로

줄기와 잎 그림은 탐색적 자료분석 방법으로써 이상점과 같은 것들이 있는지를 미리 알아보면서 자료의 분포 상태를 개략적으로 파악하는 데 목적을 두고 있다. 그런데 교사용지도서에서는 히스토그램을 기술적으로 변형시킨 것이 줄기와 잎 그림이라고 설명함으로써, 연속변량을 다루는 히스토그램의 목적과 혼동하고 있다. 히스토그램은 자료의 분포 상태 파악을 목적으로 하며 추후 확률밀도함수로 연계되는 주제이다. 이는 탐색적 분석에 대한 인식론적 이해 부족에서 비롯된 것으로 보인다. 한편 교사용지도서에서는 줄기와 잎 그림으로 (모집단)분포의 봉우리가 몇 개 일지를 추측해 보는 것을 다루는데, 표본 개념(비형식적 추론)이 포함된 것으로 볼 수 있으나 이 수준에서는 너무 어려워 학생 지도와는 거리가 있다.

요약개념과 관련하여 볼 때 처음으로 평균 개념이 소개된다. 그러나 이 단계에서 평균을 도입하는 과정은 통계적 요약 개념(분포의 위치 요약)보다는 단위 당 측정값의 물리적 의미를 지니고 있다. 예를 들어, 반별 학생수를 조사하여 한 학급 당 학생 수가 몇 명인지를 알아보는 활동으로 시작되고 있다. 그러나 평균은 대표값이자 중심경향값으로써의 통계적 요약 개념에 속한다. 그러므로 이와 같이 단위 당 측정값의 물리적 의미로써 평균을 도입하는 것은 통계의 문제가 아니라 수학 문제가 되는 것이다. 통계적 요약이라는 것은 목적에 알맞게 오차변동가능성에도 불구하고 어떤 하나의 값으로 자료의 특성을 요약하는 것인데, 이와 같이 물리적 의미로써의 평균으로 초기 도입하는 것이 어떤 영향을 주게 되는 것인가에 대한 연구가 더 필요할 것이다. 참고로 대표값과 관련된 선행연구들(Strauss & Bichler, 1988; Mokros & Russell, 1995; Watson & Moritz, 1999, 2000)을 보면 초등학교 3학년 또는 심지어 8세 아동에게서도 대표값 개념이 발달되기 시작함을 알 수 있다. 따라서 우리나라 교육과정의 경우 대표값 개념을 가르치는 시기의 조정에 대한 고려가 필요하다고 할 수 있다.

이 단계에서도 표본 조사의 신뢰성 관련 주제는 다루지 않고 단지 모집단의 자료가 활용되는 정도로 국한된다. 따라서 표본 개념과 관련된 내용이 다루어진다고 하기 어렵다.

6-가: 막대그래프나 꺾은선그래프 또는 그림그래프로는 비교하기 곤란한 전체와 부분 사이의 관계를 비율그래프로써 알아보고, 여러 가지 통계적 자료를 띠그래프나 원그래프로 나타낸 것을 보고 각각의 속성이 차지하는 상대적 비율을 직관적으로 알아보는 것을 목적으로 하고 있다(교육인적자원부, 2000). 따라서 분포적 특성 중에서 어떤 속성의 전체에 대한 상대적 비율을 직관적으로 파악하는 점에 있어서 적용 가능하다. 띠그래프나 원그래프가 상대적 분포를 직관적으로 파악하기에 용이하다는 것은 요약의 시각적 효과성과 관계되는 것이지만, 이 그래프들에서 구해진 각 속성들의 비율을 막대그래프로 표현하게 된다면 이산적 자료에 대한 확률분포로 전이 될 수 있는 것이다. 분포적 관점에서 본다면 이런 표현(요약)의 변환은 추후 소개될 확률분포에 대해 학습자들이 자연스럽게 연결지어 줄 수 있는 계기가 될 것이다.

표본 개념과 관련된 것으로 볼 수 있는 것은 년도별, 연령별 농가 인구 구성비의 변화를 띠그래프로 제시하고 농가 인구의 변화에 대한 질문을 유도함으로써 간단한 통계적 추론을 유도하고 있다. 이 활동 예는 분포 개념과도 관련되는 것으로써 띠그래프를 세로로 배열함으로써 연령층에 따른 분포의 비율을 직관적으로 비교하도록 만든다.

