

# 통계량들의 상관정보에 바탕을 둔 신호검파기의 성능 비교

준회원 주 현\*, 종신회원 배진수\*†, 송익호\*\*

## A Relative Performance Comparison of Signal Detectors Based on the Correlation Information

Hyun Joo\* Associate Member, Jinsoo Bae\*†, Iickho Song\*\* Lifelong Member

### 요약

많은 경우에 신호 검파기들은 관측량 그 자체보다는 관측량의 비선형 통계량을 쓴다. 부호 통계량은 이러한 비선형 통계량의 대표적 보기인데 관측량의 부호정보만을 가지고 있다. 이 논문에서는 관측량과 부호 통계량, 크기 통계량과 같은 비선형 통계량들 사이의 상관 계수를 얻어내고, 비선형 통계량들을 쓰는 검파기들의 점근적 성능을 분석한다.

**Key Words** : asymptotic performance, signal detector, correlation coefficient, sign statistics

### ABSTRACT

Signal detectors often utilize nonlinear statistics of observations rather than the observation as they are. The sign statistic, a typical example of the nonlinear statistics, for example, relies only on the sign information of observations. In this letter, a qualitative analysis is presented that the correlation coefficients between the statistics and original observations can be used to predict the asymptotic performance of a detection schemes utilizing the nonlinear statistics.

### I. 소개

통계량이란 관측량으로부터 부분적인(그러나 바람직한) 정보를 추출한 것을 말한다. 부호, 크기, 순위, 크기순위 통계량들이 대표적인 보기이다<sup>[1]</sup>. 물론 각 통계량의 정보는 모두 관측량에 포함되어 있지만, 부분적인 정보가 신호 검파에 더 유용할 수 있다. 예를 들어 충격성잡음과 낮은 SNR 환경에선, 부호 검파기가 선형 검파기에 비해 성능이 좋다는 것은 이미 잘 알려진 사실이다<sup>[2-5]</sup>.

그럼에도 불구하고, ‘충격성’과 ‘낮은’이라는 말이 애매하기 때문에 어떠한 경우에 부호 검파기를 사용해야 하는지 결정하는 것은 쉬운 일이 아니다. 이러한 경우, 주어진 상황에서 ‘미리’ 어떤 검파기의

성능을 짐작하기 위한 성능측도를 얻어내는 것은 유용한 일이다. 이것은 본 논문의 목적 가운데 하나인 부호 통계량과 관측량 사이의 상관정보를 알아보는 것이 큰 의미가 있을 수도 있음을 나타낸다.

관측량과 부호통계량 사이의 상관계수를 알아봄으로써, 선형검파기에 대한 부호검파기의 점근 상대 성능을 짐작할 수 있다. 또한 이러한 부호 검파기의 점근적 성능을 비교하기 위해 관측량과 크기 통계량간의 상관계수 연구도 필요함을 알 수 있다.

### II. 머리말

관측 모형이 아래와 같다고 하자.

$$X_i = \theta + W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

\* 세종대학교 정보통신공학과 (baej@sejong.ac.kr), † 교신저자, 논문번호 : KICS2005-05-209, 접수일자 : 2005년 5월 23일

\*\* 한국과학기술원 전자전산학과 (i.song@iecc.org)

※ 이 논문은 2004년도 한국학술재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRP-2004-041-D00449)

여기서  $X_i$ 는 관측량,  $\theta$ 는 신호의 크기,  $W_i$ 는 백색잡음,  $n$ 은 표본의 크기이다. 관측 모형 (1)에서의 신호검파는 다음과 같은 모수 가설 검정의 문제로 나타낼 수 있다.

$$H: \theta = 0 \quad (2)$$

$$K: \theta > 0 \quad (3)$$

여기서  $H$ 는 백색잡음만 있는 귀무가설,  $K$ 는 백색잡음과 신호가 함께 있는 대립가설을 나타낸다.

관측량을  $X_i$ 라 할 때, 부호통계량을  $Z_i = \text{sgn}(X_i)$ , 크기 통계량을  $|X_i|$ 라고 하자. 여기서  $x > 0$  일때  $\text{sgn}(x) = 1$ ,  $x = 0$ 일때  $\text{sgn}(x) = 0$ ,  $x < 0$ 일때  $\text{sgn}(x) = -1$ 이다. 관측량은 부호 정보와 크기 정보를 모두 가지고 있으며, 관측량을 부호 통계량과 크기 통계량의 곱으로 즉,  $(X_i = Z_i |X_i|)$ 로 나타낼 수 있다. 한편, 관측벡터를  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 라고 할 때 선형 (L) 검파기, 부호 (S) 검파기, 크기 (M) 검파기의 검정 통계량은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_L(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \quad (4)$$

$$T_S(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (5)$$

$$T_M(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n |X_i| \quad (6)$$

### III. 편향계수

본 논문에서는 널리 쓰이는 여러 성능측도들 중 편향 계수에<sup>[5]</sup> 중점을 두었으며, 이는 아래와 같다.

