한국학교수학회논문집 제 8 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 8, Number 3, 367-382, September 2005

학교수학에서의 대수적 구조 지도에 대한 소고

김성준[1)]

본 연구는 학교수학에서 대수적 구조(군)의 지도에 관한 논의를 담고 있다. 이를 위해 먼저 Bruner가 제시한 지식의 구조에 대해 논의하고, 그 내용을 학교대수의 지도와 관련지어 살펴본다. 또한 대수적 구조 가운데 군 개념을 중심으로 하여 이와 관련된 선행연구를 Piaget, Freudenthal, Dubinsky, Burn 등의 논의에서 검토해본다. 그리고 초등수학에서부터 고등학교 수학까지 군 개념과 관련된 내용이 어떻게 표현되고 있는지를 살펴본다. 학교수학에서 군 개념과 관련된 내용은 초등수학에서부터 시작되는데, 초등수학의 경우 항등원, 교환법칙, 결합법칙 등을 수의 맥락에서 찾아볼 수 있다. 중학교 수학에서는 덧셈과 곱셈 연산에 있어서 항등원, 역원, 교환법칙, 결합법칙이 보다 구체적으로 제시되고 있으며, 이러한 규칙은 등식의 성질과 이항, 일차방정식의 풀이 등을 통해 살펴볼 수 있다. 고등학교 수학에서는 이항연산을 비롯한 여러 영역에서 군 개념을 포함하는 대수적 구조가 제시되고 있다. 이에 비해 학교대수에서는 이러한 주제들을 통합적으로 구성하려는 시도가 이루어지지 않고 있으며 각각의 내용이 독립적으로 다루어지고 있다. 본 연구에서는 학교대수에서 군 개념과 관련된 내용들을 검토함으로써 대수적 구조(군) 측면에서 이러한 내용들을 종합해보고자 한다.

주요용어 : 학교수학, 학교대수, 대수적 구조, 군 개념

Ⅰ. 서론

[표 1] 일차방정식의 풀이

$2+x=6$	$2x=6$
$-2+(2+x)=-2+6$	$\frac{1}{2}(2x)=\frac{1}{2}\times(6)$
$(-2+2)+x=4$	$(\frac{1}{2}\times 2)x=3$
$0+x=4$	$1x=3$
$x=4$	$x=3$

위의 [표 1]에 제시된 문제들은 중학교 1학년에서 학생들이 가장 흔하게 접하면서 쉽게

1) 부산교육대학교 수학교육과 (joonysk@bnue.ac.kr)

생각하는 유형의 일차방정식이다. 물론 수학교과서와 수업시간에는 위의 과정처럼 각 단계를 자세하게 구분하면서 풀이과정을 설명하지는 않고 있다. 중학교 1학년에서 등식의 성질이나 이항을 배운 학생이라면, [표 1]의 왼쪽 방정식 문제를 쉽게 해결할 수 있을 것이다. 오른쪽 문제의 경우도 등식의 성질과 유리수의 곱셈을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다. 학생들은 이와 유사한 문제를 이미 초등학교 과정에서 문자가 아닌 □ 등의 기호를 이용해서 해결해보았다. 그리고 중학교 '방정식' 단원에서 문자가 등장하면서 이러한 유형의 일차방정식을 본격적으로 학습하게 된다. 그렇다면 [표 1]에서 제시된 두 방정식의 풀이에서 이들이 동일한 과정임을 설명한다면, 이는 학교대수[2]의 학습(문자와 식, 방정식 등)에 어떤 영향을 미칠 것인가? 본 연구는 이러한 문제의식에서부터 시작되었다. 물론 [표 1]에서 제시한 일차방정식의 풀이과정을 비교하는 것은 고등학교 1학년 '수와 연산' 단원에서 항등원과 역원의 개념을 학습한 이후에야 어느 정도 분명해질 것이다. 그러나 중학교 과정에서 대수(문자와 식)를 학습하기 시작하면서, 그리고 그전에 '수와 식' 단원에서 교환법칙, 결합법칙 등을 학습하고 또 '방정식' 단원에서 여러 유형의 일차방정식을 학습한다고 할 때, [표 1]에서 제시한 방정식의 풀이과정은 중학교 학생의 수준에서도 이해 가능할 것이다. 그러나 실제로는 이러한 풀이과정이 중학교 수준에서 지나치게 어렵거나 의미 없는 것으로 생각되고 있으며, 이로 인해 중학교 수학은 방정식의 풀이에서 이항을 이용한 기계적인 계산만을 강조하고 있다. 또한 고등학교 수학은 중학교 수학에서 학습한 일차방정식과는 별도로 '수와 연산' 단원에서 항등원과 역원 개념을 도입하고, 이항연산에서 이러한 개념들이 중요하다는 말만을 반복할 뿐 학교수학의 어디에서 어떻게 이 개념이 중요하게 사용되는지에 대해서는 어떠한 설명도 제시되지 않고 있다. 이러한 이유로 고등학교 학생들은 학교수학에서 항등원과 역원의 중요성이나 그 역할에 대해 의문을 해결하지 못한 채 항등원과 역원을 구하는 공식에 따라서 단순한 계산만을 반복할 뿐, 이미 학습한 방정식에서 이러한 개념들이 사용되었다는 생각을 하지 못하게 된다.