6-나: 우리나라는 경우의 수와 조합, 순열 등을 바탕으로 확률이론을 소개하는 교육과정으로 구성되어 있는데 이것은 심리학적 근거를 Piaget & Inhelder의 연구(1951)에 두고 있는 것이라 할 수 있다(이경화, 1996). 따라서 여기에서 소개되고 있는 경우의 수는 조합논리를 위한 것으로 이어서 소개되는 수학적 확률을 위한 준비과정이라고 할 수 있으며 본 연구와는 다소 거리가 있다.

한편 교과서에서 제시하는 도입활동은 사고실험이 아니라 (여러 명이)동전을 10번 정도 던져서 어떤 경우가 나오는지를 기록하게 함으로써 동전을 던져서 나오는 횟수가 몇 가지인지를 확인하게 하고 있다. 그러나 실험에 의해 가능한 경우를 찾는 것은 조합논리의 인식론적 특성과도 맞지 않으며, 특히 실험에서 어떤 경우의 확률이 낮을 경우 그 경우가 누락될 수 있음에 유의해야 한다. 즉 표본 공간은 사고 실험에 의한 것이 더 적절할 수 있다.

교육과정에서는 경우의 수를 알아본 뒤 이어서 확률 개념을 소개하고 있다. 확률교육과 관련하여 확률 개념

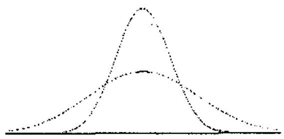
의 정의를 어떻게 할 것 인가로부터 어떤 교수학적 변환이 필요한 것인가에 이르기까지 많은 연구들이 이루어져 왔다(Scholz, 1991; Garfield & Ahlgren, 1988; Borovcnik & Bentz, 1991; Steinberg, 1991; Hawkins & Kapadia, 1984; Shaugnessy, 1992; 이경화, 1996). 그러나 통계적 확률로부터 수학적 확률로의 자연스러운 연결은 극한개념이 이해될 수 있는 고등학교 수준에서나 가능하다는 주장도 많으며, 그 이전의 수준에 속하는 학습자들에게 어떻게 확률 개념을 가르칠 것인가에 대한 논란은 아직도 존재하고 있는 상태이다. 이런 논의 속에서 확률의 두 개념을 조기에 연결 짓는 시도는 좀더 충분한 연구 후에 가능할 것이다.

7-나: 도수분포표로부터 시작하여 자료의 분포상태를 파악하는 것에 초점이 맞춰지게 된다. 히스토그램에 관한 내용이 다루어짐으로써 연속형 자료의 분포 상태를 다루게 된다. 이때 자료의 분포 상태가 계급의 수와 관련됨을 함께 살펴보게 된다. 히스토그램은 추후 확률밀도함수로 연결되는 중요한 의미를 갖는 것이다. 그러나 현재 교육과정에서는 7-나 단계에서 처음 히스토그램이 다루어지고 수학I에서 확률밀도함수가 처음 나옴으로써 그 중간단계가 빠져있다. 따라서 히스토그램을 다룰 때 밀도도수 히스토그램을 넣어서 확률 구하기와 연결하는 것의 필요성이 요구된다. 즉 분포개념의 일관된 성장을 촉진할 수 있는 개선이 요구된다는 것이다.

8-나: 상대도수에 의한 확률도 소개하고 있지만 수학적 확률 개념과 그 연산에 더 강조를 하고 있다. 이것은 앞서 6-나에서 다루어진 확률의 조합론적 관점과 맥을 같이 하는 것으로 볼 수 있으나 통계적 확률개념 즉 분포개념과 수학적 확률 개념의 연결을 위한 시도를 찾을 수 없다. (이 시기에 연결이 가능할 지는 여전히 분명치 않다.)

