大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 15 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XV, No.3, 335-352. Aug 2005

수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구[1)]

김 선 희[*] · 김 기 연[**]

본 연구는 중학교 수학 영재를 위한 심화학습 주제로 사용해 볼 수 있는 볼록다각형의 무게중심을 연구하고, 그것을 학생들에게 지도한 예시를 소개한다. 아르키메데스의 질량중심의 성질을 바탕으로 다각형의 무게중심을 정의하고, 적분과 내분점에 의해 무게중심 위치를 찾을 수 있는 방법을 설명할 것이다. 그리고 학생들이 무게중심의 성질을 발견하고 정당화하는 과정 속에서 다양한 수학적 사고를 경험하고 여러 문제해결 방법을 시도한다는 것을 살펴본다. 이러한 연구 내용을 통해 교사는 무게중심에 대한 통찰을 가지고 수학 영재를 안내할 수 있고, 학생들이 수학자와 유사한 경험을 하면서 수학적 사고를 중시하는 심화학습에 참여하게 할 수 있을 것이다.

Ⅰ. 서 론

국가의 고급인력 양성과 개인의 역량에 맞는 교육기회 제공이라는 점에서 영재교육은 국가적 발전과 개인의 잠재력 계발을 위해 필요하다. 기초학력이 부진한 학생을 지도하듯 특수한 분야에 소질을 보이는 영재학생을 발굴하여 그들의 능력을 계발시키는 교육은 학생 개인의 자아실현과 국가 발전을 위해 중요한 일이다. 그러나 현재 영재교육은 입시위주의 교육풍토, 판별도구나 프로그램의 지원체계 취약, 영재교육의 연계성 부족 및 영재 교육의 질 관리 취약 등의 문제점을 드러내고 있다(박주용, 2003). 특히 영재 교육을 담당하고 이를 실시하는 교사들에게는 제도적, 행정적인 지원과 더불어 교육 내용에 대한 부담이 크게 작용하고 있다. 국가에서 정한 교육과정을 따르는 것이 아니라 교사 스스로 학생의 자기주도적 학습과 창의적 생산력을 신장시키기 위해 직접 교육과정을 구성해야 한다는 것은 교사들에게 많은 책임을 안겨주며, 교사들이 영재 학생들을 위해 어떤 내용을 어떤 방법으로 지도해야 하는지에 대해 안내할 수 있는 연구가 필요한 실정이다.

일반적으로 영재 교육은 속진 학습과 심화학습의 두 가지 유형으로 크게 나뉜다(전경원, 2000). 속진은 학습 속도가 빠른 학생이 진도를 빨리 나갈 수 있는 교육적 장치를 마련하는 것으로, 학년을 뛰어넘는 월반 제도나 여러 수준의 과목을 개설하여 학생의 적성과 능력에 따라 적절한 과목을 선택하게 하는 교과별 속진제로 실시될 수 있다. 하지만 우리나라 교육체제 내에서 속진 학습은 시행하기 어렵다. 대신, 학생 개인의 수학적 지식의 양보다 질에 초점

* 한국교육과정평가원, math1207@kice.re.kr
** 북악중학교, freenego@lycos.co.kr
1) 이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2004-030-B00049).

을 둔다면 수학적 사고, 창의성과 문제해결, 탐구 방법 등을 교육목표로 삼는 심화 학습이 영재 교육에 적합하다. 심화학습은 학생들이 정규 교육과정을 바탕으로 수학적 사고의 폭을 넓히고 깊이를 더하는 방향에서 다양한 문화 경험을 제공할 수 있으며, 우리나라 영재 교육은 심화학습 위주로 진행될 것이 권장되고 있다.

하지만 교육 현장에는 학교 교육과정 내용을 심화시켜 지도하고 전통적인 수업 방식을 개선할 것을 요구하면서도, 실제로 학교 교육과정의 내용을 어느 정도 심화시킬 것인지, 학생들의 창의적 생산력을 자극하기 위해 교사가 어떤 역할을 해야 하는지에 대해서 잘 알려져 있지 않다. 심화학습이라는 교육 방향이 주어졌을 때, 학생들이 무엇을 심화하여 배우고 그 깊이는 어느 정도로 해야 하는지, 그 과정을 어떻게 진행해야 하는지 등 교사들이 결정해야 할 부분은 많다. 정규 교육과정에서 다루지 않지만 배운 내용을 기반으로 학습 내용을 정하고 학생의 수준에 맞추어 그 깊이를 논하며, 학생 스스로 그 내용을 탐색하고 토론하면서 수학적 발견을 하도록 하고, 학습 내용에 따라 문제해결이나 주제탐구 등의 학습 과정을 구성하는 일이 필요하다.

본 연구는 그 구체적 예로, 중학교 수준의 수학 영재에게 심화학습의 한 주제로[2] 다각형의 무게중심을 제안한다. 중학생은 수학의 증명을 처음 접하는 시기에 있어 수학 내용을 연역적으로 전개하는 것에 흥미를 갖고 있다는 점에서, 물리적 검증과 형식적 증명 모두 경험할 수 있는 무게중심이 심화학습 내용으로 의의가 있다. 즉, 무게중심은 평면도형을 바닥면과 평행하게 세울 수 있는 위치를 제공한다는 점에서 학생들의 물리적 활동이 증명에 수반될 수 있고, 타당성의 검증에 물리적 활동과 형식적인 증명을 동시에 사용할 수 있다는 점에서 심화학습 내용으로 선정될 수 있다.

본 연구는 크게 두 가지 내용으로 구성된다. 첫째는 중학교 수학 영재 학생들에게 적용할 심화학습 내용으로 다각형의 무게중심을 연구하는 것이며, 둘째는 주제 탐구 과정으로서의 심화학습 예시를 소개하는 것이다. 이는 중학교 수학 영재를 지도하는 교사들에게 심화학습 내용으로서 다각형의 무게중심에 대한 지식을 알려주며, 이 내용이 중학교 수학 영재 학생에게서 학습 가능함을 보여주려는 것이다.

II. 다각형의 무게중심 탐구

이 장에서는 다각형의 무게중심과 관련된 수학적 내용을 살펴본다. 교육과정에 제시된 삼각형의 무게중심에 대해 간단히 살펴보고 그것을 일반화하여 다각형의 무게중심을 설명할 것이며, 현재 우리나라에서 무게중심에 대한 지도가 어떠한지 교과서를 중심으로 알아볼 것이다.

1. 삼각형의 무게중심

우리나라 교육과정 내에서 소개되는 무게중심은 삼각형에 한정되어 있다. 8-나 단계에서 도입되는 삼각형의 무게중심은 삼각형의 무게중심을 찾는 것, 삼각형의 무게중심의 성질을 증명하고 이를 활용할 수 있는 것으로 내용이 구성된다. 무게중심을 찾는 방법은 삼각형에서 세 중선의 교점을 찾는 것이다. 무게중심의 성

2) 송상헌 · 김지영(2003)은 영재교육 프로그램으로 문제해결형, 주제탐구형, 과제개발형을 제안한 바 있다. 이 중에서 주제탐구형은 특정한 내용이나 소재를 활용한 주제를 잡아 그 주제를 중심으로 내용을 깊이 있게 탐구해 나가는 방식이며, 본 연구에서는 주제탐구형으로 무게중심을 다루려 한다.

질은 크게 두 가지로 요약되는데,

첫째, 삼각형에서 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만난다.
둘째, 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭지점으로부터 각각 2:1로 나눈다.

이다. 이 성질들은 종이접기나 GSP를 이용한 시각적 확인과 더불어 연역적으로 증명될 수 있다.

이러한 무게중심의 성질을 활용하면, $\triangle ABC$에서 무게중심 G에 의해 $\triangle GAB = \triangle GBC = \triangle GCA = \frac{1}{3}\triangle ABC$가 성립함을 증명할 수 있고 또, 평행사변형 $ABCD$의 변 AD, BC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 대각선 $\overline{AC}$와 선분 $\overline{BM}$, $\overline{DN}$과의 교점을 각각 P, Q라 하면, $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$임도 증명할 수 있다.

교육과정에 소개되는 삼각형에서의 무게중심은 아르키메데스의 질량중심의 특수한 예라고 할 수 있다. 질량중심은 평면도형 뿐 아니라 입체도형의 질량에 대해서도 성립할 수 있는 용어인데, 중력이 일정한 곳에서 질량중심은 무게중심과 같다. 질량중심은 다음의 성질을 갖는다(김홍종, 2003).