한편 대학수학을 통해 군론(group theory)을 공부한 사람이라면, [표 1]과 같은 방정식의 풀이과정에 많은 개념들이 포함되어 있음을 쉽게 확인할 수 있다. 그리고 표현상으로 다르게 보이는 두 방정식의 풀이과정이 사실은 동일하다는 것을 알 수 있다. 그렇다면 만약 중학교 학생들에게 [표 1]의 두 방정식이 같은 조작을 반복하는 과정이라고 설명해 준다면 그들은 어떤 반응을 보일까? 그리고 이러한 풀이 과정이 일반적인 이항연산에서 적용된다는 사실을 고등학교 학생들에게 알려 준다면, 그들은 비록 단순하지만 수학의 구조에 대해 신비감을 느낄 수 있지 않을까?[3] 본 연구는 이러한 생각들로부터 시작하여 학교수학에서 살펴볼 수 있는 대수적 구조에 대해 생각해보고자 한다. 그러나 그렇다고 해서 본 연구에서 이러한 군 개념과 관련된 내용을 중등수학에서 직접 도입하자는 주장을 하려는 것은 아니다. 단지 앞서 설명했듯이 '구조'라는 관점에서 학교수학에서 다루는 개별적인 내용들을 전체적으로 파악하게 함으로써 학생들이 수학의 추상적인 구조에 대해 간접적으로 경험하는 기회를 제공하고자 하는 것이다. "어린 학생들에게 동화할 수 없는 너무 추상적인 개념을

2) 본 연구에서 사용한 '학교대수'라는 용어는 초등학교부터 고등학교까지의 학교수학에서 다루고 있는 내용 가운데 대수 영역으로 생각할 수 있는 주제들을 포괄하는 것이다.

3) 이것은 대학 1학년을 대상으로 교양수학을 지도하면서 연구자가 직접 경험한 것이다. 연구자는 군의 정의를 설명하기에 앞서 [표 1]의 두 방정식을 비교하고 덧붙여서 일반적인 이항연산과 함수, 행렬에서 이러한 구조에 대해 제시하였으며, 학생들은 이러한 과정을 비교하면서 자신들이 배운 학교수학이 서로 연결될 수 있다는 사실에 대단한 흥미를 느끼는 것을 확인할 수 있었다.

곧바로 제시해서는 안 되지만 점진적으로 수학이 그 진정한 모습을 드러내도록 해야 하며, 학생들이 추상적인 사고에 접근하기 어렵다는 이유로 수학의 추상적인 본성을 가리고 약화시키는 것은 중대한 잘못이다"(우정호, 1999)는 지적은 본 연구의 의도와 일치하는 것으로, 이와 같은 맥락에서 학교대수에서의 대수적 구조 특히 군 개념에 대해 생각해 보고자 한다. 곧, 이항연산에서 학습한 항등원, 역원 개념을 일차방정식의 풀이와 관련해서 생각해보고, 방정식의 풀이 과정에서 나타나는 기본적인 조작(군 개념)을 발견하고 나아가 이러한 조작을 학교수학의 다른 부분에서 찾아봄으로써, 학교대수에서 다루어지는 여러 내용들이 대수적 구조와 관련되어 있음을 확인할 수 있다.

일반적으로 초등수학에서 중등수학으로의 이행에서 이 둘 사이의 차이를 설명하고자 할 때, '구조'는 초등수학과 중등수학을 구분하는 중요한 요소 가운데 하나로 등장한다. 곧, 중등수학 이후 학교대수에서는 대수적 구조가 다루어지고 있으며, 그 내용에는 군 개념이 암묵적으로 혹은 간접적으로 포함되어 있다. 본 연구에서는 중등수학에서 살펴볼 수 있는 대수적 구조로 군 개념에 대해 생각해보고자 하며, 이를 위해 먼저 Bruner가 제시한 학문에서의 구조의 성격과 구조 학습의 의미를 살펴보고, 이를 토대로 학교대수를 학습하는데 구조에 대한 이해가 어떤 의미를 갖는지 논의하고자 한다. 또한 학교대수에서 다루는 대수적 구조 가운데 군 개념과 관련된 선행연구를 검토해볼 것이다. 더불어 현행 학교수학에서 대수적 구조와 관련된 내용을 단계적으로 살펴보고, 이러한 내용을 토대로 하여 이항연산에서 등장하는 군 개념과 일차방정식의 풀이에서 사용되는 군 개념 사이의 연결을 비롯하여 중등수학에 포함되어 있는 군 개념에 대해 생각해보고자 한다.

Ⅱ. 대수적 구조의 학습

다음에서는 대수적 구조에 대해 논의하기에 앞서, 박재문(1981)이 제시한 일반적인 교과 구조의 성격에 대하여 먼저 알아보고, 이러한 구조의 성격이 대수적 구조의 학습에 어떻게 적용될 수 있는지 살펴보고자 한다.

첫 번째로 생각해볼 수 있는 구조의 성격은 표면상에 눈으로 관찰할 수 있는 것이 아니라 대상의 저변에 숨겨져 있다는 것이다. 구조주의자들이 말하는 구조는 겉으로 나타난 개별적인 행위나 사건, 현상이 아니라, 그 모든 것들의 이면에서 그 사건과 현상들을 조정하는 규칙이나 원리이다. 수학의 경우 특히 현대수학은 이러한 구조에 의해 규정된다고 해도 과언이 아니다. 이것은 수학이 표면에 드러나는 구체적인 대상을 다루기보다는 그 이면에 있는 규칙과 원리(조작 자체)에 의해 좌우되기 때문인데, 이러한 수학적인 특징은 대수적 구조의 역사적 발달에서 더욱 분명하게 드러난다. 곧, 대수적 구조의 역사적 발달 과정에서 점진적인 추상화에 대해 분석한 Sfard(1995)의 연구에서는 대수적 구조의 본질을 문제의 구체적인 특성(대상)과 비결정적인 본성에서부터 벗어나 추상적인 조작 규칙과 원리를 우선적으로 인식하는데서 비롯된 것으로 보고 있다. 이는 대수적 구조에서 군 개념에서와 같은 어떤 일련의 조작이 표면에 드러나는 개별적인 대상보다 더 중요하다는 사실을 말해준다.

두 번째 교과 구조의 성격으로 변형을 생각해볼 수 있다.[4] 구조는 변형이라는 전제하에서

4) 구조의 변형은 구조 자체에서 본다면 가장 큰 장점이자 특징이라고 할 수 있지만, 학습자의 입장에서 본다면 장애가 된다. Vygotsky(1962)에 따르면, 이러한 장애는 새로운 사물이나 상황에서 개념으로 통합된 속성들이 원래의 개념과는 다르게 나타나기 때문에 일어나게 된다.