9-나: 두 변량 간의 관계성을 다루는 상관 개념이 도입된다. 이때 두 변량의 분포를 산점도(scatterplot) 제 7차 교육과정에 의한 교과서들에서는 산점도를 상관도라는 용어로 지도하고 있다.로 나타내어 직관적으로 두 변량 간에 상관이 존재하는지 존재한다면 어느 정도의 강도를 갖는지를 관찰하는 내용과 자료를 범주화 하여 상관표로 나타내어 상관도에서 했던 것과 마찬가지의 관찰을 하는 내용으로 구성되어 있다. 상관 개념은 앞서 언급한 것과 같이 사건의 독립성, 조건부 확률분포와 관련된 것이다. 상관 개념과 관련된 많은 연구들은(Inhelder & Piaget, 1958; Jenkins & Ward, 1965; Shaklee & Mims, 1982; Arkes & Harkness, 1983; Allan & Jenkins, 1983; Prez Echevarra, 1990; Batanero et al.,1996) 형식적 조작기 이후에도 학습자들에게 이해하기 어려운 개념이라는 것에 동의를 하고 있다. 하지만 이러한 연구 결과(실험 녹취록)들에서 찾아볼 수 있는 것은 학습자들이 조건부 상대도수 분포를 비교하는 현상을 보이고 있다는 점이다. 이것은 현행 교육과정에서와 같이 상관표를 상관도의 일종처럼 다룰 것이 아니라 상관표 자체가 가지고 있는 조건부(확률)분포의 개념을 반영할 필요가 있음을 시사한다고 볼 수 있으며 이것은 곧 분포개념의 발달이라는 연계선 속에 상관을 포함해야 하는 상관에 대한 인식론적 변화의 필요를 암시하는 것으로 해석된다.

10-가: <그림2>는 자료를 기술할 때 중심에 대한 측도를 계산하는 것만으로는 충분하지 않으며 확률적 변량의 개념이 무엇인지를 전달해주는 가장 쉬운 과제이다 (Hawkins et al., 1992).



<그림 2>

두 분포의 중심은 같지만 중심으로부터 퍼져있는 정도가 서로 다르기 때문에 두 분포를 차별화함으로써장차 표본 개념의 도움을 받아 귀납적 추론을 시도할 때 변이성(variation)의 추론의 신뢰성(reliability of inference)에 대한 영향을 고려할 때 중요한 기초 개념임을 인지하는 과제이다. 정량적으로는 퍼짐에 대한 요약을 위하여 소개되는 것이 일반적으로 범위, 사분위범위, 분산과 표준편차 등이다. 현행 교육과정에서 소개되는 것은 이 중에서 분산과 표준편차이다.

표준편차는 계산적으로 복잡할 뿐만 아니라 퍼짐을

측정하기 위해 왜 좋은 선택인지를 표본 개념(표본의 우연 속성) 없이는 동기화하는 것이 어렵기 때문에 중심에 관한 연구보다 변이성에 관한 연구들이 더 주목을 받지 못했다(Shaughnessy et al., 1997).

이런 점은 현행 교육과정에서도 계산 위주로 분산과 표준편차를 다루고 있는 것에서 쉽게 발견된다. 변이성에 대한 고려는 모집단과 표본의 관계성을 직관 이상의 방법으로 고려할 수 있게 해주는 중요한 개념이 되는데 Shaughnessy et al.(1997)는 "가능한 결과들의 퍼짐에서 표본의 크기의 영향에 대한 이해가 발달해간다"고 언급하고 있다. 따라서 단순히 자료의 분산과 표준편차를 계산(요약)하는 교육으로 국한되는 것이 아니라 자료의 변이성에 대한 고려에서 어떻게 퍼짐에 대한 요약을 해나가야 하는가, 표본 개념과의 어떤 분석적 통합이 가능한가에 대한 논의가 필요로 된다.

V. 결론 및 제언

통계학의 핵심적인 중요한 개념들에 대한 정립의 필요성은 연구자, 교육과정 설계자, 교수학습활동의 주체자들에 의해 요구되고 있다. 통계학의 핵심적인 중요한 개념들의 정립은 통계교육과 관련된 모든 사람들에게 있어서 통계학에 대한 이해를 발달시키는 기초를 제공하게 된다. 이러한 중요성에 입각하여 본 연구에서는 핵심이 될 수 있는 세 가지 통계적 개념으로 분포, 요약, 표본 개념을 제안하였다.

