韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 8. 제 44권, 제 3호, 375-396.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2005, Vol. 44, No. 3, 375-396.

탐구 지향 미분방정식 교수-학습의 효과 분석

권 오 남 (서울대학교)
주 미 경 (신라대학교)

I. 서 론

전통적으로 미분방정식은 교수자가 몇몇 특정한 유형의 미분방정식의 해석적 해법을 제시한 뒤 학생은 주어진 동일 유형의 연습문제를 반복적으로 연습하는 방식의 수업을 통해 지도되어 왔다. 이와 같은 전통적인 미분방정식 수업에서 미분방정식의 응용에 관련된 문제는 생략되거나 극히 제한적으로 다루어져 왔으며 미분방정식의 주요 개념과 관련된 정리는 명제만 제시되고 증명의 난이도로 인해 대체로 생략되는 경우가 많았다. 그러나 이러한 지도방법은 자연현상을 모델링하기 위한 언어로서 발명된 미분방정식의 수학사적 의미를 반영하지 못하고 있으며, 학생들의 문제해결적 사고 발달에 기여하지 못한다는 비판을 받아왔다. 이러한 맥락에서 본 연구는 1980년대 중반 Artigue와 Gautheron에 의해 제창된 미분방정식 교육개혁이 제시하는 교수학적 관점을 비판적으로 공유하면서 초·중등 수준의 수학 교수-학습에 대한 이론적 연구 성과를 대학수학지도를 위한 교수-학습 모델개발에 도입하여 탐구 지향적인 미분방정식 수업(Inquiry-Oriented Differential Equation: IODE)을 개발하는 것을 목적으로 한다. 구체적으로 본 연구는 RME (Realistic Mathematics Education) (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1999) 이론과 수학적 의미에 대한 사회적 협의(social negotiation of mathematical meaning) (Cobb & Bauersfeld, 1995)에 관한 이론을 대학수학지도에 도입함으로써 대학수준의 미분방정식을 보다 의미 있게 지도할 수 있는 탐구지향적 수학 교수-학습 모델을 개발하고 나아가, 대학수학수업개발연구가 초중등수학수업개발연구에 기여할 수 있는 방안을 모색하는 것에 초점을 두고 있다. IODE 프로젝트는 대학 수학교육의 혁신을 가져오기 위해 선행적으로 필요한 수학과 수학교육에서의 통합적인 구심점의 역할을 하며, 미분방정식 외의 다른 수학교과를 포괄하여 대학수학 교육과정의 개혁을 위한 전형적인 모델을 제공하는 데 기여할 수 있다. 이러한 접근 방법의 성공 여부는 대학교와 초·중등학교의 수학 교육을 재고할 필요성을 촉구하기 위해 매우 중요한 문제이다. 본 개발연구가 추구하는 개혁적 접근 방법은 대학교 수학교육과 초·중등학교 수학교육의 차이점을 밝히기보다 공통점을 찾고자 하며 결국에는 초·중등 수준에서 대학 수준에 이르기까지 모든 수준의 수학 학습에서의 지속적인 질적 향상에 공헌하고자 한다. 마지막으로, 본 논문의 결론에서는 본 연구의 자료 분석 결과에 기초하여 본 IODE 개발연구가 사범대학 수학교사교육 프로그램 개발에 관해 제공하는 시사점을 논의할 것이다.

II. IODE 프로젝트 개발의 이론적 토대

수학사를 통해 볼 때 미분방정식은 천체의 운동과 같은 역동적인 자연의 법칙을 표현하기 위한 언어로 발명되었지만, 대학에서 미분방정식을 지도해온 전통적인 방법은 이러한 미분방정식의 역사적 중요성을 효과적으로 전달하지 못해왔다. 이와 같은 미분방정식 교과지도에 대한 반성은 미적분학 교과지도에서의 개혁운동 성과와 테크놀로지의 발달을 통해 미분방정식 지도에서의 개혁운동으로 이어졌다. 구체적으로 미분방정식 교육 개혁운동은 1983년 Artigue와 Gautheron이 저술한 미분방정

* 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2002-041-B00468)
* 2005년 3월 투고, 2005년 7월 심사 완료.
* ZDM분류 : D45
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : RME, 미분방정식, 대학수학교육, 개발연구.

식 교재 "Systems Differential, Etude Graphique"에서 시작하여 이후에 이루어진 많은 연구를 통해 진행되어왔다 (Habre, 2000). 미분방정식 개혁운동의 중요한 특징을 나열하면 다음과 같다.

■ 다양한 수학적 방법의 강조: 미분방정식을 해결하기 위해 해석적 방법뿐만 아니라 수치적 방법, 그래프적 방법, 기하적 방법, 질적 방법과 같은 다양한 수학적 방법을 도입하여 학생들에게 지도한다. 실제로 해석적 방법을 통해 해결될 수 있는 미분방정식은 매우 한정적인 반면, 수치적 방법, 그래프적 방법, 질적 방법은 보다 다양한 유형의 미분방정식을 해결할 수 있는 강력한 전략이 된다.

■ 역동적 체계 (dynamic system)의 강조: 미분방정식은 함수가 시간에 따라 어떻게 발전하고 변화하는지 기술해주는 메커니즘으로 볼 수 있다. 따라서 IODE에서 해함수의 특성과 구조를 해석하고 구체화하며, 해의 장기적인 움직임, 평형해의 개수와 성질, 해공간에서 변수의 변화 결과 등의 탐구는 중요한 학습 내용을 구성한다.

■ 모델링과 응용의 강조: 미분방정식 개혁 운동은 미분방정식이 행성의 운동과 같은 자연현상을 모델화하기 위해 발명된 언어라는 수학사적 기원을 가지고 있음을 주목한다. 따라서, 미분방정식 지도를 위해 실제 세계에서 접할 수 있는 변화 상황 (예를 들어, 인구 증가, 유체의 흐름 등)에 기반한 맥락을 분석·탐구하여 모델화하는 과제를 도입한다 (Borrelli & Coleman, 1998; 1999)

■ 테크놀로지의 활용: 테크놀로지의 활용으로 그래프적, 수치적, 분석적 방법에 중점을 두고 있는 주요 아이디어를 시각적으로 볼 수 있게 된다 (Kallaher, 1999). 예를 들어, 테크놀로지는 근사해를 만들어내는 오일러 방법과 같이 수치적 알고리즘뿐 아니라 1계 미분 방정식과 연립 미분 방정식에서 기울기 장(slope field)의 역동적인 그래프적 표현에도 이용된다. 또한 미분방정식 수업을 위해 개발된 자료들이 인터넷을 통해서도 활용이 가능하다.

본 IODE 프로젝트 교실에서는 위에 제시한 미분방정식 개혁 운동의 지도 원리를 확장하여 미분방정식 교과 지도에서 학생들의 능동적 참여와 수학적 의미의 사회적 협의에 기초한 구성주의적 학습을 강조한다. 이러한 지도상의 강조점은 RME 이론과 "수학적 의미에 대한 사회적 협의(social negotiation of meaning)"(Cobb & Bauersfeld, 1995)에 관한 논의에 기초한다. 수학 교수 설계 이론으로서 RME 이론은 수학을 인간의 활동에 근거하며 개인의 역사와 인류의 역사를 통해 점진적으로 세련되어온 상식 (common sense)으로 보는 Freudenthal (1991; 1993)의 철학에 기초한다. 여기서 '상식'이란 한 사회의 성원들 사이에 공유된 사실적 명제로서 상식 (common knowledge)과는 구분된다. 후자가 결과물로서 지식을 의미하는 반면, Freudenthal이 수학과 관련하여 언급한 상식 (common sense)은 한 사회가 공유하고 있는 세계를 바라보는 방식을 가리킨다. 즉, 수학적 개념이나 아이디어는 물리적·사회적 세계의 현상을 조직하기 위한 수단에서 출발하여 본질로 발전되어 왔다고 본다.

이러한 관점에서 RME 이론에 기초한 학습 지도는 명제체계라는 결과물로서 수학보다는 활동 과정 그 자체로서 수학을 학습하는 것을 중시한다 (Treffers, 1987; Gravemeijer, Cobb, Bowers, & Whitenack, 2000). 뿐만 아니라, Freudenthal의 관점에서 세계를 이해하는 시각으로서 '상식'은 정적인 것이 아니라 부단히 재조정되며 상대성을 갖는다. 즉, 수학 전문가에게는 상식으로 받아들여지는 것이 입문자에게도 상식으로 받아들여지는 것은 아니다. 따라서 RME 이론은 수학 교과지도에서 학생의 수학적 상식 수준에서 출발하여 그보다 높은 단계의 수준에 대한 새로운 이해를 할 수 있도록 과제 순서를 조직하고 배열하여 적절한 안내된 재발견의 과정을 거쳐 기호, 알고리즘, 그리고 정의에 대한 심화된 이해의 발달을 통해 수학이 형성되는 과정을 학생들이 직접 경험할 수 있도록 촉구한다 (Kwon, 2003; Rasmussen & King, 2000; Rasmussen, Zandieh, King, & Teppo, 2005). 이와 같은 RME 이론의 기본적인 학습 지도 원리를 반영하는 IODE의 수업 특징은 다음과 같다.

■ 맥락문제의 강조: IODE 프로젝트 교실에서의 수학 교수-학습은 맥락문제에서 시작된다. 수학적·경험적으로 실제적인 맥락문제는 학생들의 수학적 상식에 기반을 두어 교사가 의도하는 수학적 이해가 발생하도록 안내하는 기재의 역할을 한다.

■ 점진적 수학화에 기초한 발생적 모델: IODE 프로젝트 교실의 교수-학습이 학생들에게 수학적·경험적으로

실제적인 맥락문제의 탐구에서 출발한다고 할 때, 학생들의 문제해결활동은 단순히 주어진 문제에 대한 해법을 찾는 것에 국한되지 않고 문제의 맥락에 관련된 수학적 원리를 발견하여 수학적 모델을 구성하는 것까지 포괄한다. 그리고 교과과정에 의해 의도된 수학적 모델은 교수자에 의해 직접적으로 주어지는 것이 아니라, 학생들 자신의 문제해결을 통한 탐구를 통해 발생하며 이처럼 발생되는 수학적 모델에 대한 이해는 학생의 직관적 이해와 형식적 수학의 교량 역할을 한다.