불변과 정형의 형태로 인식될 수 있다. 다시 말해, 변형을 통해 내적으로 조직화된 관계의 정형이 구조가 된다. Piaget는 "구조에서 변형이라는 아이디어가 없다면 구조는 모든 중요한 의미를 잃어버리게 된다"는 말로 구조에서 변형의 역할을 강조하였다(박재문, 1981, 재인용). 변형에서 중요한 사실은 서로 다른 두 표현이 변형 규칙에 따라 서로 관련을 맺게 된다는 점이다. 그렇다면 학교수학에서 이러한 변형의 아이디어는 어떻게 나타나는가? 초등수학에서부터 고등학교 수학에 이르기까지 수학은 그 내면에 어떤 형태로든 구조를 포함하고 있다. 수학 교과서에 나오는 다양한 지식은 독립적으로 존재하는 것이 아니라, 그 이면에 보다 일반적인 원리와 관련을 맺고 있으며, 동시에 이러한 일반적인 원리와 연결되는 보다 일반적인 원리와 관련을 맺고 있다(박재문, 1981). 이러한 주장은 초등수학에서 학생들이 해결하는 단순한 문제와 일상생활에서 사용하는 수치적 계산까지도 한편으로는 수학의 구조와 관련되어 있음을 의미한다. 단지 그 표현이 변형에 의해 다르게 제시될 뿐, 근본적으로 유지되는 것은 구조라는 것이다. 본 연구에서는 이 가운데 특히 '학교대수(문자와 식, 방정식 등)에서 구조는 어떤 모습으로 존재하고, 그 변형의 규칙에는 어떤 것이 있는가'에 초점을 맞추고 있다. 곧, '대수에서 심층과 표층, 변형 규칙에서 강조되는 구조의 모습은 어떤 것인가 그리고 대수에서 강조되어야 하는 변형의 규칙에는 어떤 것이 있는가'에 대해 생각해보고자 하며, 학교대수의 학습에서 변형을 통해 조직화된 관계의 정형을 수준에 따라 제시된 군 개념에서 찾고자 한다.[5]

교과 구조의 세 번째 성격으로는 전체성(wholeness)을 들 수 있다. 구조가 전체성이 있다는 말은 단순히 요소들이 모여서 구조를 이룬다는 것이 아니라, 먼저 전체적인 구조가 있고 요소는 그 전체적인 구조에 비추어서 의미를 가진다는 뜻이다. 따라서 교과에서 구조는 각각의 요소에 대해 논리적으로 우선하면서 요소들의 단순한 종합 이상이 되며, 사물을 보는 수단이자 개념을 이해하는 도구가 된다. 이러한 전체성은 대수를 비롯하여 학교수학의 학습에서도 생각해볼 수 있다. 즉, 수학의 학습에서 개별적인 내용을 전체적으로 구조화된 형태 안에서 인식하지 못하게 되면 이어지는 학습과정 역시 원만하게 진행되기 어렵게 된다. 따라서 수학학습에서 각각의 내용을 전체적으로 묶을 수 있는 구조의 중요성이 부각되는 것이다. 결국 구조에서의 전체성은 일차방정식이나 이항연산과 같은 학교대수의 주제들을 하나의 틀 안에서 보아야 하는 근거가 되며, 결국 전체적으로 구조화된 형태, 곧 군 개념을 포함하는 대수적 구조 내에서 각각의 주제들을 묶어서 보아야 함을 의미한다.

다음으로 대수적 구조의 학습이 무엇을 의미하는지를 Bruner(1960)의 ≪교육의 과정≫에 제시된 구조 학습을 근거로 살펴보고자 한다. Bruner는 '특수적 전이'와 '일반적 전이'라는 용어를 통해 구조적 파악의 중요성을 강조하는데, 여기서 특수적 전이란 원래 배운 것과 아주 비슷한 상황에 학습의 결과를 그대로 적용하는 것을 말하며, 일반적 전이란 기본적이고 일반적인 아이디어에서 비롯하여 지식의 폭을 확장하고 깊이를 심화하는 것을 의미한다(이홍우 역, 1996). 따라서 Bruner에게 지식의 구조는 일반적 전이의 결과로 설명될 수 있으며, 같은 맥락에서 수학 학습을 위한 출발점은 학생이 수학을 '배운 상태' 즉, 수학의 기본적인 내용을 학습한 상태로 볼 수 있다.[6] Bruner가 말하는 구조화의 장점을 수학 학습 특히 대

5) 학교대수에서 모든 연산은 덧셈과 곱셈에서 유도되므로 덧셈과 곱셈을 생각해보면 충분할 것이다. 즉, 일반적인 대수 법칙들은 부등식의 경우를 제외하면 덧셈과 곱셈에서 비롯되는 기본적인 규칙, 곧 군의 정의와 같이 볼 수 있다. 따라서 이것을 확대해서 생각해보면 학교대수의 모든 문제들은 어떤 형태로든 군의 구조와 관련되어 있다고 할 수 있다.

6) 학교대수에서 Bruner가 말하는 지식의 구조를 위한 출발점, 곧 수학을 배운 상태는 초등산술을 의

수 학습에 적용해서 생각해보면 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

(1) 기본적인 사항을 이해하면 교과를 훨씬 쉽게 파악할 수 있다. 교과에서 '기본'이라는 것은 수준에 따라 성격을 달리한다. Bruner는 ≪교육의 과정≫(1960)에서 물리, 생물학과 더불어 수학 교과에서의 기본적인 사항에 대해 예를 제시하고 있다. 그에 따르면 수학에서 특히 대수는 미지수와 기지수를 방정식에 배열하여 미지수를 기지수로 바꾸는 과정이며, 이 과정에서 대수적 구조의 기본적인 사항은 교환법칙, 결합법칙, 분배 법칙인 것이다(이홍우 역, 1996). 이것은 본 연구에서 대수적 구조의 본질을 군 개념으로 해석한 것과 일치한다. 한편 '학교대수에서 요구하는 기본적인 사항이란 무엇이며, 처음 대수를 학습하는 학생들에게 요구되는 기본이 무엇인가'에 대한 답을 찾기 위해, 대수 학습에서 제시되는 목표와 Prealgebra 교재의 내용의 두 측면으로 구분하여 살펴보면 다음과 같다.