$$d^2(\theta) = \frac{(E\{T|K\} - E\{T|H\})^2}{V\{T|H\}} \quad (7)$$

여기서  $T$ 는 검파기의 검정 통계량,  $E\{\cdot\}$ 는 기대값,  $V\{\cdot\}$ 는 분산을 나타낸다<sup>[4]</sup>.

두 검파기 A와 B가 있을때, 검파기 B에 대한 검파기 A의 상대 성능을 알아보자. 이를 위해서 두 검파기의 편향 계수 비를 아래와 같이 나타내었다.

$$RDC_{A,B}(\theta) = \frac{d_{A}^2(\theta)}{d_{B}^2(\theta)} \quad (8)$$

여기서  $d_A^2(\theta)$ 와  $d_B^2(\theta)$ 는 각 검파기의 편향계수를 나타낸다. 검파이론에서 점근 ( $n \rightarrow \infty$ ) 성능 분석은 유용하게 쓰이는데, 두 검파기간의 편향 계수 비를  $\theta \rightarrow 0$ 으로 극한을 취하면 ARE와 같다.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} RDC_{A,B}(\theta) = ARE_{A,B} = \frac{\xi_A}{\xi_B} \quad (9)$$

위 식에서  $\xi$ 는 각 검파기의 효율을,  $ARE_{A,B}$ 는 검파기 B에 대한 검파기 A의 상대 점근효능을 나타낸다<sup>[1]</sup>. ARE는 널리 쓰이는 유용한 성능 측도 가운데 하나이고, RDC는 ARE의 일반화된 형태로 볼 수 있다. 우리는 식 (8)의  $RDC_{A,B}(\theta)$ 로부터 검파기 B에 상대적인 검파기 A의 성능을 쉽게 알 수 있다. 만약  $RDC_{A,B}(\theta) > 1$ 이라면 (또는 식 (9)에서  $\theta \rightarrow 0$ 일때  $ARE_{A,B} > 1$ 이라면), 검파기 A가 검파기 B보다 성능이 좋다는 것을 나타낸다. 정규 (G) 잡음과 겹지수 (L) 잡음 환경에서 각 검파기들의 상대 성능을 비교해보자. 각 잡음의 확률밀도함수는 다음과 같다.

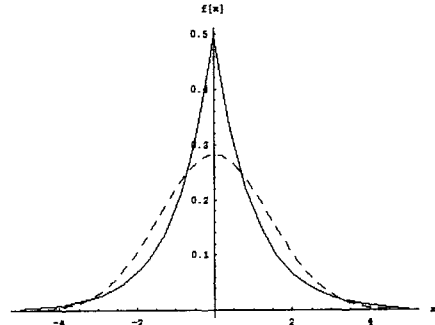


그림 1. 분산이 2인 잡음 확률밀도함수. (실선: 라플라스 점선: 가우시안)

$$f_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot 2}\right\} \quad (10)$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|) \quad (11)$$

공정한 성능 비교를 위해 각 잡음의 전력 세기를 2로 한다. 비록 두 잡음이 같은 전력 세기를 갖지만, 겹지수 잡음이 정규 잡음에 비해 두터운 꼬리를 가지고 있으므로 정규 잡음에 비해 충격성이라는 것을 알 수 있다<sup>[8]</sup>. 그림 1에 두 잡음의 확률 밀도 함수를 보였다.

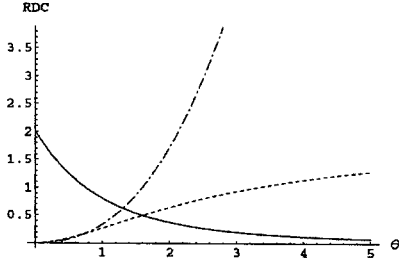


그림 2. 라플라스 환경에서의 RDC. (점선:  $RDC_{S,L}(\theta)$ , 일점쇄선:  $RDC_{M,L}(\theta)$ )

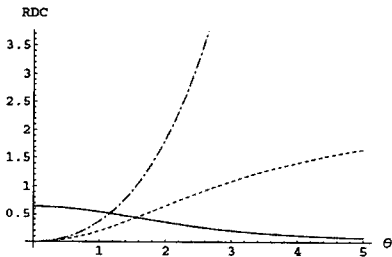


그림 3. 가우시안 잡음환경에서의 RDC. (점선:  $RDC_{S,L}(\theta)$ , 일점쇄선:  $RDC_{M,L}(\theta)$ )