이때 세 가지 통계적 개념은 통계학 내용과 밀접하고, 발달 가능한 것으로써, 각 개념들은 상호 배타적이고 다른 통계적 개념들을 포괄할 수 있도록 함을 원칙으로 하였다. 이런 원칙 하에 제안된 분포는 여러 가지 사회 현상, 자연 현상 속에서 발현되는 사물의 속성이 다양할 때 그 다양한 속성 각각의 빈도를 생각하는 개념이다. 또한 요약은 불확실한 상황에서 자료에 근거한 판단을 하기 위해 자료들을 숫자 또는 방정식으로 줄여서 나타내는 것을 말한다. 마지막으로 표본은 통계적 추론을 위한 근본적인 개념으로써, 모집단과 표본을 구분하여 표본을 선택하고 표본자료의 분석결과에 대한 일반화를 일컫는다. 따라서 표본개념의 발달은 통계적 근거에 의한 판단, 정당화와 관련된 방법, 자료수집과 자료분석의 전과정을 정당화하는 능력의 발달이라고 볼 수 있다.

이 세 가지 통계적 개념들이 실질적으로 현행 교육과정에서는 어떻게 다루어지고 있는지를 고찰한 결과, 전 단계에서 분포 개념은 모두 다루어지고 있으며, 요약 개념은 1학년, 5학년, 7학년 10학년에서 등장하고 있고, 표본 개념은 불완전하지만 6학년에서 하나의 활동을 통해 접하게 되어 있다.

그런데 앞서 살펴본 것처럼 분포 특성을 알아봄에 있어서 총체적인 경향성보다는 개별적인 특성에 더 초점화 되어 있었다. 이것은 자료의 성격 자체가 수치형 자료가 아닌 범주형 자료만을 다루는 경향 때문이기도 하다. 범주형 자료는 분포의 변화특성을 관찰하는 것에도 제한이 있기 때문에 주로 낱낱의 속성들의 빈도에만 초점화 되기 쉽다. 이것은 Bakker(2004)가 지적한 것처럼 학생들이 자료 집합을 전체의 형태를 가질 수 있는 하나의 전체대신 개별적 숫자들의 행으로 보는 문제점을 낳을 수 있다. 분포는 변동성에서 패턴에 관해 사고하기 위한 개념적 구조를 조직하고 자료 집합을 총체로써 볼 수 있도록 하는데 유용하므로 교육과정 상에서의 고려가 필요로 된다.

그리고 요약 개념과 관련해서 볼 때, 현행 교육과정에서는 중심경향성의 측도들을 5학년에서 처음으로 다루고 있다. 하지만 선행연구결과들(Strauss & Bichler, 1988; Mokros & Russell, 1995; Watson & Moritz, 1999, 2000)을 보면 완전하지는 않더라도 더 이른 시기부터 대표값에 대한 개념이 발달되고 있음을 알 수 있다. 따라서 주어진 자료를 목적에 알맞게 적절하게 요약하는 활동을 교육과정상에 반영하는 것을 고려할 필요가 있다.

표본 개념과 관련하여 볼 때, 1단계부터 10단계에서 6학년의 활동 하나정도가 관련되어 있고 실질적으로 표본개념을 다루고 있지 않음을 알 수 있었다. 그러나 10단계 이후의 수학I에서 등장하는 통계 추론은 표본 개념이 필수적인 개념이기 때문에 그 이전에 표본개념에 대한 학습이 이루어졌어야 함을 알 수 있다. 이것은 선행연구들(Jacobs, 1997; Watson & Moritz, 2000)을 통해서도 확인된 부분으로써 이 연구결과들은 초등학교 3학년정도에서도 표본 개념이 발달하고 있음을 보여준다. 따라서 현행 교육과정에서는 표본 개념을 초등학교수준부터 반영하는 것에 대한 고려가 필요할 것이다.

지금까지 이루어진 몇몇 선행연구들은 낱낱의 통계적 개념들이 어떻게 발달되어 가는가를 보여준다(예를 들어, 가능성과 무작위성의 개념 Piaget & Inhelder, 1951; Fischbein, 1975; Kahneman, Slovic, & Tversky, 1982, 표본추출개념 Watson & Moritz, 2000; 대표값 개념 Mokros & Russell, 1995; Watson & Moritz, 2000 등 등). 하지만 총체적인 관점에서 개념들의 발달을 고찰한 연구는 아직까지 이루어지지 않았다고 볼 수 있다.