먼저 학교대수에서 목표로 삼고 있는 구체적인 내용을 선행연구에서 살펴봄으로써, 대수 학습에서 필요로 하는 기본적인 사항을 어느 정도 가늠해볼 수 있을 것이다. Fey(1984)의 경우 대수 학습의 목표를 방정식에서 해를 찾는 방법을 통해 주어진 조건에 맞는 해를 구하는 것으로 보았으며, Schoenfeld(1986)는 학생들에게 실제 문제를 해결할 수 있도록 기호 사용을 가르치는 것을 학교대수의 목표로 보았다. 또한 Flanders(1987)는 학교대수는 물리와 공학에 필요한 지식을 학생들에게 준비시키는 것이라고 했다(Thorpe, 1989, 재인용). 이상에서 제시한 대수 학습의 목표를 통해 학교대수에서 '기본'이 되는 내용을 정리해 보면, 대수 학습은 방정식을 이해하는데 필요한 기본 조작과 대수 공식 및 변수에 대한 이해를 목표로 한다. 이에 학교대수는 문자 변수의 도입에서 시작하여 문자식의 조작과 방정식의 풀이로 이어지게 된다. 그렇다면 이 과정에서 기초적으로 다루어지는 내용은 무엇인가를 생각해보면, 대수 학습에서의 기본적인 사항을 이끌어낼 수 있을 것이다. 문자 변수는 수 연산에서 다루었던 내용을 일반화하고 공식화하기 위해 사용되며, 이것은 교환법칙과 결합법칙 등에서 표현된다. 또한 문자식의 조작과 방정식의 풀이에서 기초가 되는 것은 등식의 성질로, 이것 역시 항등원과 역원, 결합법칙 등을 포함한다. 따라서 학교대수의 목표는 이러한 기본에서부터 출발하고 있으며, 그 출발점에는 군 개념이 놓여 있음을 알 수 있다.

다음으로 Prealgebra 교재에서 다루는 내용을 살펴보면, 학교대수를 본격적으로 배우기 전에 필요로 하는 기본적인 사항에 대해 알 수 있을 것이다. 그 예로 ≪Prealgebra≫(Martin-Gay, 2001)에 제시된 내용을 살펴보면, 먼저 범자연수의 사칙연산을 다루고, 다음으로 정수의 사칙연산과 대수식의 정리 및 일차방정식이 다루고 있다. 그리고 분수와 소수, 분수와 소수를 포함하는 방정식, 비와 비율에 관한 문제가 등장하고, 마지막으로 넓이와 부피에 관한 기본적인 공식과 확률이 이어진다. 대부분의 Prealgebra 교재에서는 이처럼 대수 학습을 위한 기초로 산술, 곧 자연수를 비롯한 정수, 유리수의 사칙연산을 포함하고 있으며, 이와 함께 대수 학습에서 기본이 되는 변수와 대수식, 대수식의 조작 그리고 방정식의 풀이까지 포함하고 있음을 알 수 있다. 이처럼 Prealgebra의 내용은 대수적 구조가 대수 자체에서만 찾아볼 것이 아니라 산술과의 연결을 통해 대수로 확장될 수 있음을 보여준다. 곧, 산술에서의 연산이 대수적 구조를 파악하는 기본이 되며, 동시에 대수적 구조가 산술을 통해 확인될 수 있다는 것이다. 따라서 산술의 사칙연산에서 간접적으로 다루어지는 여러 가지 법칙이나 성질 등은 대수적 구조의 학습을 위한 기초가 됨을 알 수 있다.

미하며, 따라서 본 연구에서는 이후 논의에서는 군 개념을 바탕에 놓고 산술과 대수를 연결함으로써 대수적 구조의 학습이 이루어질 수 있음을 생각해보고자 한다.

이상 대수 학습의 목표와 Prealgebra 교재의 내용을 통해 중등학교 수준의 대수 학습에서 요구되는 기본적인 사항을 살펴본 결과, 학교대수는 결과적으로 방정식의 풀이를 지향하고 있으며, 따라서 방정식의 풀이 이전에 수와 문자의 맥락에서 다루는 교환법칙, 결합법칙 등은 대수 학습을 위한 기본이 된다. 그리고 이러한 연산규칙을 대수적 구조와 관련해서 생각해보면 군 개념이 그 바탕에 놓여 있으며 결국 학교대수의 학습은 군 개념을 어떤 형태로든 포함하고 있음을 알 수 있다.

(2) 세세한 사항은 그것이 전체적으로 구조화된 형태 안에 들어 있지 않는 한 곧 잊어버린다. 이것은 앞서 살펴본 구조의 성격 가운데 전체성과 관련된다. 일반적으로 학습의 순서에서 세세한 사항이 우선하고 구조화된 형태는 그 이후에 제시된다. 학교대수 역시 초등과정에서 충분한 산술 학습이 우선되고 그 이후에 대수를 통해 형식화되고 체계화된다. Vygotsky(1962)에 따르면, 이전의 모든 개념은 개별적으로 재구성하지 않으며, 일단 새로운 구조가 사고 속에 합병되고 그리고 기존 개념이 구조를 구성하는 지적 조작을 거쳐 흡수됨에 따라 새로운 구조로 확대된다(신현정 역, 1985). 이는 새로운 상위 개념이 하위 개념의 의미를 변형시킨다는 의미로, 대수적 구조에 숙달할 경우 기존 산술에서 다루었던 개념을 보다 폭넓게 볼 수 있고 전체적으로 조직화하여 기억할 수 있음을 말하는 것이다. 여기서 중요한 것은 이러한 체계화가 단순히 대수 학습 내에서만 그치지 않고 앞서 산술에서 학습한 여러 세세한 사항들과의 포괄적인 조직이 전제되어야 한다는 것이다. 다시 말해, 체계화는 구조를 지향하며, 체계화를 위해서는 세세한 사항이 반드시 필요조건으로 전제되어 야 한다는 것이다. 이러한 원리는 대수 학습에도 적용되는데, 학교대수에서 세부적인 항목들은 구조화된 형태 안에서 의미를 가져야 하고 구조화된 형태는 다시 구체적인 모습에 적용되면서 이 둘 사이가 자연스럽게 연결되어야 한다. 곧, 산술과 대수에서 공통적으로 사용되는 사칙연산과 이를 위해 요구되는 연산법칙을 고려해 볼 때, 군 개념은 학교대수에서 대수적 구조를 이해하고 산술을 비롯한 각각의 세부적인 내용을 대수와 같은 구조화된 형태 내에서 전체적으로 파악하기 위한 기본이 됨을 알 수 있다.