그림 2와 3에서는 겹치수 잡음과 정규 잡음 환경에서 선형 검파기에 대한 부호 검파기와 크기 검파기의 점근 상대 성능을 보여준다. 겹치수 잡음 환경에서는  $\theta < 0.74$ 일 때 ( $\theta$ 가 작은 범위) 부호 검파기가,  $0.74 < \theta < 3.42$ 일 때 ( $\theta$ 가 중간 범위) 선형 검파기가,  $3.42 < \theta$ 일 때 ( $\theta$ 가 큰 범위) 크기 검파기의 성능이 다른 검파기들에 비해 상대적으로 좋다는 것을 확인할 수 있다. 정규 잡음 환경에서  $\theta < 2.78$ 일 때 선형 검파기가, 그 외의  $\theta$ 범위에서는 크기 검파기의 성능이 상대적으로 좋다는 것을 알 수 있다. 즉, 정규 잡음에서는  $\theta$ 의 전 구간에서 부호 검파기의 성능은 선형 검파기나 크기 검파기에 비해 성능이 떨어지는 것을 볼 수 있다. 유한 표본 크기를 갖는 세 검파기의 검파 확률들이  $\theta$ 가 커짐에 따라 1에 접근한다는 것에 주목할만 하다. 그림 2와 3을 보면  $\theta$ 가 커짐에 따라 부호 검파기의 성능이 떨어진다는 것으로 오해하기 쉽다. 그러나 그림 2와 3은 선형 검파기에 대한 부호 검파기의 점근 상대성능을 나타낸 것뿐이다.

#### IV. 상관계수를 이용한 상대적 성능 평가

##### 4.1 상관계수들

관측량, 부호 통계량, 크기 통계량 사이의 상관계수에 대해 알아보자.  $f_w$ 와  $F_w$ 를 각각 백색 잡음

$W_i$ 의 확률 밀도 함수, 누적 분포 함수라 하자. 이를 이용하여 각 상관 계수들을 다음과 같이 얻을 수 있다<sup>[8]</sup>.

$$\rho_{Z, X_i}(\theta) = \frac{\theta F_w(-\theta) - m_\theta^{1-}}{\sqrt{\sigma_w^2(1 - F_w(-\theta))F_w(-\theta)}}, \quad (12)$$

$$\rho_{|X_i|, X_i}(\theta) = \frac{\sigma_\theta^{2+} - \sigma_\theta^{2-}}{\sqrt{\sigma_w^2(\sigma_w^2 + 4m_\theta^{1+}m_\theta^{1-})}}, \quad (13)$$

$$\rho_{|X_i|, Z_i}(\theta) = \frac{(1 - F_w(-\theta))m_\theta^{1-} + F_w(-\theta)m_\theta^{1+}}{\sqrt{\sigma_w^2(1 - F_w(-\theta))F_w(-\theta)}}, \quad (14)$$

여기서  $\rho_{XY}$ 는 두 확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 상관계수를 나타내며,

$$m_\theta^{k\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_w(x - \theta) u(\pm x) dx, \quad (16)$$

$$\sigma_\theta^{2\pm} = m_\theta^{2\pm} - (m_\theta^{1\pm})^2, \quad (17)$$

이고,  $\sigma_w^2$ 은 단측 스펙트럼에서의 잡음 세기이다. 또한 식 (16)에서  $u(x)$ 는 단위 계단 함수이다.

##### 4.2 검파기들의 성능 비교

검파기와 크기 검파기의 성능을 비교할때 관측량  $X_i$ 와 부호 통계량  $Z_i$ 간의 상관계수와 관측량  $X_i$ 와 크기 통계량  $|X_i|$ 간의 상관 계수를 비교하는 것이 도움이 된다. 두 통계량 중 관측량  $X_i$ 와 상관관계가 큰 통계량을 사용하는 검파기의 성능이 더 좋다. 곧, 만약  $\rho_{Z, X_i} > \rho_{|X_i|, X_i}$  라면  $RDC_{S, M} > 1$ 라고 말할 수 있다. 이것은 관측량과 큰 상관관계를 갖는 통계량을 사용하는 검파기가 더욱 우수한 성능을 갖는다는 것을 말한다.