마찬가지로 본 연구에서 제안한 세 가지 통계적 개념도 각 개념들이 어떻게 발달되어가는지, 수준이 존재한다면 어떻게 존재하는지 등에 관하여 후속적인 연구가 이루어져야 할 것이다. 이와 같은 후속연구를 통해 발달 수준에 대한 명백한 제시가 된다면 통계교육에 있어서 좀 더 구조화된 체계를 가지고 교육과정 구성에 반영될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2000). 초등학교 수학 1~6, 교사용지도서, 서울:대한 교과서 주식회사.

김우철 외. (1991). 현대통계학, 영지문화사.

우정호 (2000). 통계교육의 개선방향 탐색, 학교수학, **2(1)**, pp.1-27.

이외숙 외 (2002). 통계학입문, 경문사.

이경화 (1996). 확률개념의 교수학적 변환에 관한 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

신현정 (2000). 개념과 범주화, 서울: 아카넷.

Allan, L. G. & Jenkins, H. M. (1983). The effect of representations of binary variables on judgment of influence. *Learning and Motivation* **14**, pp.381-405.

Arkes, H. R. & Harkness, A. R. (1983). Estimates of contingency between two dichotomous variables, *Journal of Experimental Psychology*: General, **112(1)**, pp.117-135.

Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*, Carlton, Vic.: Author.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education : on symbolizing and computer tools*, Doctoral dissertations.

Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution, In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Publishers.

Batanero. C., Godino, J. D., & Vallecillos, A., (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), p.527-547.

Batanero, C.; Estepa, A.; Godino, J. & Green D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables, *Journal for Research in Mathematics Education* **27(2)**, pp. 151-169.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. B. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges, In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Publishers.

Ben-Zvi, D. & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations, *Educational Studies in Mathematics* **45(1-3)**, pp.35-65.

Bethlehem, J. & De Gooijer, J. (2000). *Data-analyse [data analysis]. Amsterdam, the Netherlands*: University of Amsterdam.

Borovcnik, M. & Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. In Kapadia, R. and Borovcnik, M. (Eds.), *Chance encounters: Probability in education*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Cobb, George W. & Moore, David S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *American Mathematical Monthly* **104(9)**, pp.801-823.

Falk, R. (1981). The perception of randomness. In C. Comiti & G. Vergnaud(Eds.), Proceedings of the

Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Grenoble, France, 222-229.

Falk, R. & Well, A. D. (1997). The many faces of the correlation coefficient. *Journal of Statistics Education* 5(3), pp.1-18.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Friel, S. N. (in press). The research frontier: Where technology interacts with the teaching and learning of data analysis and statistics. In M. K. Heid & G. W. Blume(Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Syntheses and perspectives* 1. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Garfield J. B. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning, *Journal of Statistics Education*[Online], 10(3).

Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Issues, challenges, and implications, In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Publishers.

Garfield, J. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education* 19(1), pp.44-63.

Hancock, C., Kaput, J. J., & Goldsmith, L. T. (1992). Authentic inquiry with data: Critical barriers to classroom implementation. *Educational Psychologist* 27(3), pp.337-364.

Hawkins, A. S.; Jolliffe, F.; Glickman, L. (1992). Teaching statistical concepts, Harlow, Essex, England: Longman Group UK Limited. pp.119~121.

Hawkins, A. S. & Kapadia, R. (1984). Children's Conceptions of Probability a psychological and pedagogical review, *Educational Studies in Mathematics* 15, pp.349-377.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*, Routledge & Kegan Paul Ltd: London.

Jacobs, V. R. (1997). *Children's understanding of sampling in surveys*, Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Jenkins, H. M. & Ward, W. C. (1965). Judgement of contingency between responses and outcomes. *Psychological Monographs* 79, *(1, Whole No. 594).*

Kahneman, D.; Slovic, P. & Tversky, A. (eds.) (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology* 3 pp.430-454.

Konold, C.; Pollatsek, A.; Well, A. & Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. In J. B. Garfield & G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics: 1996 Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference* pp.151-167, Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Mendenhall, W.; Wackerly, D. D. & Scheaffer, R. L. (1990). Mathematical statistics with applications, PWS-KENT Publishing Company.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), pp.20-39.

Mood, A. M.; Graybill, F. A. & Boes, D. C. (1974). *Introduction to the theory of statistics*, McGraw-Hill.

Moore, D. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen(Ed.), *On the shoulders of the giants: New approaches to numeracy* pp.95-137, Washington, DC: National Academy Press.