(0) 물체에는 질량중심이 존재하고 오직 하나뿐이다.
(1) 닮은 도형의 질량중심은 닮음의 위치에 있다.
(2) 볼록 도형의 질량중심은 도형 내에 있다.
(3) 도형을 두 조각으로 나누었을 때 처음 도형의 질량중심은 각 조각의 질량중심을 연결한 선분위에 있다. 이때 각 조각의 질량을 m_1, m_2, 질량중심을 C_1, C_2라 하면 처음 도형의 질량중심 C는 $m_1 \cdot \overline{C_1C} = m_2 \cdot \overline{C_2C}$를 만족시킨다.

이 논문은 삼각형의 무게중심으로부터 다각형의 무게중심으로 일반화를 시도할 것이며, 아르키메데스가 말한 질량중심의 성질을 유지하면서 무게중심에 대한 논의를 확대해 갈 것이다.

2. 무게중심의 재정의

아르키메데스의 질량중심의 성질 (0)에 따르면, 삼각형 이외의 도형도 무게중심이 존재하게 된다. 그렇다면 그 위치가 어디인지 학생들을 지도하는 교사는 알고 있어야 하며, 중등 교육과정에 있는 학생들도 그 위치를 찾을 수 있는지 생각해 보아야 한다. 이에 대한 논의를 진행하기 위해 먼저 무게중심의 정의를 내려 본다.

삼각형의 무게중심은 교과서에서 세 중선의 교점으로 정의되었다. 삼각형에서의 중선은 다각형에 그대로 적용되지 않기 때문에, 다각형의 무게중심 정의는 삼각형의 것을 그대로 따를 수 없다. 삼각형에서의 정의를 따르려면, 삼각형에서 중선의 의미를 파악해서 그에 따라 볼록다각형에서의 무게중심을 살펴보아야 한다. 본 연구는 삼각형의 무게중심에서 중선을 삼각형의 넓이를 이등분하는 선으로 이해하여, 다각형에서의 무게중심은 넓이의 평형을 이루는 점으로 볼 것이다. 직관적으로 다각형의 무게중심을 도형의 질량이 중력에 의해 평형을 이루게 하는 점이라고 재정의하고, 평면에서 도형의 질량을 넓이로 생각한다. 즉, 다각형의 무게중심은 다각형의 넓이의 평형을 맞출 수 있는 점이다. 이런 식으로 무게중심을 생각한다면 위에서 아르키메데스가 말한 성질이 충족되며, 학생들의 무게중심에 대한 직관적 이해를 도와 물리적 활동을 가능하게 할 수 있다.

3. 볼록다각형의 무게중심 찾기

이 절에서는 위에서 정의한 무게중심에 따라

볼록다각형의 무게중심을 찾는 여러 방법을 모색한다. 설명을 쉽게 하기 위해 볼록사각형의 경우로 접근을 시작할 것이며, 넓이가 평형을 이루게 하는 무게중심을 세 가지 방법으로 찾아볼 것이다.

가. 적분에 의해 찾기

학생들이 다양한 방법으로 다각형의 무게중심 찾기를 시도하고 이를 정당화하려 할 때, 교사는 보다 높은 수준의 사고와 지식을 가지고 학생들을 안내하고 학습하는 내용을 확인할 수 있어야 한다. 무게중심은 넓이의 평형을 이루는 점이므로, 넓이를 구하는 정적분에 의해 무게중심의 위치를 찾을 수 있을 것이다. 정적분이나 중적분의 개념과 지식은 중등수학의 범위를 벗어나지만, 적분개념이 넓이의 평형이라는 정의에 충실하여 무게중심을 찾아내고 그 성질을 명확하게 확인하고 정당화할 수 있는 수단임을 교사들은 인식하고, 학생들을 지도할 배경지식으로 소유해야 한다. 따라서 본 연구에서는 다각형의 무게중심을 적분에 의한 방법으로 찾아보고, 학생들 수준에서 접근 가능한 다른 방법이 타당한지 확인하는 수단으로 적분 결과를 활용하고자 한다.

임의의 다각형을 평면상에서 서로 독립성을 유지하는 두 성분 (x, y)으로 표현하고 주어진 영역에서 두 성분이 각각 평형을 이루는 점을 찾아내면, 넓이의 평형을 이루는 점으로 재정의한 무게중심을 찾아낼 수 있다. 임의의 사각형 $ABCD$를 평면에 그릴 때, 각각의 변은 좌표평면상의 일차함수로, 꼭지점은 각 일차함수의 교점으로 표시할 수 있다. 그러므로 임의의 사각형에서 무게중심의 좌표 $(\overline{x}, \overline{y})$는 사각형의 넓이에 대해 사각형을 이루는 각 성분 x, y가 평형을 이루는 점으로 생각해 볼 수 있다. 즉,

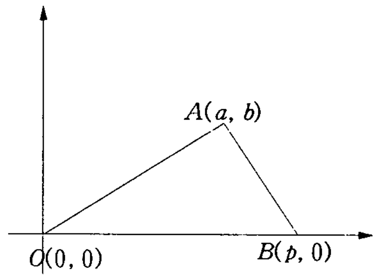
$$\overline{x}=\frac{\int_D x}{\int_D 1}=\frac{\int_D x}{S},$$

$$\overline{y}=\frac{\int_D y}{\int_D 1}=\frac{\int_D y}{S}$$

이라고 할 수 있다. 이와 같은 정의는 3차원 공간에서 부피를 가지는 입체도형의 무게중심 찾기로도 확장할 수 있다[3].

적분에 의한 무게중심 찾기를 삼각형의 무게중심에서 확인해 보자. 삼각형을 이루는 평면에서 각 성분의 평형을 이루는 점 $(\overline{x}, \overline{y})$를 찾아 이 점이 삼각형의 무게중심임을 보이고자 한다.

임의의 삼각형 AOB를 좌표평면에 그린다. 이 때, 계산의 편의를 위해 [그림 Ⅱ-1]과 같이 한 꼭지점 O를 원점으로 하고 다른 꼭지점 B를 x축 위에 놓는다.



[그림 Ⅱ-1] 적분에 의한 삼각형의 무게중심 찾기

무게중심의 좌표를 구하기 위해 우선 $\triangle AOB$의 두 변 $\overline{AO}$, $\overline{AB}$에 대한 직선의 식을 구하면 각각 $y=\frac{b}{a}x$, $y=\frac{b}{(a-p)}x+\frac{bp}{(p-a)}$가 된다.

삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}bp$이므로

$\int_D 1=\frac{1}{2}bp$이고,

$$\int_D x=\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}x} x\,dy\,dx$$

3) 각4)의 무게중심의 정의 참조

$$+\int_a^p\int_0^{\frac{b}{(a-p)}x+\frac{bp}{(p-a)}} x\,dy\,dx$$

$$=\frac{b}{3a}x^3\Big|_0^a+\left\{\frac{b}{3(a-p)}x^3+\frac{bp}{(p-a)}x^2\right\}\Big|_a^p$$

$$=\frac{b}{3}a^3+\frac{b}{3(a-p)}(p^3-a^3)$$

$$+\frac{bp}{2(p-a)}(p^2-a^2)$$

$$=\frac{bp(a+p)}{6}.$$

따라서

$$\bar{x}=\frac{\int_D x}{\int_D 1}=\frac{\int_D x}{S}=\frac{\frac{bp(a+p)}{6}}{\frac{bp}{2}}$$

$$=\frac{a+p}{3}$$

이고, 같은 방법으로

$$\int_D y=\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}x} y\,dy\,dx$$

$$+\int_a^p\int_0^{\frac{b}{(a-p)}x+\frac{bp}{(p-a)}} y\,dy\,dx$$

$$=\frac{b^2p}{6}$$

이 되므로

$$\bar{y}=\frac{\int_D y}{\int_D 1}=\frac{\int_D y}{S}=\frac{\frac{b^2p}{6}}{\frac{bp}{2}}=\frac{b}{3}$$ 이다.

삼각형의 무게중심이 세 중선의 교점이라는 정의에 따르면, 임의의 삼각형에 대해 각 꼭지점의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)이라 할 때, 무게중심 G의 좌표는

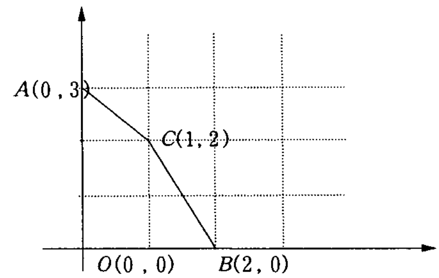
$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이 된다.

위에서 평면을 두 개의 성분으로 표현하여 적분방법에 의해 찾은 무게중심의 좌료와 비교해 보면,

$$(\bar{x}, \bar{y})=\left(\frac{a+p}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

$=\left(\frac{a+0+p}{3}, \frac{b+0+0}{3}\right)$이며, 세 중선의 교점으로 정의한 삼각형의 무게중심 좌표와 일치함을 확인할 수 있다. 따라서 적분에 의한 무게중심은 $(\bar{x}, \bar{y})$로 찾을 수 있다.