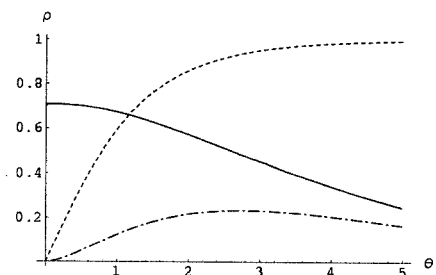


그림 4. 라플라스 잡음환경에서의 상관계수. (실선:  $\rho_{Z, X_i}(\theta)$ , 점선:  $\rho_{|X_i|, X_i}(\theta)$ , 일점쇄선:  $\rho_{Z_i, |X_i|}(\theta)$ )

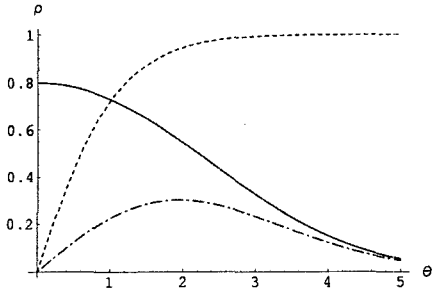


그림 5. 가우시안 잡음환경에서의 상관계수.(실선:  $\rho_{Z, X_i}(\theta)$ , 점선:  $\rho_{X, I, X_i}(\theta)$ , 일점쇄선:  $\rho_{Z, I, X_i}(\theta)$ )

부호 검파기는 다음 두 조건을 만족할때 선형 검파기보다 우수한 성능을 나타낸다.

- (1)  $\rho_{X, Z_i} > \rho_{I, X_i}$  (부호 검파기의 성능이 크기 검파기보다 우수한 경우)
- (2)  $\rho_{I, X_i, Z_i} \approx 0$  (부호와 크기 통계량이 매우 작은 상관 계수를 가질 경우)

이는 관측량과 부호 통계량  $Z_i$ 와의 상관관계가 관측량과 크기 통계량  $|X_i|$ 와의 상관관계보다 매우 클때 부호 검파기가 선형 검파기보다 더 우수한 성능을 보인다는 것을 나타낸다.

그림 2~5에서 작은  $\theta$ 의 범위일 경우 비록 겹치수 잡음에서보다 (그림 4) 정규 잡음 환경에서 (그림 5) 부호 통계량이 관측량과 큰 상관관계를 갖지만, 선형 검파기에 비해 부호 검파기의 성능이 떨어진다는 것을 확인할 수 있다 (그림 2와 그림 3). 상관계수  $\rho_{Z, X_i}$ 가 겹치수 잡음보다 정규 잡음 환경에서 더 크지만, 부호 검파기의 성능은 정규 잡음보다 겹치수 잡음환경에서 선형 검파기에 비해 더 우수하다. 이것은 상관계수  $\rho_{I, X_i, Z_i}$ 가 정규 잡음환경보다 겹치수 잡음환경에서 더 작다는 것으로 확인할 수 있다.

이와 비슷한 방법으로 선형 검파기에 대한 부호 검파기의 상대 성능을 알 수 있다.

### 4.3 성능측정량

상관관계에 근거한 성능 측정을  $M(\theta)$ 라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$M(\theta) = \frac{\theta^{-p} \cdot \rho_{Z, I, X_i}(\theta)}{\rho_{Z, X_i}(\theta) - \rho_{X, I, X_i}(\theta)}, \rho \geq 0 \quad (20)$$

여기서  $p$ 는 양의 값을 갖는 조절상수이며,  $M(\theta)$ 이 발산하지 않도록 조정하는 역할을 한다. 큰  $\theta$ 범위

에서의 분해능은  $p$ 가 커짐에 따라 낮아지고,  $p$ 가 낮아짐에 따라 커진다. 성능측정을 위해  $p$ 의 적절한 값이 필요하다. 그림 6에서는  $p=1.5$ 의 값을 써서  $M(\theta)$ 을 나타내었다.

$M(\theta)$ 의 부호와 크기는 검파기의 상대 성능과 밀접한 관계가 있다. 만약  $M(\theta)$ 의 크기인  $|M(\theta)|$ 가 크다면 다른 검파기에 비해 선형 검파기의 성능이 우수하고, 만약  $|M(\theta)|$ 가 작다면 부호 검파기나 크기 검파기의 성능이 가장 우수하다는 것을 나타낸다. 또한  $M(\theta)$ 의 부호로도 검파기의 성능을 짐작할 수 있다. 만약  $M(\theta)$ 의 부호가 양수이면, 부호 검파기가,  $M(\theta)$ 의 부호가 음수이면, 크기 검파기가 부호 검파기에 비해 성능이 우수함을 알 수 있다. 정규 잡음 환경에서  $M(\theta)$ 은  $\theta$ 가 작을때 임계값 아래로 내려오지 않는다. 이는  $\theta$ 가 작을때 부호 검파기가 선형 검파기에 비해 좋은 성능이 아니라는 것을 의미한다.