(3) 어떤 사물을 보다 일반적인 개념의 한 가지 특수한 사례로 이해하는 것은 특수한 사물을 배웠다는 것뿐만 아니라 앞으로 당면하게 될 그와 비슷한 사물들에 비추어 이해할 수 있다는 것을 의미한다. 앞서 [표 1]에서 제시한 덧셈을 포함한 방정식과 곱셈을 포함한 방정식에서 학생들은 기계적으로 뺄셈과 나눗셈을 이용해서 문제를 해결한다. 이 문제들은 각각의 방정식에서 특수한 사례에 해당하며, 풀이과정에서 나타나는 공통점은 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈에 있어서의 역연산 관계이다. 그렇다면 이러한 역연산과 같은 조작에서 생각해볼 수 있는 보다 일반적인 개념은 무엇인가? 학생들은 일차방정식을 풀기 위해 '이항'을 이용하면서도 이항한 결과가 역연산의 형태로 표현된다는 것은 쉽게 인식하지 못한다. 또한 '이항'을 학습하기 전에 '등식의 성질'을 먼저 학습하게 되는데, 등식의 성질에는 결합법칙을 비롯하여 항등원, 역원과 같은 개념들이 함께 나타나게 된다. 이처럼 방정식의 풀이에 포함된 역연산의 조작은 그 이전에 학습하는 '등식의 성질'과 '이항'을 비롯하여 이후 학교대수를 학습하는데 계속해서 등장하는 일반적인 개념으로 이것은 군 개념에 바탕에 두고 있다. 따라서 군 개념은 방정식의 풀이 과정을 대수적 구조 측면에서 바라볼 때 생각해볼 수 있는 일반적인 개념에 해당하며, 따라서 각각의 방정식과 같은 특수한 사례를 이해하기 위한 기본적인 개념이 될 수 있다. 이는 학교대수에서 '등식의 성질'과 '이항'에 녹아 있는 군 개념을 인식한다고 할 때, 학생들은 중학교 수학에서 특수한 사례에 속하는 방정식 각각을 보다 포괄적으로 이해할 수 있게 되며 동시에 고등학교 수학에서 다루는 이항연산을 보다 넓은 범위에

서 이해할 수 있으며, 나아가 함수나 행렬 등에서도 이러한 군 개념을 적용할 수 있게 될 것이다.

(4) 초등학교와 중등학교에서 가르치는 학습 주제가 어떤 기본적인 성격을 나타내고 있는가를 끊임없이 재조사함으로써 고등지식과 초보지식 사이의 간극을 줄일 수 있다. 1980년대 이후 사회과학에서는 '전이학'(transitionology)이라는 새로운 학문이 등장하면서, 사회 또는 체계가 어떤 방식으로 그리고 어떤 상태로 나아가는 것이 과연 바람직한가에 대한 논의가 이루어지고 있다. 이 새로운 학문에서 강조하는 것은 현 상태에 대한 정확한 지식 곧, 구조를 파악하는 것이다. 이는 구조를 파악하는 것이 현 상태와 다음 상태를 연결하는데 기본 가정이 되기 때문이다. 산술과 대수는 학교수학에서 이행이라는 관점에서 볼 때 중요하게 보아야 한다. 이것은 학교대수의 학습에서 초등수준의 단계는 산술로 중등수준은 대수로 구분될 수 있기 때문이다. 학교대수에서는 산술에서 대수로의 이행을 원활하게 하려는 여러 시도가 있어 왔으며, 이행에서 발생하는 장애에 대한 분석이 함께 연구되어져왔다. 또한 이들 사이의 간격을 줄이기 위해 Prealgebra 과정을 학교대수 이전에 학습하는 것에 대한 논의도 있어왔다. 본 연구에서는 학교대수에서 이들 사이의 간격을 줄이고 이행을 원만하게 이끄는 전제조건으로, 산술 및 대수 구조에 대한 분석이 있어야 하며 그 가운데 군 개념에 대한 논의가 우선되어야 한다고 보았다. 다시 말해, 대수의 학습에서 대수적 구조의 분석이 요구된다고 할 때, 이는 일차적으로 군 개념에 대한 분석을 요구하는 것으로, 이러한 분석을 통해 초등산술과 대수와의 연결 및 중등수학 이후의 효과적인 대수 학습에 대해 생각해볼 수 있을 것이다.

이상에서 대수 학습과 관련해서 대수적 구조의 성격과 대수에서 구조의 학습이 무엇을 의미하는지를 살펴보았다. 교과 구조의 성격으로 다루고 있는 기본적인 규칙과 원리, 변형, 그리고 전체성은 대수 학습 특히 문자와 식의 조작에서 강조되는 기본적인 규칙인 교환법칙, 결합법칙 등과 관련해서 생각해볼 수 있으며, 더불어 '등식의 성질'과 '이항'을 이용하는 일차방정식의 풀이 과정 등에서 나타나게 되며, 결국 이러한 내용들은 대수적 구조에서 그 바탕에 놓여 있는 군 개념과 직·간접적으로 연결되어 있음을 확인할 수 있었다. 또한 학교대수에서 구조의 학습이 의미하는 바를 Bruner가 제시한 네 가지 성격에 비추어 본 결과, 대수 학습을 위한 기본적인 사항은 방정식을 이해하고 풀기 위한 조작이라는 사실과, 학교대수에서의 세세한 사항들은 대수적 구조 가운데 군 개념을 통해 통합될 수 있으며 동시에 각각의 특수한 사례가 군 개념을 형성하는 기본적인 규칙을 통해 해석될 수 있었다. 그리고 학습의 이행이라는 관점에서 볼 때, 초등산술에서 학습한 군의 초보적인 개념 곧, 수에서 다루었던 교환법칙과 결합법칙 등은 중학교, 고등학교를 거치면서 일차방정식과 이항연산, 함수, 행렬 등의 다양한 대수적 주제에서 재해석될 수 있다. 이처럼 대수적 구조에 관한 논의에서 군 개념은 기본적인 사항이면서 동시에 학교대수에서 핵심적인 위치에 놓여 있다. 따라서 학교대수에서 대수적 구조를 확인한다고 할 때 그 바탕에 놓여 있는 군 개념은 무엇보다 중요하게 다루어져야 한다. 다음에서는 학교대수에서 다루고 있는 군 개념을 살펴보기 이전에 먼저 Piaget와 Freudenthal, Dubinsky 등의 연구 가운데 군 개념과 관련된 논의를 검토해보고자 한다.