■ 학생 참여: IODE 프로젝트의 교수학적 설계는 교재도 중요하지만 수업이 참여자들 사이의 상호작용 속에서 이루어진다는 것을 기본 전제로 하고 있다. 특히, 학생 참여와 관련하여 볼 때, IODE 프로젝트에서 중요한 것은 학생들이 자신의 추론을 설명하고 정당화할 수 있는 학습 환경을 만들어가겠다는 명백한 의도를 교사가 가지고 있어야 한다는 것이다. Richards (1991), Cobb, Wood, Yackel과 McNeal(1992)은 그러한 학습 환경을 "탐구 지향적 (inquiry oriented)"이라고 정의하였다. Cobb (1992)은 "학생들이 탐구 수학 방법에 참가하여 자신들이 이해한 경험과 자신들이 설명할 수 있는 방법으로 수학적 대상을 조절할 때, 가장 필요한 것은 정당화하는 것이다."(p.598)라고 밝혔다. 탐구 지향적 수업은 설명과 정당화에 강조를 두고 있기 때문에 초등학교의 탐구 지향적 수업에서 나타난 것과 같은 이론적 구성이 미분방정식과 같은 고등 수학 학습에도 유용할 것이라고 추측할 수 있다 (Cobb & Bauersfeld, 1995; Yackel & Cobb, 1996). 뿐만 아니라, 전문수학자의 수학적 관행에 대한 연구는 수학자는 새로운 수학을 창조할 때 비슷한 논쟁 형태에 참여한다는 사실을 보여주었다 (Burton & Sinclair, 2004; Richards, 1991). 따라서 IODE 수업에서 학생들에게 정당화 활동참여를 권장하는 것은 수학이 형성되는 과정을 학생들이 직접 경험하고 참여하는 기회를 가짐으로써 인간의 역사적 산물로서 수학에 대한 새로운 이해를 가질 수 있게 할 것이다.

초등학교 수준의 연구를 통해 나타난 구조 중에서 가장 유용하다고 생각하는 것은 논증(argumentation)의 다양하고 보완적인 역할에 대한 사고방식이다. 특히 사회적 관행, 사회 수학적 관행과 교실에서의 수학적 실제에 대한 구조는 이해를 통해 수학을 학습하는 과정을 개념화하는 수단을 제공해주기 때문에 의미있다고 할 수 있다 (Rasmussen, Yackel, & King, 2003; Yackel, Rasmussen, & King, 2000; Yackel & Rasmussen, 2002). 학생들의 설명과 정당화와 연관된 근거(warrant)와 지지(backing)가 발전함에 따라 교실에서의 수학적 실제는 교실 커뮤니티에 의해 만들어진 특별한 수학적 개념, 절차, 기호화 방법 등이다 (Toulmin, 1969; Stephan & Rasmussen, 2002; Rasmusen, Stephan, & Allen, in press; Yackel, 2002).

미분방정식에서 학생들의 개념에 초점을 맞춘 연구는 대개 교수학적 설계와 교수 계획과 관련된 주제이다. 예를 들어, Rasmussen (2001)은 특별한 형태의 문제는 분석적, 그래프적, 그리고 수치적 접근 방법을 이용하여 학습하지만 이러한 접근법이 서로 연결되지 못하고 떨어져 있음을 발견하였다. 즉, 학생들이 관계적으로 이해(Skemp, 1976)하기보다는 문제 해결을 위해 각각의 방법을 분절적으로 학습하는데 치중하고 있었다. 이 연구에서 중요한 점은 다양한 형식으로 학습한다고 해서 반드시 학생들이 개념과 관계를 유기적으로 연결할 수 있게 되는 것은 아니라는 점이다.

미분방정식에 대한 학생들의 인지에 관한 또 다른 연구는 오일러 방법에 대한 학생들의 개념 이미지와 평형해에 관한 학생들의 비형식적 또는 직관적인 개념이 질적으로 개선되었음을 보여주고 있다 (Artigue, 1992; Rasmussen, 2001; Zandieh & McDonald, 2000). IODE 프로젝트는 실제적 맥락 문제에 기반한 교수학적 접근을 취함으로써 실세계에서 비롯된 학생들의 비형식적 또는 직관적 이미지에 관한 지식이 수학 학습을 위한 핵심적인 인지적 자원을 형성한다.

III. 연구방법 및 절차

1. 개발연구

본 연구프로젝트는 한미공동으로 미분방정식교육개혁이 제시하는 교수학적 원리와 RME 이론을 근간으로 하여 탐구 지향적 수학교실을 구성하여 2001년부터 실제적인 미분방정식 교수-학습 상황에 적용하여 실제 교실로부터 수집된 자료의 분석과 평가를 통해 미분방정식의 효율적인 지도방안에 대한 피드백을 구성하는 수업개발

연구로 진행되어 왔다. 본 논문에서는 2002년도에 한미 4개 학교에서 수집된 자료중 한국 자료를 분석하였다. “개발연구(developmental research)”의 역사적 시초는 Freudenthal로 거슬러 올라간다. Freudenthal (1973)은 인간활동의 결과물로서 수학을 지도하는 바람직한 방법은 완성된 닫힌 지식 체계로서가 아니라, 학생들에게 경험적·수학적으로 의미있는 맥락으로부터의 점진적 수학화를 통해 학습되는 실행 수학을 지도하는 것이라고 주장하는 RME 이론을 제안하였다. 그는 RME 이론을 반영하는 수학교과과정개발에서 “연구-개발-보급”의 세 단계로 이루어진 전통적인 교육과정개발모델은 현실적으로 비효율적임을 지적하면서 연구와 개발이 지속적으로 피드백을 제공하는 유연한 교대과정으로 구성된 개발연구 모델을 제안하였다.

이러한 개발 연구는 지도하고자 하는 주요한 미분방정식 개념의 집합을 구성하고 각각의 개념과 관련하여 학생들에게 경험적 · 수학적으로 실재적인 맥락문제를 개발하는 것에서 출발한다. 연구자는 사고실험을 통해 미분방정식 개념과 관련하여 학생들에게 경험적으로 그리고 수학적으로 실제적인 맥락은 무엇인지 예상 · 선정하여 이들 맥락 속에 내재된 수학적 원칙을 점진적으로 수학화해갈 수 있는 일련의 활동과 질문을 구성한다. 이들 활동과 질문은 일련의 활동지로 만들어져 수업 시간에 학생들에게 제시되어 학급 내에서 수학적 상호작용의 토대를 형성한다. 이처럼 의도하는 교수-학습 활동이 교실에서 어떻게 진행되고 어떤 결과를 낳을 것인지에 대한 교사의 예상은 실제적인 교실 상황에서 진행되는 교사 실험 과정에서 수집된 자료를 통해 다시 검증된다. 즉, 학생들이 실제로 가진 수학적 경험, 수학학습 결과 등은 연구자가 예상하고 의도한 것과 일치하는가? 만일 일치하지 않는다면 그 이유는 무엇이고 현재 개발된 교과과정은 어떻게 수정되어야 하는가? 이처럼 Freudenthal은 교수실험을 통해 수집된 자료의 분석과 분석결과를 통한 반성은 이와 같은 질문을 해결하는 과정을 통해 보다 이론과 실재에 부합하는 수학교과과정, 나아가 수학교육이론의 개발로 이어지는 회귀적 모델을 따른다 (Gravemeijer, 1994). 이와 같은 개발연구의 관점에서, 본 연구의 목표는 프로젝트 교실에 참여하는 학생들의 개념적 이해 및 수학에 대한 태도의 정의적 영역의 변화를 체계적으로 분석하여 후속 수업을 구성하고 운영하는 데 유용한 지침을 구할 뿐만 아니라 수학교과지도에 유용한 학습이론과 탐구지향적 수업 모델의 현장 도입에 유용한 시사점을 제공하는 것이다.

2. 검사도구

본 연구는 IODE 수업 효과를 정의적 · 인지적 측면에서 평가하기 위해 세 가지 검사도구를 사용하였다. 정의적 측면의 평가, 특히, 학생들의 수학에 대한 신념과 태도를 측정하기 위하여 Carlson (1997; 1999)에 의해 개발된 VAMS (Views About Mathematics Survey)를 수정, 보완하여 사용하였다. 비교분석을 위해 VAMS는 IODE 집단과 비교집단 학생에게 학기초와 학기말에 실시되었다. 인지적 측면의 평가는 미분방정식에 대한 학생들의 이해 유형 탐구를 목적으로 개발된 2개의 검사도구를 적용하였다. 이들 검사도구는 구체적으로 전통적인 미분방정식 수업에서 다루는 특정 유형의 미분방정식의 일반해를 찾는 문항 5개로 이루어진 절차적 검사 도구와 미분방정식의 중요한 아이디어와 개념의 관계적 이해 (Skemp, 1987)를 측정하기 위한 문항으로 구성된 개념적 검사 도구이다. 개념 검사도구 또한 다섯 개의 문항으로 이루어졌다. 이 두 검사도구는 연구자가 개발하여 한국 측 해석학 전공 수학자 1명, 수치해석 전공 수학자 1명을 포함한 4명의 수학자가 내용타당도를 검증하였다. 개발된 검사도구의 문항은 각각 8문항이었으나, 비교반의 미분방정식을 강의한 교수가 동의한 문항만을 최종적으로 사용하였다. 두 검사는 각 기존 집단의 학기말 시험 시간에 각 강좌의 학기말 시험과 함께 실시되었다.

다음은 정의적 영역을 검사하기 위해 사용한 수학에 대한 견해 조사 (VAMS) 문항의 예이다. <부록 1>에 VAMS 검사를 첨부하였다.

3. Reasoning skills that are taught in mathematics courses can be helpful to me: (a) in my everyday life. (b) if I were to major in mathematics or a related field.	3. 수학 시간에 배우는 추론 능력은: (a) 나의 일상생활에 유용하게 쓰인다. (b) 만약 내가 수학이나 관련된 분야를 전공한다면 유용하게 쓰일 것이다.