그림 6에서 적당한 임계값을 정할 수 있다. 큰  $\theta$  구간에서  $M(\theta)$ 은 낮은 분해능을 갖지만, 이 구간에서는 검파 확률들이 1에 수렴하기 때문에 정당화될 수 있는 부분이다.

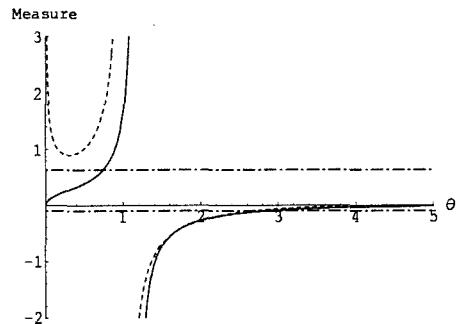


그림 6.  $p=1.5$ 인 성능측정량  $M(\theta)$ . (실선: 라플라스, 점선: 가우시안, 일점쇄선: 임계값)

## V. 결론

적절한 통계량을 사용함으로써 더 나은 성능의 검파기를 설계 할 수 있음을 보였고, 각 통계량을 사용한 검파기의 상대 성능들을 상관 계수들을 써서 비교해 보았다. 이것은 통계량들의 상관계수를 알아봄으로써 검파기의 성능을 어느 정도 짐작할 수 있다는 것을 의미하며, 검파기 설계에 있어 통계량의 상관정보로부터 검파기의 성능을 어느 정도 짐작할 수 있다는 것에 큰 의미가 있다.

잡음 특성과 신호의 세기가 주어졌을때, 신호검파를 위해 한 두개의 적당한 통계량을 먼저 선택하는 검파기 설계 방법을 생각해 볼 수 있다. 이것은 더 나은 성능의 검파기를 설계하기 위한 시간과 노력들을 상당히 줄여줄 것이다.

참 고 문 헌

[1] I. Song, J. Bae, and S.Y. Kim, *Advanced Theory of Signal Detection*, Springer- Verlag, 2002.

[2] G. A. Tsihrintzis and C. L. Nikias, "Incoherent receiver in alpha-stable impulsive noise," *IEEE Trans. Signal Process.*, Vol.43, pp. 2225-2229, Sep. 1995.

[3] S.A. Kassam and J.B.Thomas, "Generalizations of the sign detector based on conditional tests," *IEEE Trans. Commun*, Vol. 24, pp. 481-487, May 1976.

[4] H. V. Poor and J. B. Thomas (Ed.), *Advances in Statistical Signal Processing: Vol. 2. Signal Detection*, JAI Press, Greenwich, 1993.

[5] P. Willett and P.F. Swaszek, "On the performance degradation from one-bit quantized detection," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol.41, pp. 1997- 2003, Nov. 1995.

[6] S.M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: 2. Detection Theory*, Prentice Hall, 1998.

[7] D. Middleton, "Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications: New methods and results for Class A and Class B noise models", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 45, pp. 1129-1149, May 1999.

[8] J. Bae, H. Kwon, S.W. Choi, S.Y. Kim, S.R. Park, S.Yoon, and I. Song, "On the correlations of the sign and ranks of observations in signal detection", *Int. Symp. Intell. Signal Process., Comm. Systems (ISPACS)*, pp. 1-5, Seoul, Korea, Nov. 2004.

주 현 (Hyun Joo)

준회원



2005년 2월 세종대학교 정보통신공학과 공학사  
2005년 3월~현재 세종대학교 정보통신공학과 석사과정  
<관심분야> 신호처리

배 진 수 (Jinsoo Bae)

종신회원

1990년 2월 경기과학고등학교 조기졸업 (우등)  
1993년 2월 한국과학기술원 전기전산학과 공학사 (전체차석, 조기졸업, 최우등)  
1995년 2월 한국과학기술원 전기전산학과 공학석사  
1998년 2월 한국과학기술원 전기전산학과 공학박사  
1997년 1월~1997년 12월 동경대학 객원연구원  
1998년 1월~1998년 10월 앤더슨컨설팅 컨설턴트  
1998년 11월~1999년 12월 일본모토로라 연구원  
1999년 9월~2000년 2월 LG텔레콤 과장  
2000년 3월~현재 세종대학교 정보통신공학과 전임강사, 조교수  
<관심분야> 신호검파이론

송 익 호 (Ickho Song)

종신회원

한국통신학회 논문지 제30권 5C호 참조