Ⅲ. 군 개념에 대한 논의

군론[7]은 1870년 Jordan의 '치환론'을 통해 오늘날과 같은 형태로 형식화되었으나, 그 이전에도 약 반세기 동안 수학자들은 거의 본능적으로 군 개념을 이용해왔다(김응태 외 2인; p.123). 군론은 현대수학을 형성하는 가장 기초적인 개념으로, 거의 모든 수학 영역과 논리학, 물리학, 생물학 등에서 사용되고 있다. 특히 현대대수에서 군은 도구적 개념으로 사용되고 있으며 기하나 해석학 등에서도 폭넓게 적용되고 있다. 또한 수학에서의 군 개념과 관련해서 인간 행동이나 사고 양식의 기본적인 조작을 밝히려는 연구에서도 그 논의가 있어 왔다. 다음에서는 이러한 연구들 가운데 Piaget, Freudenthal, Dubinsky 등을 중심으로 하여 군 개념과 관련된 논의를 살펴보고자 한다.

1. Piaget

Piaget는 '군'을 일반적인 구조의 원형으로 보고, 이러한 군 개념이 포괄성을 가지고 성공할 수 있었던 원인을 '반영적 추상화'라는 논리-수학적 추상화에서 찾고 있다(김응태 외 2인, 1989). 또한 군 개념은 반영적 추상화, 즉 대상에 대한 다양한 조작을 통해 이끌어낸 개념이기에, 군 개념이 갖는 구조를 분석하기 위해서는 여기에 포함된 조작들을 '조정'하는 기본적인 방법이나 일반적 규칙이 먼저 요구된다.[8] 이는 앞에서 논의한 것처럼 변형의 체계가 구조의 형태를 갖추기 위해 일정한 불변을 포함한다는 것과 같은 맥락에서 볼 수 있다. Piaget가 강조한 조작의 규칙은 다음의 두 가지로 요약된다(김응태 외 2인, 1989).

ⅰ) (역조작을 거쳐서) 조작의 출발점으로 항상 돌아올 수 있을 것(가역성)

ⅱ) 여러 조작의 최종 결과는 선택되는 대안적인 경로와는 독립적일 것(결합성)

이 규칙들을 군 개념의 수학적 정의와 비교해 보면, 첫 번째 규칙은 역원과 항등원의 존재성을 의미하며, 두 번째 규칙은 결합법칙에 해당한다. 곧, Piaget는 군 구조에서의 조작을 "'군'이란 지적 행동의 기본적인 특성, 곧 행동의 조정 가능성과 되돌림 가능성 및 우회 가능성의 상징적 번역이다"라는 말로 표현하고 있다(우정호, 2000, 재인용). 결국 Piaget가 말한 조작의 규칙은 수학적 사고의 구조, 즉 조작의 구조가 갖는 본질적인 특성을 담고 있는 구조를 의미하며 이것은 수학적인 군 개념과도 일맥상통한다.

또한 Piaget는 그의 발달단계이론에서 구체적 조작기를 이러한 조작의 규칙이 본격적으로 나타나는 시기로 보고, 이러한 구체적인 조작기에서는 여러 가지 다른 관점이 조정되어 전체성을 갖는 구체적 조작 체계를 형성한다고 보았다(김응태 외 2인, 1989). 이는 구체적 조작기의 아동이 분류, 계열화 등의 구체적 조작이 합성가능성과 결합성질을 이해하면서 동시

---

7) 군론(group theory)은 집합(대상)과 연산(조작)이 동시에 고려된다는 점에서 수학사에서 대상(object)에 중심을 두면서 전개되어 온 수학적 주제들과 조작(operation)을 다루어 온 주제들이 통합되어 나타난다고 볼 수 있다. 군의 정의는 집합과 연산이 정의되고, 결합법칙, 항등원, 역원을 만족하는 것으로, 교환법칙을 만족할 경우 가환군으로 정의된다.

8) Piaget에 의하면 사고의 기본적인 요소는 이미지가 아니라 내면화된 행동(조작)이다. 곧 사고한다는 것은 조작하는 것이며, 지식은 조작체계라고 말할 수 있다. 그는 또한 이러한 조작을 강조하는 가운데 인과적 상황에서 이루어지는 사고의 집합을 제시하고, 사고간의 변환과 그 합성을 강조한다(김응태 외 2인, 1989).