○	○	○	○	○	○
(a) ←				→ (b)	NEITHER
Only (a) Never (b)	More (a) Than (b)	Equally (a) and (b)	More (b) Than (a)	Only (b) Never (a)	(a) Nor (b)

<그림 1> VAMS 문항의 예

VAMS 각 문항을 살펴보면 전반부에 주어지는 질문의 주제부에 이어 주제부를 완성하는 (a), (b) 두 문장이 주어진다. (a)와 (b)는 수학에 관해 상반된 견해를 표현하는 문장이다. 응답자는 이들 두 문장에 대해 자신의 견해를 보다 근접하게 묘사하는 비중을 결정하여 그에 해당하는 항에 표시한다. 예를 들어, 응답지 좌측의 Only (a) Never (b)는 응답자가 항목 (a)의 내용에 전적으로 동의하며 항목 (b)의 내용에 동의하지 않는 경우이다. More (a) Than (b)는 응답자가 (a)와 (b)의 내용을 어느 정도 수긍하지만 (a)의 내용에 보다 동조하는 경우이다. 이처럼 응답자는 수학에 관한 자신의 관점을 가장 잘 표현하는 (a)와 (b) 사이의 조합을 결정하여 응답한다. 사전, 사후에 실시된 VAMS 문항은 코딩한 후 spss 10.0 으로 통계 분석하였다. 코딩절차는 문항개발자인 Carlson교수에게 자문을 받았다.

미분방정식의 지식을 측정하기 위한 두 검사 도구의 문항의 예가 <표 1>에 제시되었다. 두 검사도구는 각각 다섯 개의 문항으로 이루어져 있으며 표에서 알 수 있듯이 절차적 검사도구의 각 문항에 상응하는 문항이 개념적 검사도구에 일대일 대응되어 있다. 미분방정식의 학습목표는 전통적으로 기호조작 중심의 정확한 해(exact solution) 법 습득이므로 절차적 지식에는 비교집단의 학생들이 우세할 것이라는 예상을 할 수 있다. 반면에 관계적 이해를 측정할 수 있는 개념적 검사 문항은 IODE 집단이 우세할 것이라는 예상을 할 수 있다.

<표 1> 절차적 검사 문항과 개념적 검사 문항의 예

절차적 검사	개념적 검사
미분방정식 $\frac{dy}{dt}=3-2y$, $y(0)=4$일 때, $\lim_{t\to\infty} y(t)$를 구하여라.	초기조건이 $y(0)=4$인 미분방정식 $\frac{dy}{dt}=3-2y$의 해(exact solution)에서 $y=1.5$를 만족하는 t가 있을 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

학기말에 시행된 검사도구는 채점과정에서 후광 효과(halo effect)를 제거하기 위하여 각 집단의 학생의 이름이 밀봉되었으며, 첫 번째 연구자가 미국 측 책임 공동연구자와 함께 채점기준안을 설정한 후 두 번째 저자와 미국 측 공동연구자 2명이 검토하여 최종적인 채점기준이 마련되었다. 채점 기준의 예는 <표 2>에 제시되어 있다. 이 채점기준을 3명의 채점자(한 명은 대학에서 강의하는 수학자, 수학교육과 박사과정 학생 1명, 수학교육과 석사과정 학생 1명)를 선정하여 채점자 훈련을 한 후, 각자 채점을 하였으며 문항 점수에 불일치가 있을 경우 연구 책임자와 3명의 채점자가 논의하여 최종적으로 점수를 부여하였다.

<표 2> 채점기준의 예

3. 초기조건이 $y(0)=4$인 미분방정식 $\frac{dy}{dt}=3-2y$의 해(exact solution)에서 $y=1.5$를 만족하는 t가 있을 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

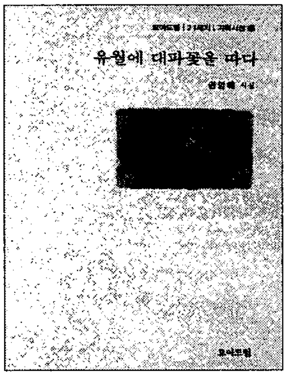
	해석적 접근	질적/그래프적 접근
0점	무응답 또는, 답(정답 또는 오답)을 썼지만 설명이 없는 경우	무응답 또는, 답(정답 또는 오답)을 썼지만 설명이 없는 경우
2점	특수해를 결정할 때 중요한 실수를 했거나 사소한 실수를 여러 번 했을 경우(예: 계산을 마치지 못한 경우, 일반해를 찾지 못하고, 초기조건이 특수해를 찾기 위해 사용된 경우)	주어진 미분방정식 $\frac{dy}{dt}=3-2y$의 평형해를 찾고, 그 해가 시간이 지남에 따라 감소할 것이라고 진술하고 결론(정답이든 오답이든)을 제시했지만 그 결론을 위한 정당화가 없는 경우
4점	초기조건이 y(0)=4인 특수해를 구할 때 사소한 계산실수를 하고, 그 잘못된 특수해로 인해 오답이 나온 경우 또는 구해진 특수해가 다른 결과이긴 하지만 바른 결론에 도달하기 위해 다른 접근을 사용한 것을 지지할 수 있는 증거가 있는 경우	유일성정리를 적용할 때 사소한 실수를 한 경우 또는 유일성정리가 미분방정식에 어떻게 적용되는지 충분한 증거를 제시하지 못한 경우(예: 편미분을 계산해서 -2를 얻었지만 이 정보가 유일성 정리의 조건과 어떻게 관련이 있는지를 분명히 제시하지 못한 경우)
5점	적당한 방법을 사용해서 주어진 초기조건을 가진 해 $y=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}e^{-2t}$를 바르게 결정하고, 이 해를 근거로 해가 1.5에 닿을 수 없다고 설명한 경우	유일성 정리를 적절하게 적용한 증거를 제시(예: 편미분값 -2는 1.5를 포함한 y 값의 적당한 범위내에서 편미분이 유계임을 의미하고 따라서 유일성 정리의 조건에 부합한다라고 분명하게 진술한 경우)하고 해가 1.5와 만나지 않는다고 바르게 결론지은 경우

3. 연구대상

본 프로젝트 교실에는 19명의 학생의 참여하였고 수업은 본 연구의 책임 연구자가 직접 담당하여 지도하였다. 프로젝트 교실 (IODE)의 구성원은 대부분 수학교육과 1학년 학생으로 특수교육과 학생 1명, 교육공학과 학생 2명도 포함되어 있었다. 그러나 자료 분석의 대상은 모든 검사에 참여한 16명이다. 프로젝트 교실의 교수-학습환경은 맥락문제 (context problem)을 통한 탐구지향적 토론 학습으로 이루어졌다. <그림 2>는 학생들이 변화율의 질적 의미에 대해 탐구할 수 있는 맥락문제의 예이다

학생들은 서너 명이 한 조를 이루어 활동지(worksheet)의 맥락문제를 소집단 토의를 통해 이해한 후 전체토론을 통해 문제의 의미를 공유한다. 문제의 의미가 공유된 후 학생들은 문제를 해결하기 위해 다시 소집단 토의를 하며 다시 전체토론을 통해 문제해결에 대한 지식을 공유한다. 소집단토의와 전체토론은 75분 수업시간에 2회 내지 4회까지 순환하여 반복된다. 담당교수는 학생들이 소집단 토의를 하는 동안에 교실을 순회하여 전체토론에 대한 아이디어를 얻고, 이러한 정보 하에 전체토론을 소집하며 학생들의 사고를 안내하는 발문을 통해 학생들이 스스로 수학적인 개념과 원리를 재발

<먹이사슬>



권영해 「유월에 대파꽃을 따다」

즐거운 먹이 사슬

흰수염고래는 한입에
수십만 마리의 크릴새우를 먹어치운다
수많은 새우가 한 마리의 고래를 즐겁게 한다

아프리카 사바나에는
한 마리의 얼룩말을 두고
표범과 재칼과 대머리독수리들이 달라붙어
식사를 즐긴다
말 한 마리가 여러 입을 살린다

주위를 둘러보면
세상은 하나의 정글
우리는 누군가의 적이며
모두의 친구이다

http://poemalbatross.com.ne.kr/jeulgeon%20meogi.htm

※ 재원이는 고등학교 때 담임선생님이셨던 권영해선생님의 홈페이지에서 선생님이 지으신 위의 시를 읽고, 다음과 같은 두 연립변화율방정식(system of rate of change equations)을 생각하였다.

<u>연립변화율방정식 A</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x\left(1-\dfrac{x}{10}\right) - 20xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -5y + \dfrac{xy}{20} \end{cases}$$

<u>연립변화율방정식 B</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.3x - \dfrac{xy}{100} \\ \dfrac{dy}{dt} = 15y\left(1-\dfrac{y}{17}\right) + 25xy \end{cases}$$

위의 식에서 x와 y는 각각 시간 t에 대한 먹이사슬의 두 종(포식자와 피식자)의 수를 의미한다. A, B의 두 연립변화율방정식 중 하나는 흰수염고래와 크릴새우의 관계에서와 같이 포식자가 피식자 보다 큰 동물인 경우이고, 다른 하나는 대머리독수리와 얼룩말의 관계에서와 같이 피식자가 포식자 보다 큰 동물인 경우를 나타낸다. 이 때, 여러 마리의 포식자가 한 마리의 피식자를 먹는 경우에는 한 마리의 피식자가 포식자 수를 증가시키는데 막대한 영향을 미칠 수 있는 것이다. 각각의 상황을 나타내는 연립변화율방정식이 무엇인지 생각해 보고, 그 이유를 다양한 방법으로 설명해 보자.

<점박이 올빼미>

※ 한 생물학자는 캐나다 Pacific Northwest의 숲 속에 살고 있는 점박이 올빼미 수의 변화에 대한 연구를 하고 있다. 이 과학자가 점박이 올빼미의 수에 대한 모델로 사용한 변화율방정식은

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{P}{5}\right)\left(\frac{P}{8} - 1\right)$$

이다(단, P의 단위는 올빼미 100마리이고, t의 단위는 년(年)이다).

...(중략)...

3. 1961년, 미국의 기상학자 Edward Lorenz(1917~)는 복잡하게 움직이는 대기의 순환에 관한 본질적인 성격을 잃지 않으면서 간단하게 단순화시킨 방정식을 고안해서 이론적으로 대기의 모델을 연구하고 있었다. ...(중략)...극히 사소한 차이가 가면 갈수록 증폭되어 걷잡을 수 없이 그래프를 흐트려 놓고 있었다. 그것은 바로 카오스였다...(중략)...1972년 Washington의 회의에서는 갈매기 대신에 더욱 시적인 표현인 나비로 발전시켜, "예측: 브라질에 있는 나비의 날개짓 때문에 텍사스에 토네이도가 발생하다"를 발표하였다. 이처럼 초기치의 미묘한 차이가 크게 증폭되어 엉뚱한 결과를 나타내는 것을 「나비효과(butterfly effect)라고 부른다.
이러한 Edward Lorenz의 나비효과(butterfly effect)를 앞에서 살펴본 점박이 올빼미의 경우와 연관지어 설명해 보자.