이제 볼록사각형 $ABCD$에 대하여 사각형의 영역을 D, 그 넓이를 S라 하고, 사각형의 무게중심 $G(\bar{x}, \bar{y})$을 찾아보자. 예를 들어, 아래의 [그림 Ⅱ-2]에서 사각형 $AOBC$의 무게중심을 찾아보자. 좌표평면 위의 사각형 $AOBC$에서 A와 C를 지나는 직선은 $y=-x+3$이고, C와 B를 지나는 직선은 $y=-2x+4$이다. 사각형 $AOBC$의 영역을 D, 넓이를 S라 하고 무게중심 $G(\bar{x}, \bar{y})$을 찾아본다.



[그림 Ⅱ-2] 적분에 의한 사각형의 무게중심 찾기

계산을 하면 사각형의 넓이 $S=\frac{7}{2}$이고,

$$\int_D x=\int_0^1\int_0^{3-x} x\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{4-2x} x\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 -x^2+3x\,dx+\int_1^2 -2x^2+4x\,dx$$

$$=\frac{5}{2}$$

$$\int_D y=\int_0^1\int_0^{3-x} y\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{4-2x} y\,dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 x^2-6x+9\,dx+\int_1^2 4x^2-16x+16dx\right\}$$

$=\frac{23}{6}$ 이므로

$\bar{x}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}=\frac{5}{7}$, $\bar{y}=\frac{\frac{23}{6}}{\frac{7}{2}}=\frac{23}{21}$ 이다.

따라서 무게중심의 좌표는 $G(\frac{5}{7}, \frac{23}{21})$이 된다. 이 방법에 따르면, 대칭축을 두 개 이상 가진 도형의 경우 무게중심이 대칭축의 교점과 일치함도 증명할 수 있다.

중학교 영재를 대상으로 한다면, 적분에 의한 방법이 적당하지 않을 수 있다. 적분에 의

하여 사각형의 무게중심을 찾는 것은 고등학생에게도 어려운 일이다. 중학교 수학 영재들이 무게중심을 찾기 위해서는 적분을 모르는 학생에게도 무게중심을 도입할 수 있는 쉬우면서도 타당한 새로운 접근 방법이 필요하다. 아래에서는 그와 동치이면서 보다 쉬운 방법을 알아보기로 한다.

나. 내분에 의해 찾기

무게중심의 위치는 아르키메데스의 (3)에 있는 방법처럼 내분점으로 찾을 수 있다. 이 방법이 위의 적분에 의한 무게중심 찾기와 일치된 결과를 보여주는지 알아본다. 임의의 사각형에 대해 그 무게중심을 적분으로 찾아낸 결과는 내분에 의한 방법으로 해석이 가능하다.

아래 [그림Ⅱ-3]과 같이 임의의 사각형 *PQRS*에 대하여 무게중심의 좌표를 $G(\bar{x}, \bar{y})$라 하자. 사각형 *PQRS*의 영역을 *D*, 그 넓이를 m이라고 하고, 임의의 대각선으로 사각형을 분할하여 그 영역과 넓이를 각각 D_1, D_2, m_1, m_2, 분할된 두 삼각형의 무게중심을 각각 $G_1(\overline{x_1}, \overline{y_1})$, $G_2(\overline{x_2}, \overline{y_2})$이라 하자.

그러면 $m = m_1 + m_2$이 되고, 넓이의 평형을 이루는 점을 무게중심이라 했으므로,

$\bar{x} = \frac{\int_D x}{m}$, $\bar{y} = \frac{\int_D y}{m}$ 라 할 수 있다.

여기서

$\int_D x = \tilde{x}$, $\int_D y = \tilde{y}$라 하면,

$$\bar{x} = \frac{\int_D x}{m} = \frac{\tilde{x}}{m},\quad \bar{y} = \frac{\int_D y}{m} = \frac{\tilde{y}}{m}$$ 이다.

같은 방법으로 삼각형 *PQR* 와 삼각형 *PRS*의 무게중심을 찾아보면, $\overline{x_1} = \frac{\tilde{x}_1}{m_1}$, $\overline{y_1} = \frac{\tilde{y}_1}{m_1}$, $\overline{x_2} = \frac{\tilde{x}_2}{m_2}$, $\overline{y_2} = \frac{\tilde{y}_2}{m_2}$이고, $m\bar{x} = \tilde{x} = \int_D x$

$$= \int_{D_1} x + \int_{D_2} x$$

$$= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

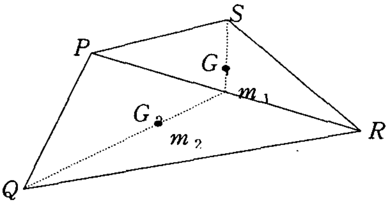
$$= m_1\overline{x_1} + m_2\overline{x_2}.$$

정리하면

$$\bar{x} = \frac{m_1\overline{x_1} + m_2\overline{x_2}}{m} = \frac{m_1\overline{x_1} + m_2\overline{x_2}}{m_1 + m_2}$$ 이 되고,

같은 방법으로

$$\bar{y} = \frac{m_1\overline{y_1} + m_2\overline{y_2}}{m} = \frac{m_1\overline{y_1} + m_2\overline{y_2}}{m_1 + m_2}$$ 을 얻는다[4].



[그림 Ⅱ-3] 무게중심을 내분에 의해 해석하기

4) 수학사전(한국사전연구원, 1992)에서의 무게중심(center of gravity) 정의도 이와 같다. 질량 $m_1, m_2, \ldots, m_n$의 n개의 질점이 각각 좌표 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …, (x_n, y_n, z_n)의 위치에 있을 때, 이 질점계의 무게중심 G의 좌표 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$는 $\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$, ...이다. 밀도가 $\rho(x, y, z)$인 물체의 무게중심 G의 좌표 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$는 $\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x, y, z)dV$, ...이다. 여기서 M은 이 물체의 전질량, 적분범위 V는 이 물체가 차지하는 공간의 영역이다. 일반적으로 도형 F가 주어졌을 때 F위에 일양적 질량을 분포하였을 때의 무게중심을 도형 F의 무게중심이라 한다. 특히 삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이다.

즉, 적분에 의하여 사각형의 무게중심을 찾는 방법은 사각형을 대각선에 의해 삼각형 두 개로 분할하고 그 삼각형의 무게중심을 다른 삼각형의 넓이비로 내분한 점을 찾는 것과 같다. 위에서 사각형 $PQRS$의 무게중심은 한 대각선에 의해 분할된 두 삼각형의 무게중심을 연결한 선분 $\overline{G_1G_2}$를 서로 다른 삼각형의 넓이비인 $m_2 : m_1$ 으로 내분한 점인 것이다.

앞 절의 예로 다시 확인하면, [그림 Ⅱ-2]에서 사각형 $AOBC$에 대각선 $\overline{OC}$를 그어 두 개의 삼각형으로 분할한 뒤 삼각형 AOC와 삼각형 COB의 무게중심을 각각 G_1, G_2 , 넓이를 각각 m_1, m_2라 한다.

$$G_1 = \left(\frac{0+0+1}{3}, \frac{3+0+2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$G_2 = \left(\frac{1+0+2}{3}, \frac{2+0+0}{3}\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right),$$

$m_1 = \frac{3}{2}$, $m_2 = 2$ 이므로 무게중심 G는 G_1, G_2를 서로 다른 삼각형의 넓이비인 $m_2 : m_1 = 4:3$으로 내분한 점이며

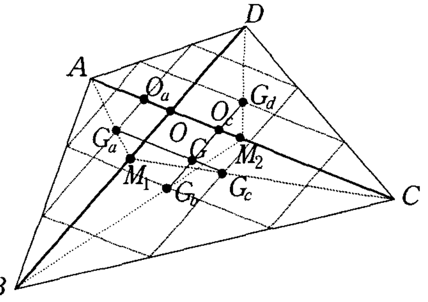
$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot 1}{4+3}, \frac{3\cdot\frac{5}{3}+4\cdot\frac{2}{3}}{4+4}\right)$$

$= \left(\frac{5}{7}, \frac{23}{21}\right)$ 이 된다. 이 결과는 앞에서 적분에 의해 찾은 무게중심과 일치한다.

그런데, 사각형은 두 개의 대각선을 갖고 있으므로, 두 개의 삼각형으로 분할하는 방법은 두 가지가 있다. 따라서 어느 대각선을 택해도 무게중심이 같은지 조사해 볼 필요가 있다.