에 각 조작의 역조작, 항등조작 등을 포함하는 구조를 다룰 수 있음을 의미한다. 이에 덧붙여 Piaget는 Klein의 사원군을 기술하면서 형식적 조작기에 있는 아동의 사고 구조가 군 구조를 통해 설명될 수 있음을 보이고 있다. 이처럼 Piaget는 발달단계이론에서 군의 구조를 강조하고 있는데, 이것은 이들 구조가 발달단계에 따라 지능의 일반적인 구조와 밀접한 관계가 있기 때문이다. 결론적으로 그는 군의 구조가 아동의 전체 지능 구조 속으로 통합되어야만 발달과 학습이 전개될 수 있다고 보았다.[9]

그러나 이와 같이 변형의 체계인 대수적 구조, 곧 군 구조를 학생들에게 가르치는 것은 형식화된 구조의 최종적인 형태를 단순히 제시하는 것과는 다르다. Piaget는 '구조'가 '형식'과 일치하는 것이 아니라는 점을 강조하고 있는 바, 따라서 변형 체계로서의 구조적 사고는 계속적인 형성 과정에서 구성적 사고와 같이 다루어져야 한다고 말한다. 여기서 반영적 추상화는 논리-수학적 개념의 구조가 군 구조를 갖추게 되는 과정에서뿐만 아니라, 아동 자신이 스스로의 사고를 의식화, 주제화하여 반성한 결과로 군 개념을 얻는 과정에서도 핵심적이게 된다(우정호, 2000). 따라서 이러한 계속적인 형성 과정에서 구성적 사고를 강조한다고 할 때, 중학교와 고등학교에서 등장하는 일차방정식의 풀이를 비롯하여 학교대수의 내용은 초등산술의 연산과정에 포함된 기초적인 군 개념과 관련지어 생각해볼 수 있어야 하며, 나아가 이항연산을 비롯하여 함수와 행렬 등에서 이러한 군 개념을 통합적으로 구성하는 것은 학교대수에서 구조에 대한 논의를 이끌어내기 위한 출발점이 될 수 있을 것이다.

2. Freudenthal

Freudenthal(1991)은 '구조'를 그 자체의 언어적 표현에서부터 추상화된 형식으로 보았으며, '구조화'를 현상들을 조직하는 수단으로 보았다. 또한 물리적, 수학적 현상을 비롯하여 수학 전체가 이러한 구조화를 거쳐 조직되는 것으로 보았다. 그러나 그가 의미하는 구조는 흔히 수학적 구조에서 말하는 구조와는 다소 차이를 보인다. 그에 따르면, 수학적 구조를 발견하고 조직화하여 체계화하기 위해서는 수학의 형식과 내용이 교대되는 가운데 수준의 상승이 일어나야 하는데, 이를 위해서는 형식화된 수학의 결과만을 제시해서는 안 되며 학습자 수준에서의 현실 세계인 현상에서부터 출발하여 그것을 통해 수학적인 구조를 조직할 수 있어야 한다고 보았다. 다시 말해, Freudenthal이 말하는 구조는 현실 가운데 가르치고자 하는 본질을 내포하는 상황을 의미한다. 이러한 맥락에서 그는 군의 본질을 '어떤 구조의 자기동형사상의 체계'로 설명한다.[10] 곧, 군은 하나의 대상 또는 구조가 그 자신으로 변환될 수 있는 모든 방법들의 목록으로 간주되며, 이러한 그의 주장은 방정식의 이론과 강체 운동의 분석에서 기원한 군의 역사와도 일치하는 동시에 Klein이 시도한 변환군에 의한 기하학의

---

9) 군의 구조를 지적 조작의 언어로 표현하면 다음과 같다(김응태 외 2인, 1989). 먼저 두 조작 체계의 조정은 새로운 사고 양식이 되며 이는 앞의 조작 체계와 결합될 수 있다. 둘째 조작은 두 가지 방향으로 전개될 수 있으며, 세 번째 출발점으로 되돌아 왔을 때 조작은 불변인 채로 있다. 마지막으로 같은 점에 여러 가지 방법으로 도달될 수 있으나, 점 자체는 불변이다.

10) Freudenthal(1991)은 대수적 구조에서 대표적인 것으로 수 구조를 들고 있다. 그에 따르면 자연수 체계는 순서 구조에 의해 조직되는 것으로, 이렇게 조직될 때 현상을 반영하는 자연스러운 구조화가 달성될 수 있다고 보았다. 또한 자연수 체계에서 덧셈 구조와 곱셈 구조를 덧셈표와 곱셈표를 통해 강조하고 있는데, 이는 교환법칙과 항등원의 개념을 시각적으로 보여줌으로써 군 구조를 설명하는 출발점이 된다고 보았기 때문이다.

해석에서도 찾아볼 수 있다.

Freudenthal의 군에 대한 관점을 학교대수에 적용해서 생각해보면, 이처럼 군을 자기동형사상으로 볼 때 학교대수에서의 학습에서 가장 큰 장점은 군의 정의 자체가 군이 된다는 것과 군 개념이 학생들의 사고에서 이미 발생하여 그들의 활동 가운데 포함되어 있다는 것이다. 즉, 항등사상이 그 체계에 포함됨은 물론이거니와 f와 g가 속하면 f∘g 역시 포함되기 때문에 '어떤 구조의 자기동형사상은 합성 연산과 함께 군을 형성한다'는 사실은 자연스럽게 군 개념의 출발점에 놓일 수 있게 된다. 이것은 군의 수학적 정의나 어떤 알고리즘으로 군을 설명하는 것보다 직관적이며 동시에 군의 개념을 직접적으로 설명하는 것으로, 단순히 어떤 '형식'을 전달하는 것이 아니라 현상 가운데에서 '구조'를 찾아내고 가르칠 수 있다는 면에서 그 의미를 갖는다. 한편 Freudenthal(1973)은 이러한 예로 아동들의 사고 과정이나 활동에서 발견되는 대칭성과 인류의 역사에서 발견되는 여러 가지 대칭성을 들고 있다. 더불어, 그는 복소수, 방정식, 타원, 확률 등과 같은 수학적 토픽에서와, 그리고 천문학과 물리학 등과 같은 자연과학에서 적용되는 군 개념에 대해서도 이러한 군의 특징을 함께 설명하고 있다.

군 개념에 대한 Freudenthal의 논의를 통해 본 연구에서는 다음과 같은 두 가지 시사점을 이끌어낼 수 있다. 먼저 군 개념은 학교수학 전반에 자연스럽게 포함될 수 있으며, 따라서 대수적 구조의 지도에서 가장 중요하게 고려되어야 하는 것은 이러한 군 개념을 포함하고 있는 현상을 어떻게 조직하는가에 있다. 다음으로 군 개념은 아동들의 사고에서 대칭성과 함께 자연스럽게 내재되어 있는 현상으로, 이는 초등산술을 비롯한 초등수학에서부터 수의 맥락에서 군 개념(본질)에 대한 (간접적인) 지도가 구체적인 현상의 조직여부에 따라 가능하다는 것을 보여준다. 따라서 대수적 구조와 관련해서 학교대수에 포함된 여러 가지 주제를 다룬다고 할 때 군 개념은 대수의 학습과 지도에서 중요하게 다루어져야 한다.