<Cooling coffee>

※ 아라네 조 친구들은 커피를 마시며 이야기를 나누다가 뜨거운 커피의 온도가 식어가는 비율을 나타내는 변화율방정식을 만들어보기로 하였다. 그들의 아이디어는 시간에 따라 변하는 커피의 온도를 재고, 그들이 측정한 자료로부터 변화율방정식을 만드는 것이었다.
아래의 표는 아라네 조에서 식어가는 커피의 온도를 측정한 자료이다. 실온은 21℃이었고, 커피의 온도는 14분 동안 2분 간격으로 측정하였다.

<그림 2> 맥락문제의 예

명할 수 있도록 안내하였다. 따라서 프로젝트 교실에서 교수자의 역할은 지식의 전달자라기보다는 촉진자(facilitator) 혹은 안내자 (guider)였다. 본 프로젝트 교실은 수학자 한 명과 수학교육학 전공자 한 명, 대학원생 3명에 의해 매 차시 수업 관찰 후 필드 노트가 작성되었고 수업에 대한 반성과 토의가 이루어졌다. 모든 수업은 두 대의 캠코더를 통해 녹화되었다. 수업은 크게 전체토론과 소집단토론으로 나뉘는데 전체토론 상황에서 녹화는 학급 전체를 대상으로 하며 소집단토론 상황에서 각각의 캠코더는 특정 소집단의 상호작용에 초점을 두었다. 학기 초 한 차례 전체적으로 조를 재편성한 이후 조편성이 유지되었으므로 소집단 녹화 자료는 사례연구에 유용한 자료를 제공한다.

비교집단은 같은 학교 수학과에서 개설된 미분방정식을 수강하는 30 명의 수학과 학생들로 구성되어 있다. 재수강을 하는 학생을 제외하고는 대부분의 학생이 수학과 2학년이다. 비교집단을 지도한 교수는 해석학을 전공한 수학자로 20년 이상 미분방정식과 해석학관련 과목을 강의하고 있으며, 간혹 교수가 지명한 학생이 주어진 미분방정식의 해법을 발표하는 기회가 있었으나 설명중심의 강의가 주를 이루고 있었다.

IODE 집단과 비교집단의 미분방정식 수강 전의 수학적 능력을 비교하기 위하여 대학수학능력 검사의 수리영역 점수를 비교하였다. 자료분석의 대상은 모든 검사도구(VAMS, 절차적 검사도구, 개념적 검사도구)와 대학수학능력 검사 점수의 입수가 가능한 비교집단 30명과 IODE 집단 16명이다. 각 집단의 학생들이 동학년으로 구성된 것이 아니기 때문에 원점수가 비교하기는 곤란하여 백분율점수로 두 집단의 차이검증을 실시하였다. <표 3>은 두 집단의 평균과 표준편차를 나타낸다.

<표 3> IODE 집단과 비교집단의 대학수학능력검사 (수리영역) 백분율 점수의 평균과 표준편차

	집단	N	평균	표준편차	t값	유의확률
수능	IODE 집단	16	91.69	5.20	1.66	.10
백분율	비교집단	30	88.34	7.09		

IODE 집단의 학생의 수리영역 백분율 점수가 비교집단에 비해 약 3점 정도 높았으나 t 검증 결과 유의수준 .05에서 통계적으로 유의한 차이가 없었다. 따라서 미분방정식을 수강하기 전에 두 집단의 학생의 수학적 능력에서 차이가 없다고 볼 수 있다.

IV. 자료 분석

자료 분석의 대상은 집단의 사전능력을 검증할 수 있는 자료인 대학수학능력검사의 수리능력 점수와, 정의적 영역을 측정할 수 있는 VAMS 조사, 절차적 검사와 개념적 도구 점수로 제한하여 최종적으로 비교집단 30명과 IODE 집단 16명으로 분석하였다.

1. 수학에 대한 견해 조사 (Views About Mathematics Survey)

VAMS를 개정한 검사도구의 공분산분석(ANCOVA)을 통해 실험집단과 비교집단의 수학에 대한 견해를 비교분석하였다. 대부분의 교육연구의 경우에 학생들의 사전 능력을 측정하여 각 처치 집단에 똑같이 할당할 수가 없다. 본 연구 역시 실험집단의 무선화(randomized) 단계를 거치지 않고 이미 정해져 있는 강좌의 학생을 대상으로 실험집단과 비교집단을 구분하기 때문에 연구대상의 출발점 상태 즉, 학생들의 수학에 대한 견해를 통제하지 못하는 것이다. 이러한 경우 실험 투입 이후에 측정한 사후 점수로 '사전에 학생들이 가지고 있는 견해(사전점수로 측정)'라는 매개변수의 영향을 제거하여 분석하는 방법이 공분산분석이다. 그러므로 공분산분석을 사용할 경우 사전 능력에 따라 학생들을 인위적으로 배정할 필요가 없이 각기 다른 실험 처치를 받은 후에 측정된 사후 점수에서 사전 능력이 준 영향을 제거하면 된다. <표 4>는 VAMS의 공분산 분석의 결과를 보여준다.

<표 4> VAMS의 집단 간 공분산분석 결과

집단					
IODE 집단 (N=16)		비교집단 (N=30)			
평균 (표준편차)	교정 평균	평균 (표준편차)	교정 평균	F 값	유의확률
3.65 (.21)	3.65	3.57 (.23)	3.57	2.27	.14

<표 4>에 따르면 비교집단과 IODE 집단의 수학에 대한 견해의 사전 점수를 같게 했을 때, RME 기반 교수-학습 환경에서 학습한 IODE 집단의 교정 평균점수가 비교집단보다 높음을 알 수 있다. 공분산분석 결과 VAMS의 총점에서 F값이 2.27으로 유의수준 .05에서 유의하지 않았다. 또한 각 문항별로 공분산분석을 실시한 결과 모든 문항이 유의수준 .05에서 통계적으로 유의하지 않았다. 수학에 관한 견해를 포함하는 정의적 영역은 장기간에 형성된다는 여러 연구 결과(예를 들어, Greer et als., 2002; Lampert, 1990)를 참조할 때, 이 결과는 한 학기라는 기간이 수학에 대한 견해를 변화시키기에는 짧은 기간이라고도 해석할 수 있으나, 정의적 측면에서의 변화는 양적 연구보다는 질적 연구 방법으로 접근하는 것이 적절할 수 있다. 실제로 IODE 프로젝트 교실에서 수집된 수업녹화자료를 질적으로 담화분석한 주미경과 권오남(2003)의 연구결과에 의하면 소집단 토론과 전체 토론에서 학생들이 사용한 언어에서 삼인칭(third-person perspective) 에서 일인칭(first-person perspective)으로 변화하는 경향을 보이는 것으로 나타났다. 수학적 의사소통에서 나타나는 이와 같은 화법 인칭의 변화는 학생들이 수학이라는 지식을 바라보는 관점에서의 근원적인 변화, 구체적으로, 수학적 지식에 대한 친밀감과 소유의식(ownership)과 독립적인 학습 주체로서 자신의 역할에 대한 자각, 그리고 수학을 세계 속에서의 산 경험을 가진 인간 지성의 산물로 보는 관점의 발생을 의미하며 이는 학생들의 수학에 대한 정의적 태도에서의 중요한 변화가 IODE 프로젝트 교실 참여를 통해 이루어졌음을 보여준다.

2. 절차적 검사 도구

미분방정식 강의에서 중시되는 기능의 숙달 정도를 평가하는 것을 목적으로 개발된 5 문항으로 이루어져 있으며 미분방정식과 관련된 절차적 지식 중심의 해석적 기술(analytic technique)을 측정하고 있다. 다섯 문항은 변수 분리법을 사용한 미분방정식의 해, 주어진 일계 미분방정식의 특수해의 극한 문제, 대다수의 미분방정식 교과서에서 다루는 소금물 용액의 변화를 미분방정식으로 모델링하는 문제, 연립미분방정식의 해를 찾는 문항으로 구성되어 있다. 비교집단의 교수적 설계의 목적이 절차적 검사의 평가목표와 일관되기 때문에 비교집단의 평균점수가 IODE 집단의 평균점수보다 높으리라 예상할 수 있다. 이에 미분방정식의 전형적인 문제해결에서의 IODE 집단과 비교집단간의 차이를 검증하기 위해 t 검증을 실시하였다. 그 결과를 총점과 문항별로 <표 5>에 제시하였다.

<표 5> 절차적 검사 도구의 집단 간 t 검증

	집단	N	평균	표준편차	t값	유의확률
1	IODE 집단	16	4.00	1.41	.54	.595
	비교집단	30	3.77	1.41		
2	IODE 집단	16	4.75	.45	-1.52	.145
	비교집단	30	4.93	.25		
3	IODE 집단	16	3.94	1.18	1.559	.126
	비교집단	30	3.20	2.02		
4	IODE 집단	16	4.69	1.25	-.037	.971
	비교집단	30	4.70	1.02		
5	IODE 집단	16	4.50	.97	.561	.577
	비교집단	30	4.30	1.24		
총점	IODE 집단	16	4.38	.48	1.08	.29
	비교집단	30	4.18	.63		

해석적 기술 중심의 전형적인 검사 점수의 총점에서 IODE 집단의 점수가 4.38로 비교집단의 총점보다 .30 높으나 유의수준 .05에서 통계적으로 유의한 차이는 없는 것으로 나타났다. 문항별 분석을 살펴보면 모든 문항에서는 유의한 차이가 없었다. IODE의 교수학적 설계의 초점이 해석적 기술의 습득에 있지 않다는 사실에 비추어 보면 이 결과는 차후의 미분방정식 수업 개선을 위해 의미 있는 시사점을 제공한다고 할 수 있다.