Pereira-Mendoza, L. & Mellor, J. (1991). Students'concepts of bar graphs: Some preliminary findings. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* 1, pp.150-157, The Netherlands: International Statistical Institute.

Prez Echevarra, M. P. (1990). *Psicologa del razonamiento probabilstico.*[The psychology of probabilistic reasoning]. Madrid: Ediciones de la Universidad Autonoma de Madrid.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). The origin of the idea of chance in children, trans. By Fischbein, E.(1975), Routledge and Kegan Paul, London.

Rubin, A.; Bruce, B. & Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. In D. Vere-Jones (Ed.), Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics, 1 pp.314-319, Voorburg: International Statistics Institute.

Saldanha, L. & Thompson, P. W. (2002). Conceptions of sample and their relationships to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics* 51, pp.257~270.

Scholz, R. W. (1991). Psychological research in probabilistic understanding. In Kapadia, R. and Borovcnik, M. (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* pp.213-249, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Shaklee, H. & Mims, M. (1982). Sources of error in judging event covariations: Effects of memory demands, *Journal of experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 8, pp.208-224.

Shaughnessy, J. M.; Watson, J.; Moritz, J. & Reading, C. (1999). *School Mathematics Students' Acknowledgment of Statistical Variation.* Paper presented at the 77th Annual Conference of the National Council of Teachers of Mathematics, April, San Francisco, California.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in Mathematics Education* 1, pp.6-22, Waikato, New Zealand: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp.465-494.

Strauss, S. & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education* 19, pp.64-80.

Steinbring, H. (1991). The concept of change in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge, *Educational Studies in Mathematics* 22, pp.503-522.

Watson, J. M. & Moritz, B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics* 37, pp.145-168.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling, *Journal for Research in Mathematics Education* 31, pp.44-70.

Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average, *Mathematical thinking and learning* 2, pp.11-50.

An Epistemological Inquiry on the Development of Statistical Concepts

Lee, Youngha
Ewha Womans University, San 11-1 Daehyun-dong, Seodaemun-Ku, Seoul, Korea, 120-750
E-mail; youngha@ewha.ac.kr

Nam, Joohyun
Ewha Womans University, San 11-1 Daehyun-dong, Seodaemun-Ku, Seoul, Korea, 120-750
E-mail; joohyun@ewhain.net

We have inquired on what the statistical classes of the secondary schools had been aiming to, say the epistemological objects. And we now appreciate that the main obstacle to the systematic articulation is the lack of anticipation on what the statistical concepts are.

This study focuses on the ingredients of the statistical concepts. Those are to be the ground of the systematic articulation of statistic courses, especially of the one for the school kids.

Thus we required that those ingredients must satisfy the followings.

i) directly related to the contents of statistics

ii) psychologically developing

iii) mutually exclusive each other as much as possible

iv) exhaustive enough to cover all statistical concepts

We examined what and how statisticians had been doing and the various previous views on these. After all we suggest the following three concepts are the core of conceptual developments of statistic, say the concept of distributions, the summarizing ability and the concept of samples.

By the concepts of distributions we mean the frequency views on each random categories and that is developing from the count through the probability along ages.

Summarizing ability is another important resources to embed his probe with the data set. It is not only viewed as a number but also to be anticipated as one reflecting a random phenomena.

Inductive generalization is one of the most hazardous thing. Statistical induction is a scientific way of challenging this and this starts from distinguishing the chance with the inevitable consequences. One's inductive logic grows up along with one's deductive arguments, nevertheless they are different. The concept of samples reflects one's view on the sample data and the way of compounding one's logic with the data within one's hypothesis.

* ZDM classification : K10
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C50
* Key Word : Statistics, Concept, Curriculum.

With these three in mind we observed Korean Statistic Curriculum from K to 12. Distributional concepts are dealt with throughout but not sequenced well. The way of summarization has been introduced in the 1st, 5th, 7th and the 10th grade as a numerical value only. One activity on the concept of sample is given at the 6th grade. And it jumps into the statistical reasoning at the selective courses of "Mathematics I" or of "Probability and Statistics" in the grades of 11-12.

We want to suggest further studies on the developing stages of these three conceptual features so as to obtain a firm basis of successive statistical articulation.