다음 [그림 Ⅱ-4]와 같이 사각형 $ABCD$를 대각선 $\overline{AC}$와 대각선 $\overline{BD}$로 분할하였을 때 생기는 사각형의 무게중심에 대해 생각해 보자. $\triangle ABD$, $\triangle CBD$, $\triangle DAC$, $\triangle BCA$의 무게중심을 각각 G_a, G_c, G_d, G_b라 했을 때, $\overline{G_aG_c}$를 삼각형의 넓이의 비에 의해 내분한 점과 $\overline{G_bG_d}$를 삼각형의 넓이의 비에 의해 내분한 점이 일치하는지 살펴볼 것이다.

먼저, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$의 중점을 각각 M_1, M_2, 교점을 O, $\overline{G_aG_c}$와 $\overline{G_bG_d}$의 교점을 G, G_a를 지나면서 $\overline{BD}$에 평행한 선분과 $\overline{AC}$의 교점을 O_a, G_d를 지나면서 $\overline{BD}$에 평행한 선분과 $\overline{AC}$의 교점을 O_c라 하자.



[그림 Ⅱ-4] 볼록사각형의 무게중심 일치 확인

$\overline{BD} = 2l_1$,

$\overline{G_bO_c} = b$, $\overline{G_dO_c} = d$, $\overline{OM_1} = 3k$ 라 하면,

$$\overline{BO} : \overline{DO} = (l_1+3k):(l_1-3k) = b:d$$

$b = \frac{1}{3}l_1 + k$, $d = \frac{1}{3}l_1 - k$ 이다.

$\overline{DG_d} : \overline{G_dM_2} = 2:1$ ($\because$ G_d는 $\triangle DAC$의 무게중심), $\overline{BG_b} : \overline{G_bM_2} = 2:1$ ($\because$ G_b는 $\triangle BCA$의 무게중심)이므로 $\triangle M_2DB$에서 볼 때 점 G_d, G_b는 각각 변 $\overline{M_2D}$, $\overline{M_2B}$를 M_2로부터 1:2로 내분하는 점이 된다. 따라서 $\overline{G_dG_b} = \frac{1}{3}\overline{DB}$ & $\overline{G_bG_d} \parallel \overline{BD}$이 되고,

$$\overline{G_bG_d} = \frac{1}{3}\overline{BD} = \frac{2}{3}l_1 = b+d \text{ 이다.}$$

여기서

$$\begin{aligned}\overline{G_bG} &= \overline{G_bO_c} - \overline{GO_c}\\ &= b - 2k\\ &= \left(\frac{1}{3}l_1 + k\right) - 2k\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}l_1-k$$
$$=d.$$

마찬가지로, $\overline{GG_d}=b$.

즉, 점 G는 $\overline{G_bG_d}$를 $\triangle DAC$와 $\triangle BCA$의 넓이비인 $d:b$로 내분하는 점이 되므로 사각형 $ABCD$를 대각선 $\overline{BD}$으로 분할하여 내분점을 찾았을 때의 무게중심이 되고, 같은 방법으로 점 G는 $\overline{G_aG_c}$를 $c:a$로 내분하는 점이 되므로 사각형 $ABCD$를 대각선 $\overline{AC}$로 분할했을 때의 무게중심이다.

이로써, 주어진 사각형에서 대각선 $\overline{BD}$에 의해 분할된 두 삼각형인 $\triangle ABD$, $\triangle CBD$의 무게중심을 연결해서 삼각형의 넓이비에 의하여 내분점이 되는 사각형의 무게중심과, 대각선 $\overline{AC}$에 의해 분할된 두 삼각형인 $\triangle DAC$, $\triangle BCA$의 무게중심을 연결해서 내분한 사각형의 무게중심은 일치한다. 따라서 학생들이 볼록 사각형의 무게중심을 찾기 위해서는 사각형을 임의의 대각선으로 분할한 뒤 두 삼각형의 무게중심을 연결한 선분을 서로 반대편 삼각형의 넓이비로 내분하면 된다.

앞서 [그림 Ⅱ-2]의 예로 볼 때, 사각형 $AOBC$를 대각선 $\overline{BC}$에 의해 삼각형으로 분할하여 $\triangle AOB$와 삼각형 $\triangle ABC$의 무게중심을 각각 G_3과 G_4, 넓이를 각각 m_3, m_4라 하면,

$$G_3=\left(\frac{0+0+2}{3},\ \frac{3+0+0}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\right),$$

$$G_4=\left(\frac{0+2+1}{3},\ \frac{3+0+2}{3}\right)=\left(\frac{3}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$이고, $m_3=3$, $m_4=\frac{1}{2}$이므로 무게중심 G는 G_3, G_4를 서로 다른 삼각형의 넓이비인 $m_3:m_4=6:1$로 내분한 점으로 찾으면

$$G(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{1\cdot1+6\cdot\frac{2}{3}}{6+1},\ \frac{1\cdot\frac{5}{3}+6\cdot1}{6+1}\right)$$

$=\left(\frac{5}{7},\ \frac{23}{21}\right)$ 이다.

이것은 앞의 결과와 일치한다.

이 방법도 내분점을 찾는 방법을 알아야 하므로, 중학생들에게는 적용되기 힘들 수도 있다. 무게중심과 별도의 주제로 내분점과 외분점을 찾는 방법을 학생 스스로 알아내게 하는 학습을 한 후 내분을 이용한 무게중심 찾기를 해보거나, 검증되지 않았지만 직관적인 물리적 방법으로 학생들이 내분점을 찾게 해 볼 수 있다. 실제로 Ⅲ장에 보고되는 학생들은 내분점의 좌표를 공식으로 알고 있지 못했지만 스스로 내분하는 위치를 찾을 수 있었다.

심화 학습을 지도하는 교사들은 학습에 필요한 내용들을 미리 살펴보고, 학생들이 알고 있는 내용인지, 학습 과정에서 어떻게 그 내용도 포함시켜 학습하게 할 것인지 염두에 두면서 수업에 임해야 할 것이다.

다. 볼록사각형의 무게중심을 찾는 특수한 방법

우리는 위에서 사각형을 어느 대각선으로 분할하든지 무게중심이 일치함을 알 수 있었다. 그로부터 학생들이 무게중심을 찾는 더 쉬운 방법을 소개하고자 한다. 볼록사각형의 무게중심을 찾는 방법을 위에서 증명한 결과로부터 시작할 수 있다. 즉, [그림 Ⅱ-4]에서처럼 주어진 사각형 $ABCD$를 대각선 $\overline{AC}$와 대각선 $\overline{BD}$로 분할하였을 때 생기는 삼각형 $\triangle ABD$, $\triangle CBD$, $\triangle DAC$, $\triangle BCA$의 무게중심을 각각 G_a, G_c, G_d, G_b라 했을 때, $\overline{G_aG_c}$와 $\overline{G_bG_d}$의 교점이 주어진 사각형의 무게중심임을 알 수 있다. 따라서 임의의 볼록사각형을 두 대각선으로 분할하여 대각선을 서로 한 변으로 공유하는 삼각형끼리 무게중심을 연결하면, 그 두 선분의 교점이 바로 사각형의 무

게중심이 된다. 이 방법은 박윤범·박혜숙·권혁천·육인선(2002)의 교과서 114쪽에도 소개되어 있다. 하지만 교과서에서는 직관적으로 무게중심의 위치를 파악하게 했을 뿐, 그 위치가 왜 무게중심인지에 대해서는 설명되어 있지 않다. 이것은 앞 절의 증명에 의해 타당한 것으로 받아들일 수 있다.

볼록사각형의 결과는 볼록다각형에서의 무게중심 찾기로 일반화될 수 있을 것이다. 즉 볼록오각형은 대각선을 하나 그어 사각형과 삼각형으로 분할한 뒤 각각의 무게중심을 찾아 넓이의 비로 내분하면 되고, 볼록n각형에서는 볼록 (n-1)각형과 삼각형으로 분할하여 무게중심을 각각 찾아 넓이의 비를 반대로 하여 내분하면 무게중심을 찾을 수 있다. 하지만 볼록사각형의 무게중심을 찾는 위의 세 번째 방법은 이런 식으로 일반화될 수 없다는 한계가 있다.

4. 무게중심의 지도 현황

현재 학교 교육에서 무게중심은 삼각형에 한정하여 지도되고 있다. 이것은 8-나 단계에 도입되며, 도형 영역에 속한다. 도형 영역의 지도는 학생들이 도형을 면밀히 관찰하고 그로부터 성질을 발견하면서 귀납과 연역의 추론을 경험하고 개념을 확립해 갈 수 있도록 해야 한다. 즉, 가르치고자 하는 대상에 대하여 학생들 나름대로의 추론과 발견이 받아들여지고 그에 대한 타당성을 검증하는 식으로 지도되어야 하는 것이다. 특히 연역적인 추론과 증명을 학습하게 되는 시점에서 이러한 접근은 의미가 있다. 현재 8-나에서의 기하 교육 내용은 삼각형과 사각형의 성질, 도형의 닮음, 닮음의 응용으로 되어 있으며 형식적인 증명이 처음 도입된다. 따라서 본 연구는 도형의 성질을 학습하고 증명이 도입되는 8-나 단계에서 학생들의 탐구를 좀 더 심화하여 진행할 수 있도록 삼각형의 무게중심을 다각형의 무게중심으로 확장한 내용을 탐색하였다.