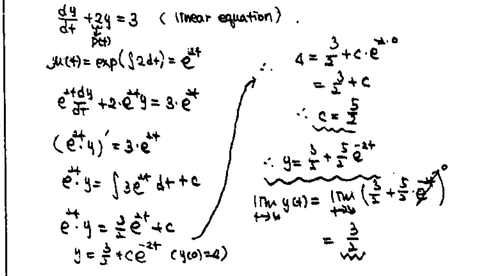
문항을 심층적으로 분석하기 위해 학생들이 사용한 문제해결전략을 분석하였다. 일계 미분방정식의 특수해의 장기적 예측을 알아보는 극한 문제는 변수 분리법을 사용하여 구체적으로 극한을 구하는 해석적 방법(analytic method)으로도 접근할 수 있으며, 위상선(flow line)을 그려 초기 조건에 따라 해의 장기적인 예측을 할 수 있는 질적인 접근과 그래프적인 접근(qualitative/graphical method)을 동시에 사용할 수 있는 방법이 가능하다. 두 집단의 학생들의 사용한 방법을 분류하여 범주화하여 그 빈도수를 <표 6>에 제시하였다.

<표 6> 장기적 예측 문제 해결에서 사용된 방법의 빈도수

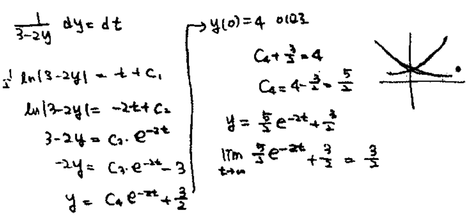
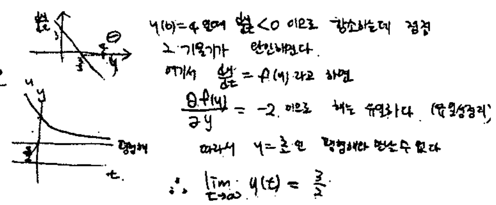
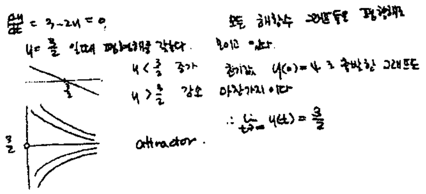
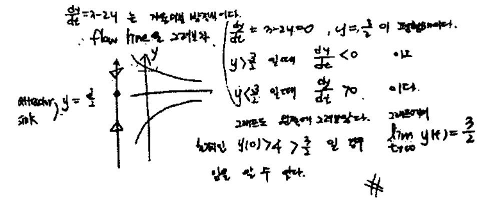
방법	해석적 방법	질적 / 그래프적 방법	합계
IODE 집단의 학생수	10	6	16
비교집단의 학생수	30	0	30

IODE 집단의 학생들의 해석적 방법의 빈도수가 많으나 질적/그래프적인 방법을 사용한 학생이 37% 에 이른다. 이에 반해 비교집단에서는 질적/그래프적인 방법을 사용한 학생이 단 한 명도 없이 모두 해석적인 기술을 이용하여 문제를 해결하였다. 이 문항을 해결하기 위해 학생들이 사용된 전략을 내용 분석하여 <그림 3>에 제시하였다.

위의 <표 6>에 의하면 장기적 예측 문제에서 두 집단의 평균 차이는 유의하지 않았으나 두 집단의 학생들이 사용한 방법을 분석한 <그림 3>을 보면 그들이 사용한 방법의 다양성에서는 극명한 차이가 있음을 알 수 있다. 뿐만 아니라, 기존의 연구 결과 (Habre, 2000; Rasmussen, 2001)에 따르면 미분방정식의 해를 함수로 파악하는 것이 학생들이 경험하는 대표적인 인지적 곤란임에 반해, IODE 집단의 학생들은 미분방정식의 해를 자연스럽게 함수로 표현하여 문제를 해결을 하고 있음을 볼 수 있다.

문항	비교 집단
미분방정식 $\frac{dy}{dt}=3-2y,\ y(0)=4$일 때, $\lim_{t\to\infty} y(t)$를 구하여라.	 변수분리법

IODE 집단

 변수분리법	 질적 방법 - 유일성정리
 질적 방법 - 평형해	 질적 방법 - 위상선(flow line)

<그림 3> 장기적 예측 문제 해결에 사용된 방법의 내용 분석

3. 개념적 검사 도구

개념 검사 도구는 미분방정식의 중요한 아이디어와 개념의 관계적 이해를 측정하기 위해 개발되었다. 총 다섯 문항으로 이루어져 있으며, 미분방정식과 변화율의 관계에 대한 이해에 관한 문항과 미분방정식의 해의 장기적인 예측을 판단하는 문항, 모델링 관점에 의한 문항과 미분방정식의 해공간(solution space)을 구조화하는 문항으로 구성되어 있다. 이는 미분방정식 교수-학습의 개혁론자들이 주장하는 미분방정식의 큰 아이디어(big idea)를 반영한 것이다. <표 7>은 개념적 검사에서 두집단의 평균 점수를 보여준다.

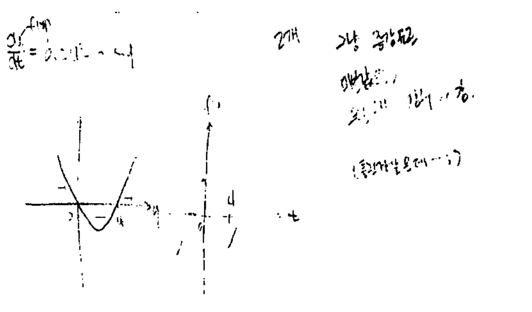
<표 7> 개념적 검사 도구의 집단 간 t 검증

번호	집단	N	평균	표준편차	t 값	유의확률
1	IODE 집단	16	2.25	1.13	7.24	.000
	비교집단	30	.13	.43		
2	IODE 집단	16	4.06	1.48	8.12	.000
	비교집단	30	.63	1.30		
3	IODE 집단	16	3.13	1.46	8.47	.000
	비교집단	30	.03	.18		
4	IODE 집단	16	3.00	2.10	4.07	.001
	비교집단	30	.77	.90		
5	IODE 집단	16	3.81	1.91	7.23	.000
	비교집단	30	.17	.91		
총점	IODE 집단	16	3.25	.96	11.35	.000
	비교집단	30	.35	.49		

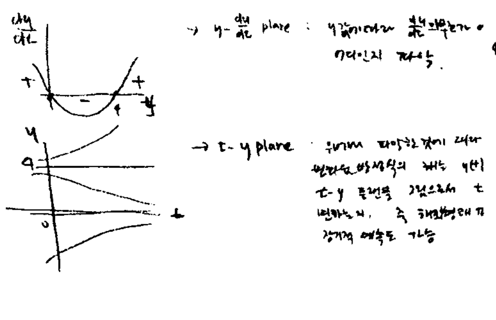
개념적 검사 총점에서 두 집단 간 차이를 t검증한 결과 유의수준 .001에서 통계적으로 유의하게 IODE 집단이 비교집단에 비해 높았다. 문항별 분석에서도 예외없이 모든 문항에서 IODE 집단의 통계적으로 유의하게 비교집단보다 높았다. 이 결과는 IODE 학생들 이 미분방정식의 해 중심인 전통적인 교수-학습의 비교집단보다 미분방정식의 개념을 관계적으로 이해하고 있다는 것을 의미한다. 일계미분방정식의 일반해의 해 공간(solution space)을 그래프의 경향에 따라 분류하는 문제에서 두 집단의 학생들이 사용한 전략을 비교한 <그림 4>를 보면 통계적 분석뿐만 아니라 문항의 질적 분석에서도 두 집단의 차이를 보여준다. IODE 집단의 학생들이 다양한 방법을 사용하고 있으며 그 이유를 표현함에 있어서도 차이가 있음을 알 수 있다. 따라서 IODE 교수설계가 개념의 관계적 이해 신장에 효과가 있다고 결론지을 수 있다.

V. 결론 및 함의

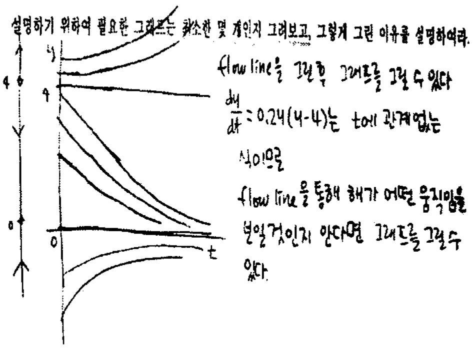
대학은 설립 이념이나 교육의 목적 및 대상에 있어 초·중등학교와는 구별된다. 초·중등학교가 사회의 일원으로서 기능을 수행하는데 필요한 보편적이고 기초적인 내용을 습득하게 하는 것이 목적이라면, 대학은 이를 바탕으로 학문을 탐구하고 사회의 지도자를 양성하는 것이 목적이다. 그런데 대부분의 교수들은 이러한 대학의 고등교육으로서의 기능에 대하여 사회적 책임감을 가지고 지도하기보다는, 과거의 관습에 따르거나 개인의 경험을 바탕으로 학생들을 가르치고 있다. 특히, 많이 알면

문항	비교 집단
미분방정식 $\frac{dy}{dt}=0.2y(y-4)$에서 초기 조건에 관계없이 모든 해(즉, 일반해) 함수의 패턴을 설명하기 위하여 필요한 그래프는 최소한 몇 개인지 그려보고, 그렇게 그린 이유를 설명하여라.	 증감표

IODE 집단



증감표와 위상선



위상선

<그림 4> 해공간을 구조화하는 문제 해결에 사용된 방법의 내용 분석

잘 가르칠 수 있다는 논리를 바탕으로 대학교육에 임하고 있는 경향을 보인다. 그러나 교수방법이 교육의 목적을 달성하기 위한 수단이라는 의미로 해석될 때, 이는 대학의 수업활동에 관련되는 지식, 기술, 자질 태도 등이 향상될 수 있도록 도와주는 대학 수준의 체계적인 모든 활동 및 지원이라고 여겨지며, 지속적인 연구가 필요한 부분이라는 것을 알 수 있다.

그러나 우리나라 대학교육에 있어서 때때로 교수들은 연구 능력은 갖추고 있어도, 교수방법에 대해서는 관심이 없다는 것을 부인하기는 어렵다 (배천웅, 이준옥, 최원형, 1996). 실제로 황정규 (1985)의 연구결과에서도 정보 전달 방법으로 이루어지는 암기 위주의 설명적인 교수방법의 형태가 64.4%로 나타났으며, 우리나라 대학의 교양교육의 실태에 대하여 대학생 213명을 면담하여 교수방법에 대하여 조사한 결과에서도 여전히 암기 위주의 강의 중심의 교수 주도 수업이 42.2%로 가장 높았다 (전성연, 1995). 이와 같은 결과를 볼 때 대학의 교육에서 설명 중심의 강의가 가장 많이 사용되는 교수방법임을 알 수 있다.

물론 교수방법을 몇 가지로 유형화하고 어떤 방법이 효과적이거나 혹은 비효과적이라고 단정할 수는 없다. 강의식 수업도 효율적으로 이루어진다면 효과적일 수 있으며, 강의에 의해 수업이 진행된다고 하여도 교수가 구체적으로 어떠한 행동을 하는가에 따라서 강의의 효과는 달라질 수 있다. 그런데 담당교수의 교수방법에 대한 학생들의 반응을 조사한 연구에서 흥미와 관심 유발이 부족하다는 항목이 가장 많게 나타났고, 강의는 체계적인 준비를 바탕으로 필요한 지식과 정보를 전달하는 방법임에도 불구하고 강의 준비가 철저하게 이루어지지 않고 있으며, 더구나 학생들의 이해 수준을 고려하지 않는 일방적이고 획일적인 방법으로 이루어지고 있다는 점을 지적하고 있다는 것은 우리나라 대학의 강의식 수업이 비효과적임을 보여준다고 할 수 있다 (배천웅, 이준옥, 최원형, 1996).

이런 현상은 수학교육에서도 예외라고 할 수 없다. 이성호(1989)의 연구에서 토론과 논술이 주가 되어야 하는 인문과학이나 사회과학 분야는 물론이고, 수학과가 포함된 자연계 전공과목에서 개설된 강좌의 82.6%, 자연계 교양과목에서는 90%가 설명 중심의 강의식 수업이며, 탐구나 토의법으로 지도한 강좌가 0%임을 보여주는 자료가 이를 입증하고 있다. 특히 대학이 설립된 이후 지속적으로 안정된 강좌를 확보하고 있던 수학과는 1980년대부터 다양하게 개발된 교육 환경의 변화를 받아들여 교육 내용과 교육 방법, 교육 과정을 개선하는데 소극적일 수 밖에 없었다고 할 수 있다 (김덕선, 양정모, 이상구, 2004).

그러나 최근 대학교육이 초·중등학교 이상으로 대중화되고, 전공도 학부제로 운영됨에 따라서 대학에서의 교육환경과 교과과정 및 교육방법에도 많은 변화가 생기고 있으며, 현대사회에서 필요로 하는 암호론, 금융수학, 보험수학 등과 같은 과목이 수학전공 학생들에게 필요하게 되었으며, 선형대수학, 미분적분학, 이산수학과 같은 수학 과목은 경상계열이나 공학계열 학생들에게 필수적인 과목이 되면서 다양한 교육방법에 대한 중요성이 대두되고 있다. 김덕선·양정모·이상구(2004)는 이런 추세에 따라 대학 멀티미디어 콘텐츠를 개발하여 시각적이고 직관적으로 수학적 내용을 이해하고 답함으로 학습할 수 있는 교수방법을 개발하는 등 대학 수학교육의 새로운 모델을 개발하고자 하기도 하였다. 그러나 아직은 내용을 학습자에게 어떻게 전달할 것인가에 초점을 둔 하향지향적(top-down) 접근으로 보여지며, 본 연구에서는 이러한 문제를 인식하여 학습자 중심의 상향지향적(bottom-up) 접근으로의 교수방법으로 RME 이론을 근간으로 설계한 탐구지향 미분방정식의 교수 설계(instrucational design)가 대안으로서의 가능성에 주목하였다.

이에, 본 논문에서는 RME 이론에 기반을 둔 탐구지향적 미분방정식 수업이 학생들의 수학에 대한 견해와 미분방정식에서의 주요 기능(skill)과 개념 학습에 주는 효과를 분석하였다. 학습의 정의적 측면에 대한 IODE 수업 효과가 본 연구에서 사용한 설문지 비교분석 결과를 통해서는 분명히 드러나지 않았으나, 교실 담화 자료의 질적 분석 결과는 IODE 수업이 학생들의 정의적 태도 개선에 긍정적으로 기여하고 있음을 보여주었다. 뿐만 아니라, 전통적인 미분방정식 지도에서 강조되어온 해석적 기술에 초점을 둔 절차 도구 분석 결과에서도 차이가 없는 것으로 나타났다. 학습의 인지적 측면을 평가하기 위해 개발된 개념 도구의 분석 결과는 IODE의 안

내된 발견(guided reinvention)에 의한 교수-학습이 해석적 기술(analytic technique)을 강조하는 전통적인 교수학습에 비해 관계적 이해의 발달에서 유의미한 효과의 차이를 있었음을 보여주었다. 또한 전통적인 미분방정식 지도에서 강조되어온 해석적 기술에 초점을 둔 절차 도구 분석 결과에서도 차이가 없는 것으로 나타났음을 감안할 때, 수학적 의미의 협의에 기초한 수학화를 강조한 IODE 프로젝트가 기술적 발달과 상충되지 않으며 나아가 수학적 기술을 의미에 기초하여 학습함으로써 장기적으로는 수학적 기술의 발달 및 파지에 효과적인 지도 방안이 될 수 있음을 시사한다. IODE 프로젝트에 참여한 학생들의 전략이 비교 집단의 학생들이 사용한 전략보다 더 다양하고 융통성 있는 전략을 사용한 것으로 분석되어 이 가정을 뒷받침할 수 있는 증거를 찾기 위해서는 보다 심층적인 분석을 할 필요가 있다.

마지막으로, 본 연구의 분석 결과에 기초하여 IODE 수업개발연구프로젝트가 사범대학 수학교사교육에 제공하는 시사점에 대해 논의하고자 한다. IODE 프로젝트 교실이 학생들의 수학에 대한 정의적 태도의 발달을 긍정적으로 촉진했음을 논의한 바 있다. 이와 같은 분석 결과를 IODE 프로젝트 교실 참여자가 다름 아닌 사범대학 수학교육과 재학생이었다는 점과 연관지어 생각할 때, IODE의 탐구지향적 수업 모델이 미래의 수학교사에게 수학에 대해 긍정적인 정의적 태도를 고취하는데 유용한 교사교육모델을 제공한다고 할 수 있다. 수학에 대한 정의적 태도의 중요성은 현재의 수학교육에서 널리 공감되고 있다. NCTM이 1989년 발간하여 세계의 수학교육에 큰 반향을 일으킨 "The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics"에서도 수학의 가치를 이해하는 것을 학생들을 위한 수학교육 목표의 첫 번째 항목으로 제시하고 있다. 이처럼 현대의 수학교육은 단순히 수학적 기능만을 전달하는 것에서 탈피하여 다원화된 사회를 창의적·민주적으로 주도할 수 있는 역량을 배양하는 것을 추구한다. 이러한 흐름 속에서, 우리나라의 현 7차 수학과 교육과정에서도 학생들의 정의적 태도의 긍정적인 발달을 통한 수학적 힘의 함양을 강조하고 있다 (교육부, 1997). 그러나 정의적 태도는 명제로서 교육되는 것이 아니라 학교수학의 수학적 관행에 참여하는 과정을 통해 점진적으로 형성되고 재구성된다 (D'Andrade, 1981; Greer, et als, 2002; Lampert, 1990; Schoenfeld, 1989; Yackel & Rasmussen, 2002). 그렇다면, 긍정적인 정의적 태도의 형성을 위해 그 목적에 부합하는 수학교실의 구성과 운영은 핵심적이다. 특히 IODE 교실담화의 질적 분석에 의하면, 학생들의 정의적 태도 재형성에 교사의 수학에 대한 정의적 태도가 중요한 역할을 담당함을 볼 수 있다 (Ju, & Kwon, 2003). 따라서 미래의 수학교사들에게 수학에 대해 긍정적인 정의적 태도를 고양하기 위한 체계적인 노력이 사범대학 수학교사교육에 요구되며 IODE는 이러한 필요에 부합하는 교사교육모델을 제공한다.

본 연구 분석 결과를 통해 입증된 IODE의 인지적·정의적 측면에서의 효과는 현대의 수학교육이 추구하는 교육적 이상을 현장에서 구현할 수 있는 미래의 수학교사교육모델이 될 수 있음을 시사하며 이러한 가능성에 대한 체계적인 연구에 기반을 둔 수학교사교육 프로그램의 개발 및 확장이 필요하다.

참 고 문 헌

김덕선·양정모·이상구 (2004). 대학에서의 수학교육 환경-현재와 미래. 한국수학교육학회 수학교육논문집 **18(2)**, pp.35-45.

배천웅·이준옥·최원형 (1996). 교수방법의 탐구, 대전: 한남대학교출판부.

이성호 (1989). 한국의 대학교수, 서울: 학지사.

전성연 (1995). 대학의 교육과정과 수업, 서울: 학지사.

황정규 (1985). 한국 대학생의 교수-학습 방법의 실태와 문제점 탐색, 서울: 한국대학협의회.

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 교육부.

Artigue, M. (1992). Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel, & E. Dubinsky, (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* pp.109-132, Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Borrelli, R. & Coleman, C. (1998). *Differential equations: A modeling perspective*, NY: John Wiley & Sons, Inc.

Borrelli, R. & Coleman, C. (1999). Modeling and visualization in the introductory ODE course. In M.

J. Kallaher (Ed.), *Revolutions in differential equations* pp.1-12, Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Burton, L. & Sinclair, N. (2004). *Mathematicians as enquirers: learning about learning mathematics*, Boston, MA: Kluwer Academic Publishers

Carlson, M. (1997). Views about mathematics survey: design and results. *Proceedings of the 18th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* **2**, pp.395-402.

Carlson, M. (1999). The mathematical behavior of six successful mathematics graduate students: Influences leading to mathematical success. *Educational Studies in Mathematics* **40**, pp.237-258.

Cobb, P. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American Educational Research Journal* **29(3)**, pp.573-604

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American Educational Research Journal* **29**, pp.573-604.