무게중심은 교과서에서 닮음의 응용 중 삼각형의 중점연결정리와 연결하여 제시된다. 특히 무게중심은 모빌을 만들 때 이용할 수 있는 수학적 성질을 가진 것으로 소개될 수 있으며, 실생활과 연결하여 학생들에게 의미 있게 받아들여질 수 있는 주제이다. 실제로 7차 교육과정에서 많은 교과서들이 무게중심을 도입할 때 실생활과 관련지은 탐구 활동과 예를 소개하고 있다. 삼각형을 손가락 하나로 세워 평형을 이루게 하는 곳이 무게중심임을 보이거나(최용준, 2002; 박재홍 등, 2002; 박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인종, 2002; 신항균, 2002; 강행고 등, 2002; 양승갑 등, 2002; 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, 2002), 삼각형의 한 꼭지점에 줄을 매달아 들면 줄이 대변의 중점을 지남을 확인하고(고성은, 박복현, 김준회, 최수일, 강운중, 소순영, 2002; 조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재, 2002), 삼각형의 한 중선 아래에 연필을 두면 좌우 평형을 이루기 때문에 중선은 도형의 넓이를 이등분하는 직선이라 하면서 중선의 교점인 무게중심은 도형의 평형이 이루어지는 점이라고 설명하거나(이준열, 장훈, 최부림, 남호영, 이상은, 2002a), 무게중심에 이쑤시개를 꽂아 팽이를 만들어 쓰러지지 않는 이유를 생각하거나(박윤범, 박혜숙, 권혁천, 육인선, 2002), 물체의 질량의 중심이라는 접근으로 모빌의 균형을 잡을 수 있는 방법을 도입하기도(금종해, 이만근, 이미라, 김영주, 2002) 한다.

하지만 삼각형을 벗어나 더 넓은 범위의 다각형에서 무게중심을 다룬 적은 없으며, 이것은 다른 나라인 일본의 교과서[5])를 살펴봐도 마찬가지이다. 속진이 아닌 심화 내용으로 학생

들이 스스로 수학에 대한 탐구를 하려 한다면, 친숙한 주제를 더 깊이 있게 배우는 것이 필요할 것이며, 이러한 점에서 다각형의 무게중심은 상위 수준의 영재 학생들의 학습 욕구를 자극하여 새로운 사실에 대한 탐구를 안내할 수 있을 것이다.

III. 수학 영재의 무게중심 탐구 활동의 실제

이 장에서는 심화학습의 주제인 다각형의 무게중심을 중학교 수학영재 학생들이 실제로 탐구했던 활동을 소개해 보고자 한다. 이것은 영재교육에서 심화학습 위주로 주제를 탐구하게 할 때의 한 예로, 앞으로 주제탐구형으로 영재를 지도하려는 교사들에게 교육적 도움을 주기 위해 소개한다.

주제탐구형은 학생들의 독창적인 탐구 활동을 통해 새로운 문제해결 전략의 일반화 및 수학적 원리와 법칙의 창안과 확장에 초점을 둔다(송상헌 · 김지영, 2003). 따라서 학생들이 어떤 주제를 탐구하려는 동기와, 학생들 스스로 활동을 진행하도록 돕는 안내가 중요하다. 본 연구에서는 학생들이 무게중심이라는 주제를 자발적으로 택하여, 그것을 스스로 탐구해 가는 것을 보여줄 것이다. 이를 통해, 다각형의 무게중심이 중학교 수학 영재들에게 어느 정도 깊이 있게 다루어질 수 있는지도 살펴볼 수 있을 것이다.

연구에 참여한 학생들은 서울시교육청 S영재교육원의 중학교 1학년 학생 4명이다. II장의 내용과 같이 다각형의 무게중심을 구하기 위해서는 학생들이 적분이나 해석기하의 내분점, 외분점 등을 알아야 하지만, 이 학생들은 자신의 수준에서 접근할 수 있는 방법을 모색하면서 무게중심을 탐구하였다. 학생들은 주로 경험적 정당화를 통해 자신들이 찾은 무게중심 찾기 방법을 증명해 보려고 하였지만 이에 그치지 않고 연역적이고 형식적인 증명을 시도하기도 하였다. 학생들이 다각형의 무게중심에 몰두하게 된 동기와 그 과정을 함께 살펴보기로 한다.

1. 학생들의 탐구 동기

학생들은 2004년 8~9월에 무게중심에 대한 탐구 활동에 참여하였다. 이 학생들은 4월부터 수학 영재로 선발되어 2주에 한 번씩 교육을 받고 있었다. 학생들의 여름방학인 7월에는 집중교육기간으로 영재교육원에서 실시한 캠프가 있었는데, 이 때 야외활동이 있었다. 수학과 과학 분야의 학생들이 모두 이 캠프에 참가했으며, 과학 선생님의 지도로 몸의 중심을 잡는 게임 후 신체에서의 무게중심에 대한 학습을 하였다. 학생들은 신체라는 3차원에 무게중심이 있다면, 평면도형에서도 무게중심이 존재하지 않을까 하는 호기심이 생겼으며, 이것을 집중 탐구해 보고자 하는 학생 4명이 별도로 이 탐구 활동에 참여하였다. 학생들의 의뢰로 교사들의 지도가 시작되었으며, 연구자들이 직접

5) 일본의 교육과정에서 무게중심은 삼각형에서만 소개되며, 그 도입도 고등학교 수준에서 이루어진다. 일본의 고등학교 교육과정은 '수학기초'와 학년별 기본 교과인 수학 I, II, III이 있고, 선택교과 수학 A, B, C가 있다. 삼각형의 무게중심은 선택과목인 수학 A의 내용으로 평면기하에서 다루어진다.
한 교과서를 보면 무게중심의 도입은 상당히 형식적으로 전개되며 간략하다(飯高 茂/松本幸夫 편, 2002). 삼각형의 무게중심은 한 점에서 만나고 중선을 2:1로 내분한다는 정리에서 시작하여 관련 문제를 하나 제시하고 있을 뿐이다. 고등학교 수준의 선택과목에 해당되는 내용이기 때문에 핵심 내용만 살펴보는 식이기는 하지만, 학생 스스로 무게중심을 탐색해 보거나 우리나라의 경우처럼 무게중심을 이용하여 균형을 잡는 활동은 나와 있지 않다.

지도를 하였다.

학생들은 "다리가 하나뿐인 테이블 설계하기"라는 탐구주제를 갖고 함께 모였다. 이것은 무게중심이 실생활에서 응용될 수 있음을 알리기 위해 학생들이 정한 제목이었다. 테이블의 모양이 원이라면 원의 중심에 다리를 세우면 되겠지만, 다른 모양의 테이블인 경우 다리 하나로 서 있을 수 있는지, 그 위치를 어떻게 구할 것인지 학생들은 알아보려고 했고, 이때 다각형의 무게중심이 사용되었다. 학생들이 탐구한 결과는 2004년 한국교육개발원에서 주최하는 전국 창의적 산출물 발표회에 발표되었고, 학생들은 많은 시간을 투자하여 탐구에 몰두했다. 학생들이 자신들의 보고서에서 밝힌 탐구 동기는 다음과 같았다.

> 저희 영재교육원에서는 하계 캠프에서 "도전! 캠프열전"을 하면서 사람 몸의 무게 중심에 대해서 배웠습니다. 양팔을 벌리고 양발도 벌리고 서 있을 때는 균형을 잡기 쉬웠지만, 발을 하나 들거나 팔을 하나만 들면 균형 잡기가 어려웠습니다. 우리 몸이 움직일 때 무게중심이 이동되는 것을 계산도 해 보았습니다. 자동차의 경우 무게중심이 너무 위에 있으면 다른 물체를 살짝 받아도 쉽게 뒤집어질 수가 있습니다. 자동차의 높이가 높을수록 위험하고 낮을수록 안전합니다. 얼마 전 MBC의 한 아나운서가 교통사고로 차가 뒤집어져서 죽은 사례가 있었습니다. 그것도 자동차의 무게중심이 너무 높아서 그렇게 되었다고 생각합니다. 만일 무게중심이 낮았다면 아마 안 넘어갔을 것이고 사람도 살았을지도 모릅니다. 우리 생활에 무게중심이 많이 필요하다고 생각합니다. 원탁 테이블의 경우 다리가 무게중심에서 벗어난 곳에 있다면 조금만 건드려도 그냥 엎어질 것입니다.
>
> 과학에서 무게중심을 어떻게 생각하는지 알아보았습니다. 다각형에서 아무 꼭지점에서나 실을 매달아 도형을 늘어뜨려 정지하기를 기다리면 좌우의 합력이 같아진다고 합니다. 이때 그 점에서 그 실을 따라 선을 긋습니다. 또 다른 꼭지점에서 그렇게 한 선을 더 긋습니다. 그러면 교점이 생기는데 그 점이 합력이 같아지면 과학적 개념의 무게중심이 됩니다. 우리는 수학 영재반 학생들이기 때문에 무게중심을 수학적으로 생각해 볼 필요가 있습니다.
>
> 수학 시간에는 삼각형의 무게중심에 대해서 중 2 때 배웁니다. 삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이고, 중선을 2:1로 내분하는 점이라는 성질이 있습니다. 하지만 사각형, 오각형, 육각형… 에서의 무게중심은 학교에서 배우지 않습니다. 이번 발표회 준비를 하면서 우리는 과학에서의 무게중심이 수학적으로도 의미가 있는지 확인하고, 삼각형 이외에 사각형에서 무게중심을 찾는 방법을 연구하게 되었습니다.

학생들의 자발적인 동기로 시작된 다각형의 무게중심 찾기는 진행 과정에 있어서도 학생이 주도가 되었다. 학생들은 이미 삼각형의 무게중심과 그 성질에 대해서 사전 조사와 학습을 한 상태이다. 학생들의 탐구 과정을 다음에서 살펴본다.

2. 무게중심 탐구 과정

학생들은 여러 시행착오를 거치면서 다각형의 무게중심 찾기를 진행했다. 일주일에 1번씩 7주간 각자 공부해 온 것을 발표하고 토의했으며, 여기서 지도 교사는 토론이 진행되지 않을 경우에 안내하고 탐색할 내용을 선정하는데 참여하였다.

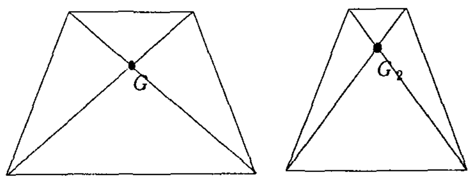
학생들은 무게중심이 평면도형 내부의 한 점으로, 그 점에 다리를 세우면 균형이 잡힐 것이라는 아이디어로 탐구를 시작했다. 7주 간의 내용을 순서대로 소개해 본다. 학생들이 자신도 모르는 지식을 탐구해 가야 하기 때문에, 교사들은 과학에서의 탐구 활동과 경험에 의해 무게중심에 접근하도록 했다. 탐구 첫 주에 학생들은 여러 다각형을 오려서 아무데나 압핀을 꽂거나, 손가락으로 세워보기를 하면서 무게중심의 위치를 찾는 귀납적인 시도를 하였다. 과

학적 정의를 이용하여 꼭지점에 실을 매달아 내려 실이 만나는 점을 찾기도 하면서, 학생들은 각 다각형마다 무게중심이 존재한다는 것을 확인하려 했다.

그러나 학생들은 이 방법이 수학적으로 의미가 부족함을 깨닫고 수학적 방법을 찾으려 했다. 두 번째 주에 학생들은 삼각형의 무게중심의 내용을 되돌아보기 시작했다. 학생들은 1학년이었지만, 2학년의 삼각형 무게중심 내용을 이미 알고 있었다. 학생들은 왜 세 중선이 한 점에서 만나는지, 무게중심이 중선을 왜 2:1로 내분하는지에 대해 함께 생각해 보고, 교과서 등의 증명을 살펴보고 이해하려는 시도를 하였다. 그것을 확장하여 셋째 주에는 특수한 예인 정사각형과 직사각형의 무게중심을 구했다. 이것은 직관적으로 대각선을 그어 쉽게 구할 수 있었으며, 정사각형과 직사각형은 평행사변형이므로 평행사변형의 무게중심은 대각선의 교점이라고 일반화하고, 실제로 우드락에 압핀을 꽂아 균형이 되는지 확인하기도 했다. 이를 통해 학생들은 무게중심이 도형의 평형을 맞출 수 있는 점이라는 암묵적 정의를 내렸다.

넷째 주부터 학생들은 어려움에 봉착했다. 이때부터 학생들은 평행사변형이 아닌 등변사다리꼴의 무게중심을 구했는데, 등변사다리꼴은 선대칭도형이므로 무게중심이 대칭선 위에 있겠지만 그 위치를 찾는 것은 학생들에게 도전이 되었다.

학생들은 등변사다리꼴도 대칭성을 가진 도형이기 때문에 그 무게중심은 평행사변형에서처럼 대각선의 교점을 찾으면 된다는 생각을 했다. 지금까지 사용한 방법이 등변사다리꼴의 경우에도 가능할 것이라는 단순한 유추를 한 것으로 보였다. 그러나 등변사다리꼴에서 두 대각선을 이용해 무게중심을 찾으려는 시도는 곧이어 직관적으로 무게중심이 될 수 없다는 결론에 도달했다. 특히 [그림 Ⅲ-1]과 같이 서로 다른 모양의 등변사다리꼴을 여러 개 그려 두 대각선의 교점을 찾아보는 과정에서, 등변사다리꼴의 무게중심은 두 대각선의 교점에 있는 것이 아니라는 확신을 하게 된다. 등변사다리꼴은 평행사변형처럼 대각선에 의해 넓이가 등분되지도 않고, 두 대각선의 교점은 눈으로 보기에도 주어진 사다리꼴의 무게를 지탱할 수 있는 자리가 아닐 것이라는 판단이 섰기 때문이다. 학생들은 자신이 추측한 것을 여러 가지 실례를 들어 확인하는 과정에서 어려움을 겪고 있었다.



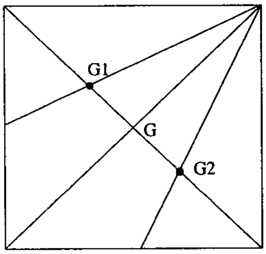
[그림 Ⅲ-1] 등변 사다리꼴에서 대각선의 교점

시행착오 속에서 학생들은 평행사변형에서 대각선이 넓이를 이등분한다는 사실을 포착하여, 등변사다리꼴 넓이를 이등분하는 선을 찾아 대칭선과의 교점을 구하려 했다. 그러나 이것이 무게중심인지에 대한 확신은 없었다. 무게중심의 정의를 명료하지 내리지 않았기 때문이다. 그래서 교사는 학생들에게 무게중심을 무엇이라고 볼 것인지 정하라는 요구를 했다. 이 정의는 삼각형의 무게중심 정의와도 들어맞는 것이어야 했다. 학생들은 '넓이를 균형 있게 맞추는 점'이라고 했다. 그리고 지금까지 구한 사각형의 무게중심에 비추어 그것을 설명했다.

예를 들어, 정사각형의 경우 다음과 같이 정당화를 시도하였다[6].

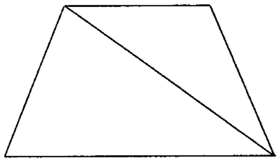
대각선의 교점을 지나는 어떤 직선이나 넓이

가 반으로 나누어지므로, 정다각형의 무게중심은 대각선의 중심이 확실합니다. 더 설명을 하면, 정사각형의 한 대각선은 정사각형을 넓이가 같은 두 삼각형으로 쪼갭니다. 아래 그림을 보면 두 삼각형에는 각각 무게중심 G1과 G2가 있습니다. 두 삼각형의 넓이가 같으므로, 이 두 무게중심을 연결한 중점이 정사각형의 무게중심이 되어야 합니다. G1과 G2를 이은 선분의 중점은 G이고, 이것은 대각선의 교점입니다.

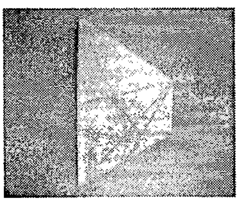


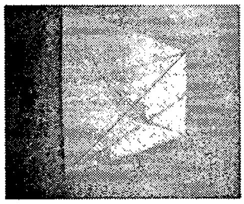
등변사다리꼴에서 대각선의 교점을 적용할 수 없었던 학생들은 여러 아이디어를 내놓았고, 결국 교사의 힌트에 의해 정사각형에서 무게중심의 중점은 대각선에 의해 생긴 두 삼각형의 무게중심을 이은 선분을 1:1로 내분한 것이며 정사각형에서는 나누어진 삼각형의 넓이가 같으므로 1:1이었음을 알아냈다. 그리고 이것을 적용하여 등변사다리꼴의 무게중심을 찾으려 했다. 학생들은 특수한 등변사다리꼴의 경우에서 찾아보고 그것을 일반화하려 했다. 학생들의 시행착오는 다음과 같이 보고된다.