D'Andrade, R. G. (1981). The cultural part of cognition. *Cognitive Science* **5**, pp.179-195.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1993). Thoughts on teaching mechanics: didactical phenomenology of the concept of force. *Educational Studies in Mathematics* **25**, pp.71-87.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* **25(3)**, pp.443-471.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning* **2**, pp.155-177.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), Symbolizing and communication in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design pp. 225-273, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Greer, B.; verschaffel, L. & Corte, E. D. (2002). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* pp.271-292 Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, **18(4)**, 455-472.

Ju, M. K., & Kwon, O. N. (2003). Perspective mode change in mathematical narative: Social transformation of views of mathematics in a university differential equations class, *Paper presented at the 7th annual conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Scottsdale, Arizona.

Kallaher, M. J. (Ed.). (1999). *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology*, Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Kwon, O. N. (2003). Guided reinvention of Euler algorithm: an analysis of progressive mathematization in RME-based differential equations course. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, **42(3)**, pp.387-402.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal* **27**, pp.29-63.

NCTM (1989). *The curriculum and evaluation standards for school mathematics,* Reston, VA: Author.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior* **20**, pp.55-87.

Rasmussen, C. & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **21(2)**, pp.161-172.

Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior* **23(3)**, pp.301-323.

Rasmussen, C., Yackel, E. & King, K. (2003). Social and sociomathematical norms in the mathematics classroom. In H. Schoen & R. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12* pp.143-154, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rasmussen, C.; Zandieh, M.; King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning* **7(1)**, pp.51-73.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. In E. von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* pp.13-51, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior, *Journal for Research in Mathematics Education* **20**, pp.338-355.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* **7**, pp.20-26.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stephan, M. & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior* **21**, pp.459-490.

Toulmin, S. (1969). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior* **21**, pp.423-440.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education* **27**, pp.458-477.

Yackel, E. & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Toerner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* pp.313-330, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior* **19(3)**, pp.275-287.

Zandieh, M. & McDonald, M. (2000). Student understanding of equilibrium solution in differential equations. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* pp. 253-258, Columbus, OH: ERIC.

Effects of Inquiry-oriented Differential Equations Instruction Based on the Realistic Mathematics Education

Kwon, Oh Nam
Department of Mathematics Education., Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea
E-mail: onkwon@snu.ac.kr

Ju, Mikyung
Department of Mathematics Education., Silla University, Busan, 617-736, Korea
E-mail: mkju@silla,ac.kr

This paper reports on the main results of a study that compared students' beliefs, skills, and understandings in an innovative approach to differential equations to more conventional approaches. The innovative approach, referred to as the Realistic Mathematics Education-Based Differential Equations (IODE) project, capitalizes on advances within the discipline of mathematics and on advances within the discipline of mathematics education, both at the K-12 and tertiary levels. Given the integrated leveraging of developments both within mathematics and mathematics education, the IODE project is paradigmatic of an approach to innovation in undergraduate mathematics, potentially serving as a model for other undergraduate course reforms. The effect of the IODE projection maintaining desirable mathematical views and in developing students' skills and relational understandings as judged by the three assessment instruments was largely positive. These findings support our conjecture that, when coupled with careful attention to developments within mathematics itself, theoretical advances that initially grew out research in elementary school classrooms can be profitably leveraged and adapted to the university setting. As such, our work in differential equations may serve as a model for others interested in exploring the prospects and possibilities of improving undergraduate mathematics education in ways that connect with innovations at the K-12 level

* ZDM classification : D45
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Word : Realistic Mathematics Education, Differential Equations, Undergraduate Mathematics Education, Developmental Research, Views about Mathematics Survey

<부록 1> VAMS 설문지

Views About Mathematics Survey[1]
수학에 대한 견해를 알아보는 설문지

이 설문지 조사는 대학생들의 수학에 대한 견해와 이해를 알아보고자 하는 연구의 일부입니다. 본 설문지는 참고자료로만 활용될 것이며 본 설문지 결과에 대한 개인정보는 외부에 노출되지 않을 것입니다. 또한 담당 교수님은 학생 개개인의 설문지 결과를 볼 수 없으며 본 설문 조사는 강의 성적과 무관합니다.

이 설문지는 32개의 선택형문항으로 되어있습니다. 각 문항에는 미완성 문장의 후반부를 완성하기 위한 두 개의 다른 내용의 보기가 주어집니다. 여러분은 그 문항에 대한 여러분의 생각을 가장 잘 나타내는 칸에 표시(√)를 하면 됩니다. 예를 들면 다음과 같습니다:

예시 문항	When I go to the beach: (a) I swim in the water. (b) I stay ashore.	내가 해변에 간다면: (a) 나는 수영을 한다. (b) 나는 해변에서 쉰다.

○	○	○	○	○	○
(a) ◀ Only (a) Never (b)	More (a) Than (b)	Equally (a) and (b)	More (b) Than (a)	▶ (b) Only (b) Never (a)	NEITHER (a) Nor (b)

만약 여러분이 수영만 한다면 첫번째 칸에 표시를 하면 됩니다. 두 번째 칸은 수영도 하고 해변에서 쉬기도 하지만 수영을 더 많이 하는 경우입니다. 수영을 하는 시간과 해변에서 쉬는 시간이 비슷하다면 세 번째 칸에 해당하고, 수영을 하는 시간보다 해변에서 쉬는 시간이 더 많다면 네 번째 칸입니다. 만약 수영은 하지 않고 오로지 해변에서 쉬기만 한다면 다섯번째 칸에 표시를 하면 됩니다. 그리고 마지막 여섯번째 칸은 수영을 하는 것이나 해변에서 쉬는 것에 아무것도 해당되지 않는 경우입니다.

※ 다음을 적어주세요.

학교명		과목명		과목수강시간	
학과		학번		이름	
설문조사일					

※ 다음의 사항을 반드시 지켜주세요:

- 각 문항마다 반드시 하나만 고르세요.
- 모든 문항에 빠짐없이 대답해 주세요.
- 어떤 대답이 적절할 것인지 추측하려 하지 말고, 여러분의 생각을 있는 그대로 솔직하게 대답해주세요.
- 이 설문지에 답하는데 약 10분의 시간이 주어질 것입니다.

[1] 본 설문지는 Arizona State University의 the Modeling Instruction and ACEPT 연구진에 의하여 개발된 설문지입니다. 따라서 설문지의 원문은 영어로 되어있지만, 여러분의 이해를 돕기 위해서 한글로 번역을 해 놓았습니다. 한글과 영문을 참고하여 문제에 대답해주세요.

1. Learning mathematics requires: (a) a serious effort. (b) a special talent.	1. 수학 학습은: (a) 많은 노력을 필요로 한다. (b) 특별한 재능을 필요로 한다.

○	○	○	○	○	○
(a) ← Only (a) Never (b)	More (a) Than (b)	Equally (a) and (b)	More (b) Than (a)	→ (b) Only (b) Never (a)	NEITHER (a) Nor (b)

2. If I had a choice: (a) I would never take any mathematics course. (b) I would still take mathematics for my own benefit.	2. 만약 내가 선택할 수 있다면: (a) 나는 어떤 수학 과목도 수강하지 않을 것이다. (b) 나는 내 자신을 위해서 여전히 수학 과목을 수강할 것이다.

(※ 2번 이하의 문항은 선택 상자 생략)

3. Reasoning skills that are taught in mathematics courses can be helpful to me: (a) in my everyday life. (b) if I were to major in mathematics or a related field.	3. 수학 시간에 배우는 추론 능력은: (a) 나의 일상생활에 유용하게 쓰인다. (b) 만약 내가 수학이나 관련된 분야를 전공한다면 유용하게 쓰일 것이다.
4. The role of a mathematics teacher is to: (a) show me how to work specific problems. (b) guide me in learning to solve problems	4. 수학을 가르치는 교사나 교수의 역할은: (a) 문제를 푸는 구체적인 방법을 나에게 보여주는 것이다. (b) 내가 문제를 푸는 방법을 배우도록 안내하는 것이다.
5. My score on mathematics exams is a measure of how well: (a) I understand the covered material. (b) I can do things the way they are done by the teacher or in some course materials.	5. 수학시험에서 나의 점수는: (a) 내가 수업시간에 다루어진 내용을 얼마나 잘 이해했는가를 측정한 것이다. (b) 선생님이 했던 방법이나 수업시간에 다루어진 방법으로 내가 문제를 풀 수 있는가를 측정한 것이다.
6. For me, doing well in mathematics courses depends on: (a) how much effort I put into studying. (b) how well the teacher explains things in class.	6. 나에게 있어서, 수학 과목을 잘 하는 것은: (a) 내가 공부를 위해서 얼마나 많이 노력하는가에 달려있다. (b) 선생님이 수업시간에 얼마나 잘 설명했는가에 달려있다.
7. When I experience a difficulty while studying mathematics: (a) I immediately ask for help, or give up trying. (b) I try hard to figure it out on my own or with others.	7. 수학 공부를 하면서 어려운 문제를 접하게 될 때: (a) 나는 즉시 도움을 요청하거나 포기한다. (b) 나는 나 스스로 또는 다른 사람들과 토론하여 해결 방법을 찾는다.
8. When studying mathematics in a textbook or in course materials: (a) I memorize it the way it is presented. (b) I make sense of the material so that I can understand it.	8. 교과서나 과목의 참고자료에서 수학을 공부할 때: (a) 나는 책에 제시되어 있는 방법을 암기한다. (b) 나는 그 내용의 의미를 파악하여 이해한다.