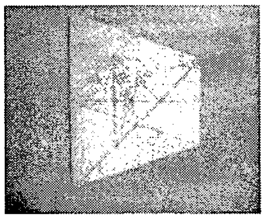
등변사다리꼴에서는 대각선으로 넓이가 반으로 쪼개지지 않습니다. 따라서 아래 삼각형 두 개의 무게중심을 찾아 이은 선분의 중점이 무게중심이 되지 않습니다.



우리는 여기서부터 여러 시행착오를 겪었습니다. 어떤 점을 무게중심으로 해야 할지 결론을 못 내렸기 때문입니다. 단순한 경우에서 찾는 것을 시도하기 위해서, 친구A는 윗변과 아랫변의 길이가 1:2인 등변사다리꼴의 무게중심을 찾았습니다. 그림과 같이 윗변의 중점에서 아랫변의 두 꼭지점을 이어 삼각형 3개를 만든 후 세 삼각형의 무게중심을 이은 삼각형의 무게중심이 등변사다리꼴의 무게중심이라고 했습니다. 이것은 실험을 통해서 확인되었습니다. 또 친구B는 등변사다리꼴의 대각선으로 분할된 두 삼각형에서 무게중심을 찾고, 무게중심을 이은 선분을 두 삼각형의 넓이를 거꾸로 한 비율로 내분한 점을 찾았습니다. 이것은 작도해본 결과 친구A가 찾은 점과 같았고, 무게중심이 될 수 있었습니다. 친구 B의 방법은 정사각형에서 무게중심을 구할 때와 같은 방법입니다. 그래서 우리는 친구B의 결과를 확장시켜서, 윗변과 아랫변의 길이의 비가 1:3인 등변사다리꼴에서도 무게중심을 구해 보았습니다.







6) 학생들이 다각형의 무게중심을 찾는 과정은 많은 시행착오와 난관에 부딪혔으나, 여기서는 그 결과만을 소개하려 한다. 학생들이 쓴 보고서는 시간에 따라 그들에 탐구한 내용을 기술했기 때문에, 시간 순으로 내용을 기술한 본고에 그대로 실었다.

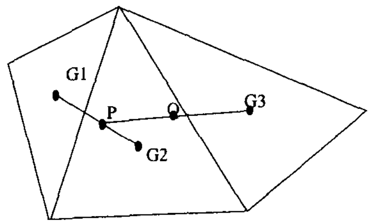
이런 방법으로 무게중심의 중점을 찾은 이유는 등변사다리꼴의 대각선이 넓이를 반으로 나누지 않기 때문이었습니다. 따라서 넓이의 비에 따라 선분을 내분해야 할 것입니다.

학생들은 처음부터 무게중심을 분명하게 정의할 수 없었지만, 무게중심에 대한 소박한 개념에서 시작하여 위치를 정확하게 찾으려는 시도를 하면서 무게중심의 개념을 좀 더 세련화시키고, 귀납적인 탐구를 해나갔다. 학생들이 발견한 방법은 Ⅱ장에서 보고된 내분에 의한 무게중심 찾기이다. 학생들은 내분점을 찾는 공식은 알지 못했지만, 두 점을 얼마의 비로 나누어야 한다고 할 때 자로 길이를 재어 그 위치를 찾을 수 있었다. 이 과정에서 학생들은 여러 아이디어를 내고, 그것 중에서 좋은 방법을 선택하면서, 모두가 수긍할 수 있는 성질을 정당화했다.

이 내용을 보다 확장하여 여섯째 주에 학생들은 일반적인 볼록다각형에서 무게중심 찾는 방법을 탐구했다. 등변사다리꼴의 무게중심을 볼록사각형으로 일반화한다면, 오각형은 삼각형과 사각형으로 분할하여 넓이의 비를 찾아 무게중심을 구할 수 있고, 계속 육각형, 칠각형 등의 무게중심을 구해나갈 수 있다고 생각했다. 학생들은 이 아이디어를 구현하기 위해 다각형을 오려서 자로 내분점을 찾아 무게중심을 구했다.

일반적으로 볼록다각형의 무게중심을 찾으려면, 위에서 등변사다리꼴의 무게중심을 찾은 것을 일반화시키면 됩니다. 오각형의 경우라면, 한 점에서 각 꼭지점을 연결하여 세 개의 삼각형으로 분할할 수 있습니다. 왼쪽에 있는 두 삼각형은 사각형이므로 위에서 구한 방법을 적용하면 사각형의 무게중심을 구할 수 있고, 오각형은 사각형과 삼각형이 합해진 것으로 볼 수 있으므로 사각형의 무게중심과 삼각형의 무게중심을 이은 선분을 반대 넓이의 비로 내분하면 구할 수 있습니다.

아래 그림에서 오각형은 세 개의 삼각형으로 분할되고 각 삼각형의 무게중심은 G1, G2, G3입니다. G1과 G2를 연결한 선분을 삼각형의 넓이의 비를 거꾸로 해서 내분하면 사각형의 무게중심 P를 찾을 수 있습니다. 이제 P와 G3를 연결한 선분을 사각형의 넓이와 삼각형의 넓이를 거꾸로 한 비로 내분하면 오각형의 무게중심 Q가 됩니다.



학생들이 찾아낸 무게중심 위치는 내분에 의한 방법을 따른 것이다. 이것이 옳은지 그 타당성의 검증은 증명을 통해 이루어져야 한다. 학생들의 아이디어를 엄밀하게 확인하기 위해서는 연역적인 증명이 필요하고 이를 위해서는 보다 높은 수준의 수학적 지식과 계산과정이 필요하다. 하지만 이를 위해 학생들에게 고등학교 과정의 정적분이나 대학 수준의 중적분 등의 개념을 가르치는 속진학습을 실시하지는 않았다. 대신 위의 활동 후 학생들을 지도했던 연구자들은 적분에 의한 무게중심 찾기가 수학적으로 존재함을 알려주고, 연구자가 적분에 의해 구한 위치와 학생들의 위치가 일치함을 확인하게 하였다. 학생들은 적분을 할 수는 없었지만, 자신들의 아이디어가 수학적으로도 옳은 결과를 냈다는 것에 놀라워했다. Ⅱ장에서 보여주었던 무게중심을 찾는 여러 방법 중에서 학생들은 내분에 의한 찾기까지 심화된 내용을 학습할 수 있었던 것이다.

그리고 박윤범 등의 교과서에서 소개된 볼록사각형의 무게중심 구하기가(본 연구에서 소개

된 세 번째 방법) 타당한 것인지 Ⅱ장의 내용 일부를 교사와 함께 증명해 보았다. 무게중심의 위치를 알고 난 후 그것이 타당한지에 대한 증명은 중학교 학생들에게서도 가능하다. 여기서는 학생들이 평행선의 성질, 닮음비, 삼각형의 무게중심 등 교과서에서 배운 성질만을 사용해도 증명할 수 있는 내용이며, 무게중심이라는 용어 자체가 갖는 의미를 직관적으로 뿐만 아니라 형식적으로도 탐구하게 할 수 있는 것이다. 이로써 학생들은 무게중심을 물리적으로, 귀납적으로, 연역적으로 다루는 경험을 했고 스스로 수학적 발견의 기쁨을 누리게 되었다.

일곱째 주에는 학생들 자신의 방법으로 구한 무게중심에 대한 성질을 알아내는 활동을 했다. 학생들은 무게중심에 대한 여러 성질을 관찰하여 지금까지 학습한 내용을 4가지로 정리할 수 있었으며, 이 성질의 타당성에 대해 함께 검토했다. 학생들이 찾은 무게중심의 성질은 다음과 같다.

첫째, 볼록사각형의 무게중심은 내부에 하나 존재한다.

둘째, 볼록사각형에서 대각선에 의해 나누어진 두 삼각형의 무게중심을 반대편 삼각형의 넓이의 비로 내분하는 점이 바로 볼록사각형의 무게중심이다. ([그림 Ⅱ-3] 참조)

셋째, 볼록사각형에서 대각선을 그어 생긴 삼각형의 무게중심을 이은 선분끼리의 교점도 무게중심이다. ([그림 Ⅱ-4] 참조)

넷째, 볼록사각형에서 하나의 대각선을 그어 생긴 두 삼각형의 무게중심을 연결한 선은 사각형의 다른 대각선과 평행하며, 그 길이는 $\frac{1}{3}$ 이 된다. ([그림 Ⅱ-4] 참조)

직관적이고 소박한 개념에서 시작하여 실험을 하고 귀납적으로 일반화를 하며 증명을 통한 검증을 하는 주제 탐구 과정에서 학생들은 수학적 지식을 발견하였다. 그리고 그것이 보다 높은 수준의 형식적인 수학 내용과 일치한다는 것은 학생들에게 자신감을 주는 것이었다. 적분에 의한 무게중심을 찾기까지 심화할 수는 없었지만, 이 학생들은 나중에 적분을 배우게 될 때 다시 한 번 무게중심을 증명할 동기가 생길 것이다.