9. For me, the relationship of mathematics courses to everyday life is usually: (a) easy to recognize. (b) hard to recognize.	9. 나에게 있어서, 수학과 일상생활의 관계는 보통: (a) 인식하기 쉽다. (b) 인식하기 어렵다.
10. In mathematics, it is important for me to: (a) memorize technical terms and mathematical formulas. (b) learn ways to organize information and use it.	10. 수학에 있어서, 나에게 중요한 것은: (a) 수학 용어와 공식을 암기하는 것이다. (b) 정보를 조직하고 그것을 사용하는 방법을 배우는 것이다.
11. Mathematical formulas: (a) express meaningful relationships among variables. (b) provide ways to get numerical answers to problems.	11. 수학 공식은: (a) 변수들 사이의 의미있는 관계를 표현한다. (b) 문제에 대한 수치적 해답을 얻을 수 있는 방법을 제공한다.
12. After I go through a mathematics text or course materials and feel that I understand them: (a) I can solve related problems on my own. (b) I have difficulty solving related problems.	12. 수학 교과서나 과목 참고자료를 공부하고 이해한다고 생각한 다음에는: (a) 나는 관련된 문제를 스스로 풀 수 있다. (b) 나는 관련된 문제를 푸는데 어려움을 겪는다.
13. The first thing I do when solving a real world problem that involves mathematics: (a) represent the situation with sketches and drawings. (b) search for formulas that relate givens to unknowns.	13. 수학과 관련된 실생활 문제를 풀 때 내가 가장 먼저 하는 일은: (a) 상황을 그림으로 표현하는 것이다. (b) 미지수와 관련된 공식을 찾는 것이다.
14. In order to solve a mathematics problem: (a) I need to have seen the solution to a similar problem before. (b) I use general problem solving techniques.	14. 수학 문제를 풀기 위하여: (a) 나는 이전에 그와 유사한 문제의 풀이를 본 적이 있어야 한다. (b) 나는 일반적인 문제해결 방법을 사용한다.
15. Seeing alternate solutions to a mathematics problem is: (a) is a waste of my time. (b) helpful for improving my reasoning abilities.	15. 하나의 수학 문제에 대해 여러 가지 풀이방법을 보는 것은: (a) 시간 낭비이다. (b) 나의 추론 능력을 향상시키는데 도움이 된다.
16. A major goal of mathematics instruction is to: (a) impart information. (b) equip students to solve problems independently.	16. 수학을 가르치는 주요 목적은: (a) 정보를 전달하는 것이다. (b) 학생이 독립적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 갖게 하는 것이다.

17. After I see a solution to a mathematics problem that I got wrong: (a) I discard my solution and learn the one I saw. (b) I try to figure out how the solution I saw differs from mine.	17. 내가 틀린 수학 문제의 풀이를 보면: (a) 나는 나의 풀이방법을 버리고 내가 본 풀이답안의 방법을 익힌다. (b) 나는 내가 본 풀이답안과 내 자신의 풀이가 어떻게 다른지 찾으려고 노력한다.
18. How well I do on mathematics exams depends on how well I can: (a) recall material in the way it was presented in class. (b) do tasks that are somewhat different from ones I have seen before.	18. 수학 시험을 잘 보는 것은: (a) 내가 수업시간에 제시된 방법을 얼마나 잘 기억하는가에 달려있다. (b) 내가 전에 봤던 문제와는 다소 다른 과제를 얼마나 잘 해결할 수 있는가에 달려있다.
19. In order to prove a statement in mathematics one must: (a) produce evidence from the physical world. (b) provide a logically sound argument.	19. 수학에서 명제를 증명하기 위해서는 반드시: (a) 물리적 세계로부터 증거를 찾아내야 한다. (b) 논리적으로 타당한 논증을 해야 한다.
20. Mathematical functions that represent relationships in the physical world are: (a) exact expressions of what is being represented. (b) approximate expressions of what is being represented.	20. 물리적 세계에서의 관계를 나타내는 함수는: (a) 그 관계를 정확하게 표현하는 것이다. (b) 그 관계를 근사적으로 표현하는 것이다.
21. After a statement has been proven and accepted in mathematics: (a) it will never be changed. (b) it may be rejected at a future time.	21. 수학에서 명제가 증명되고 받아들여진 후: (a) 그것은 절대로 바뀌지 않는다. (b) 그것은 미래에는 거부될 수도 있다.
22. The relationship among the sides of a right triangle expressed in the Pythagorean theorem is true because it has been: (a) proven by a logical argument. (b) verified by measurement.	22. 피타고라스 정리에서 표현된 직각삼각형의 세 변 사이의 관계는: (a) 논리적으로 증명되었으므로 참이다. (b) 측정에 의해 입증되었으므로 참이다.
23. Collecting and graphing real world data is useful for: (a) determining patterns and making general predictions. (b) obtaining numerical answers to specific problems.	23. 실세계의 자료를 수집하고 그래프로 나타내는 것은: (a) 패턴을 찾고 일반적인 예측을 하는 것에 유용하다. (b) 구체적인 문제에 대한 수치적인 해답을 얻는 것에 유용하다.
24. For me, making unsuccessful attempts when solving a mathematics problem is: (a) a natural part of my pursuit of a solution to the problem. (b) an indication of my incompetence in mathematics.	24. 내가 수학 문제를 풀 때 시행착오를 겪는 것은: (a) 내가 문제를 풀어가는 과정에서 자연스럽게 나타나는 것이다. (b) 내가 수학에 능력이 부족함을 의미하는 것이다.

25. When solving a challenging mathematics problem, a mathematician: (a) makes many incorrect attempts. (b) moves directly to a correct solution.	25. 새로운 수학 문제를 해결할 때, 수학자는: (a) 여러 차례 시행착오를 겪는다. (b) 곧바로 정확한 해결 방안을 찾아낸다.

26. When completing an assignment in mathematics, I need to: (a) use only mathematical symbols. (b) write mathematics using words and mathematical symbols.	26. 수학 숙제를 완전하게 하려면: (a) 단지 수학적인 기호만을 사용해야 한다. (b) 수학적인 기호와 일상적인 언어를 함께 사용하여 수학적인 아이디어를 표현해야 한다.

27. Success in mathematics is demonstrated by: (a) making logically sound arguments. (b) memorizing concepts and procedures.	27. 수학에서의 성공은: (a) 논리적으로 완전한 논증을 하는 것에 의해 입증된다. (b) 개념과 절차를 암기하는 것에 의해 입증된다.

28. Scientists use mathematics as: (a) a tool for analyzing and communicating their ideas. (b) a source of factual knowledge about the natural world.	28. 과학자들은 수학을: (a) 그들의 아이디어를 분석하고 전달하는 도구로 활용한다. (b) 자연현상에 대한 정보의 근원으로 활용한다.

29. The process of attempting to solve a problem that involves mathematical reasoning is: (a) a satisfying experience. (b) not a satisfying experience.	29. 수학적인 추론과 관련된 문제를 푸는 과정은: (a) 만족스러운 경험이다. (b) 만족스러운 경험이 아니다.

30. Graphing calculators or computers: (a) bring new methods for solving mathematics problems. (b) speed up problem solving using established methods.	30. 그래픽 계산기나 컴퓨터는: (a) 수학 문제를 해결하는데 새로운 방법을 제공한다. (b) 이미 정해져 있는 방법을 사용하여 문제를 푸는 속도를 증가시킨다.

31. Using graphing calculators or computers: (a) increases my interest in studying mathematics. (b) is a waste of time.	31. 그래픽 계산기나 컴퓨터를 사용하는 것은: (a) 수학을 공부하는 것에 대한 나의 흥미를 증가시킨다. (b) 시간 낭비이다.

32. In solving mathematics problems, graphing calculators or computers help me: (a) understand the underlying mathematical ideas. (b) obtain numerical answers to problems.	32. 수학 문제를 푸는데 있어서, 그래픽 계산기나 컴퓨터는: (a) 내가 문제 속에 들어있는 수학적인 아이디어를 이해하는데 유용하다. (b) 내가 문제에 대한 수치적인 해답을 구하는데 유용하다.

<부록 2> 절차적 검사 도구와 개념적 검사도구

절차적 검사 도구

1. 미분방정식 $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2}{2y}$ 의 일반해(general solution)를 구하여라.

2. 미분방정식 $\frac{dy}{dt} = 3 - 2y$, $y(0) = 4$일 때, $\lim_{t \to \infty} y(t)$를 구하여라.

3. 90 gallon의 물에 60 pound의 소금이 녹아있는 커다란 탱크가 있다. 이 탱크에 1 gallon 당 2 pound의 소금을 포함한 소금물이 매분 4 gallon의 비율로 유입되고, 유입된 소금물은 탱크 안의 소금물과 잘 섞여서 매분 같은 비율로 유출된다. 이 탱크 안의 시간에 따른 소금의 양을 예측하기 위한 변화율방정식을 만들어라. (단, 만든 변화율방정식은 풀지 않아도 된다.)

4. $y(t) = t^3$은 미분방정식 $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 5t\frac{dy}{dt} + 9y = 0$ 의 해인가? 그 이유를 설명하여라.

5. 연립미분방정식 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 4y \end{cases}$ 의 일반해를 구하여라.

개념적 검사도구

1. 미분방정식의 해(exact solution)는 변화(율)(rate or rate of change)에 대한 개념과 어떤 관련이 있는지 설명하여라.

2. 다음 물음에 답하고 그 이유를 설명하여라.

초기조건이 $y(0) = 4$인 미분방정식 $\frac{dy}{dt} = 3 - 2y$의 해(exact solution)에서 $y = 1.5$를 만족하는 t가 있을 수 있는가?

3. 미분방정식 $\frac{dy}{dt} = 0.2y(y-4)$에서 초기 조건에 관계없이 모든 해(즉, 일반해) 함수의 패턴을 설명하기 위하여 필요한 그래프는 최소한 몇 개인지 그려보고, 그렇게 그린 이유를 설명하여라.

4. 다음 중 아래의 상황을 나타내는 미분방정식을 고르고, 그 이유를 설명하여라.

어떤 바이러스가 시간 $t=0$일 때 놀이동산에서 발견되었다. 이 놀이동산에 살고 있는 얼룩말의 수는 처음에 자연적으로 증가하지만, 결국에는 이 바이러스에 의해 멸종될 것이다. 단, P는 놀이동산 안의 얼룩말의 수, t는 바이러스가 발견된 이후 경과한 개월 수라고 하자.

① $\frac{dP}{dt} = -2P$ ② $\frac{dP}{dt} = \frac{P}{t^2}$ ③ $\frac{dP}{dt} = \frac{P}{2} - \frac{P}{10}t$ ④ $\frac{dP}{dt} = P^2 - P$

5. 아래 그림은 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$ 형태의 연립미분방정식의 해를 나타낸 $x(t)$, $y(t)$ 의 그래프이다. 이 해의 그래프가 위상평면에서는 직선으로 나타난다면, $t=7$에서의 y 의 값을 구하고, 구한 방법을 설명하여라.