연구에 참여한 학생들은 오목다각형으로까지 내용을 확장시키지는 못했지만, 위의 활동과 성질에 대한 학습을 통해, 다음과 같은 소감을 말했다.

> 처음에 다각형의 무게중심을 구해보기로 했을 때, 우리는 많은 어려움을 겪었습니다. 우리의 예상대로 무게중심이 구해지지 않았기 때문입니다. 그래서 여러 가지 자료나 인터넷 정보 등을 조사해서 다각형의 무게중심을 구하는 방법을 찾고, 이를 검증하여 다리가 하나뿐인 테이블 설계를 했지만, 이 방법에 대해 보다 수학적인 방법으로 더 확인해 보고 싶은 점이 많이 남아있습니다. 또 증명을 완전하게 해 보고 싶은 욕심도 생겼습니다. 그리고 좌표평면에서 무게중심 구하는 방법도 알아보고 싶습니다.

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구는 수학 영재학생을 대상으로 하여 중학교 교육과정에서 다루고 있는 삼각형의 무게중심으로부터 그 정의와 성질을 탐구하여 다각형의 무게중심까지 확장할 수 있는 방법을 알아보았다. 수학 영재교육의 심화학습 주제로 다각형의 무게중심을 제안한 것이며, 이 주제는 학교 교육과정에 제시되어 있지 않지만 학생들에게는 탐구 대상이 될 수 있고 수학을 깊이 있게 학습하는데 사용될 수 있다. 다각형의 무게중심은 볼록사각형의 무게중심으로 접근할

수 있었고, 우리는 세 가지 방법으로 무게중심을 찾아보았다. 처음 두 가지 방법은 중학교 교육과정을 벗어나지만, 내분에 의한 무게중심 찾기는 무게중심이 무엇이고 그 의미가 무엇인지 찾아갈 수 있는 중요한 아이디어를 생각하게 할 수 있는 것으로 중학교 수학 영재에게 적용가능하다. 본 연구에 참여한 학생들은 무게중심을 찾을 때 공식이 아니라 자를 이용해서 내분점의 위치를 확인할 수 있었다.

이러한 주제탐구형의 심화 학습을 지도할 때 교사들은 학생들이 기존에 가지고 있는 자신의 수학적 지식과 정보를 동원하여 그 중 유용한 것을 가려내고 이로부터 유추, 일반화, 예상과 확인 등의 과정을 거치면서 증명에도 이르도록 해야 한다. 본 연구에서 학생들이 사각형의 무게중심을 찾아내기 위한 과정에서 보여준 다양한 사고와 문제해결을 위한 시도는 주제탐구형 심화학습에서 학생들에게 어떤 사고를 경험시키고 신장시킬 수 있을 것인지에 대한 시사점을 제공한다. 평행사변형의 무게중심은 학생들이 기존에 가지고 있던 지식과 방법만으로 확장이 가능하지만, 등변사다리꼴의 무게중심을 찾을 때 학생들은 유추를 할 수밖에 없었고, 곧바로 직관 또는 특수한 경우에 적용되지 않는 반례들을 발견하여 일반화가 가능하지 않음을 깨달았다. 학생들은 다시 원점으로 돌아와 또 다른 예상과 확인, 일반화 등의 과정을 거쳤으며, 이를 통해 다양한 사고와 문제해결 방법을 사용할 수 있었다.

또 교사는 학생들이 하나의 학습 주제 안에서 문제를 해결하면서 사용하게 되거나 꼭 필요한 용어의 정의를 어떻게 내릴 것인가를 결정하고 여러 가지 성질을 예측하고 확인하도록 해야 한다. 본 연구에서 보았듯이 삼각형의 무게중심에 대해 갖고 있는 정보 중에서 중선의 교점에 초점을 둘 것이냐, 넓이의 평형점에 초점을 둘 것이냐에 따라 다각형의 무게중심은 전혀 다른 의미를 갖게 되며 성질의 확장도 달라진다. 이처럼 용어의 정의에 따라 그 성질이 어떻게 달라질 수 있는가에 대한 것을 학생들이 직접 찾아내고 살펴볼 수 있다면, 학생들은 스스로 찾아내고 밝혀낸 사실들을 조직하고 다듬어서 나름대로의 새로운 지식을 창출해 낼 수 있다.

본 연구에 참여한 학생들의 활동 내용을 자세하게 소개하지는 않았지만, 학생 스스로 이러한 수학적 탐구를 한 것은 수학 영재교육에서 의미 있는 학습 내용과 방법이 무엇인지에 대한 시사점을 준다. 특히 다각형의 무게중심 학습은 학생 스스로 도형을 관찰하고 개념과 성질을 발견하여 이해하고 다양한 추론을 경험하게 함으로써, 무게중심 이외의 주제에 대해서도 이해하고 귀납적으로 성질을 찾아내어 옳은지 그 타당성을 검증하는 연역적 추론을 경험하게 해준다.

이 연구를 통해 교사는 무게중심이라는 내용에 대하여 깊이 있는 통찰을 가지고 학습 지도에 임할 수 있으며, 수학을 보다 심화하여 학습하고자 하는 학생들을 안내할 수 있을 것이다. 학생들이 진정 수학을 탐구하고자 한다면, 교사들도 학생과 수학자와 같은 경험을 하여 좌절과 기쁨을 느끼고 이해할 수 있어야 하며, 본 연구와 같이 수학적 주제를 선택하여 연구결과를 산출해보려는 노력이 필요할 것이다. 비록 그것이 형식적으로 엄밀한 수준까지는 이르지 못한다고 하더라도 학생들은 그 안에서 다양한 수학적 사고방법과 문제해결 과정을 시도하고 경험하게 되며 시행착오와 문제해결 과정의 수정, 보완, 세련화 등을 거치면서 이들 사고를 신장시킬 기회를 갖게 될 것이다.

참고문헌

강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙(2002). **수학 8-나**. (주)중앙교육진흥연구소.

고성은 · 박복현 · 김준희 · 최수일 · 강운중 · 소순영(2002). **수학8-나**. (주)블랙박스.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2002). **수학 8-나**. (주) 고려출판.

김홍종(2003). **아르키메데스 탐구**. 서울대학교 과학영재센터강의록.

나귀수 · 황혜정 · 한경혜(2001). **수학과 교육 목표 및 내용 체계화 연구(II)**. 한국교육과정평가원 RRE-2001-.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종(2002). **수학 8-나**. (주) 교학사.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선(2002). **수학 8-나**. 대한교과서(주).

박재용 · 육상국 · 임창우 · 한옥동 · 박규홍 · 고성균 · 김성국 · 김유태(2002). **수학 8-나**. 두레교육(주).

송상헌 · 김지영(2003). 초등학교 수학 영재학급용 프로그램 개발에 관한 연구. **인천교육대학교 과학교육논총**, **15**, 71-100.

신항균(2002). **수학 8-나**. 형설출판사.

양승갑 · 박영수 · 박원선 · 배종숙 · 성덕현 · 이성길 · 홍우철(2002). **수학 8-나**. (주)금성출판사.

이영하 · 허민 · 박영훈 · 여태경(2002). **수학 8-나**. (주)교문사.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2002a). **수학 8-나**. (주)도서출판디딤돌.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2002b). **수학 8-나 교사용지도서**. (주)도서출판디딤돌.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재(2002). **수학 8-나**. (주)금성출판사.

최용준(2002). 수학 8-나. 천재교육.

한국사전연구원(1992). **수학사전(下권)**.

한인기(2001). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구. **중등교육연구**, **13**, 205-215.

황석근 · 이재돈(2002). **수학 8-나**. 한서출판사.

飯高 茂/松本幸夫 編(2002). **數學 A**. 東京書籍.

Study on a Center of Gravity of Polygon as an Enriched Learning Topic for the Gifted in Mathematics

Kim, Sun Hee (KICE)
Kim, Ki Yeon (Bugak Middle School)

In this paper, we consider a center of gravity of convex polygon which could be an enriched topic for the gifted in mathematics(7th grades) and suggested a case that the gifted experienced a center of gravity. Based on properties of Archimedes' center of mass, we define it as a point which make a polygon be in counterpoised with its area and explain how to find that point through using integral calculus or internal division. Then we consider that the gifted would experience various kinds of mathematical thinking and apply diverse ways of problem solving as searching for this topic. As this research, the teacher would be able to conduct the gifted with penetration into center of gravity and to let them participate in advanced learning courses which value mathematical thinking while they undergo similar experiences such as mathematicians.

* **Key words** : center of gravity(무게중심), the gifted(영재)

논문접수 : 2005. 7. 2
심사완료 : 2008. 8. 1