3. Dubinsky

Dubinsky의 연구에서는 군, 부분군, 잉여군(factor group) 등의 개념이 집합과 함수(이항연산)의 개념에서부터 유도되고 있음을 주장한다. 그는 군과 부분군의 개념 발달을 고찰하는 가운데 군 개념의 발달 과정이 다음과 같은 순서를 거치면서 전개되었다고 보았다(Dubinsky 외 3인, 1994). 먼저 군과 부분군은 원소를 가진 단순한 집합으로 인식되고, 다음으로 군과 부분군에 연산이 포함된 집합으로 받아들이면서 일차적인 개념 발달이 이루어지게 된다. 이 과정에서 부분군의 연산은 부분군을 포함하는 군의 연산에서부터 자연스럽게 유도된다. 그 결과 부분군에 대한 개념 발달은 군 개념과 함께 통합된다. 그는 군 개념의 발달은 매우 원시적으로 시작하여 겉으로 보기에는 집합 개념에 근거를 둔 것처럼 보이지만, 군 개념은 이러한 군과 부분군 사이의 연결에서 볼 수 있듯이 함수 개념을 통해 보다 본질적인 의미를 갖는다고 보았다. 곧, 부분군은 함수의 정의역에서 부분집합을 통해 정의되면서 함수를 제한하는 것과 같은 논리에서 비롯된다고 주장하였다. 그는 이러한 군 개념의 발달 과정과 학생들의 이해 과정을 Piaget가 제시한 도식을 적용하여 행동-과정-대상-도식의 APOS이론을 통해 군 개념 형성 과정을 설명하고 있다. 그에 따르면, 군 개념은 각각의 이항연산을 계산하는 것과 같은 행동(action)이 반복되고, 이러한 행동들의 특성이 파악되면서 하나의 과정(process)이 확립되게 된다. 그리고 이 과정이 내면화되면서 다시 다른 행동에

의해서 변화되면서 하나의 대상(object)이 만들어지고, 이러한 과정과 대상이 모여서 하나의 도식(schema)이 형성되면서 군 개념이 형성되게 된다. 여기서 과정이 대상으로 형성되기 위해서는 집약화(encapsulation)를 거쳐야 하고, 또한 많은 과정 중에는 대상이 과정으로 되는 decapsulation의 단계가 동시에 요구된다고 보았다.[11)]

Dubinsky의 이러한 주장을 학교대수에 적용해보면, 군 개념의 출발점이 되는 '행동'은 초등산술에서부터 반복되는 사칙연산의 수준에 그리고 '과정'은 사칙연산의 특성이 문자식을 통해 표현되는 중학교 대수의 수준에 놓여 있는 것으로 볼 수 있다. 그리고 '대상'의 단계는 고등학교 수학에서 군 개념이 이항연산을 통해 드러나면서 본격화될 수 있는 수준으로, 마지막 '도식'의 단계는 대학수학 이상에서 군 개념을 형식적인 정의를 통해 체계화하는 수준으로 구분하여 생각할 수 있다. 따라서 군 개념은 학교수학 전반에서 각각의 수준에 맞추어 그 학습과 지도가 요구되며, 또한 이들 사이의 원활한 연결을 거치면서 학교대수의 구조가 형성된다고 볼 때 군 개념은 어떤 형태로든 대수를 학습하는 과정에 포함되어야 한다.

한편 Dubinsky의 주장에 대해 Burn(1996)은 그 성격이 지나치게 형식적이라는 점을 비판하였다. 그에 따르면, Dubinsky는 닫혀있다, 항등원, 역원 등과 같은 개념들을 지나치게 쉬운 개념으로 보고 있는데, 이에 대해 Burn은 이와 같은 개념들은 다른 개념들에 비해 더 기본적이라고 할 수 없으며 따라서 이러한 가정 하에서 집합과 함수를 군의 기본적인 개념으로 설명한 Dubinsky의 주장은 문제가 있다고 보았다. Burn은 역사적으로 볼 때 치환과 대칭 개념이 군 개념에 있어서 더 기본적인 위치에 놓여 있으며,[12)] 학생들에게 집합과 함수에 대한 형식적인 이해만을 요구하는 것은 군 개념을 바르게 지도하는 것이 아니라고 말한다. 이러한 Burn의 주장은 앞서 살펴본 Freudenthal의 논의와 같은 맥락에서 이해할 수 있을 것이다.

지금까지 살펴본 군 개념에 대한 논의를 정리하면 다음 [표 2]와 같이 나타낼 수 있다.

[표 2] 군 개념에 대한 선행연구 비교

	군의 정의	군의 특성
Piaget	일반적인 구조의 원형이며, 조작의 규칙을 만족하는 구조	반영적 추상화를 기본 전제로 하며, 아동의 사고 구조는 기본적으로 군 구조에 따른다.
Freudenthal	어떤 구조의 자기동형사상의 체계	현실 세계에서부터 군을 도입함으로써 단순한 '형식'이 아닌 '구조'를 가르칠 수 있다.
Dubinsky	집합과 함수(이항연산) 개념에서 유도되는 체계	군 개념은 APOS 이론에 따라 형성될 수 있으며, 그 과정에서 집약화(encapsulation)가 가능한 구조 개념이다.
Burn	치환과 대칭 개념을 기본 개념으로 하는 체계	군은 대수적 아이디어(치환)와 기하적 아이디어(대칭)가 결합된 구조다.

11) 과정(process)과 대상(object) 사이에서 일어나는 집약화(encapsulation)와 그 역의 과정(decapsulation)은 Piaget에 따르면 가역성 측면에서 구조를 이해하는 것에 해당된다. 특히 이 가운데 집약화는 Sfard(1995)가 말한 실재화(reification)와 유사하게 해석될 수 있다.
12) 치환은 대수적 아이디어에서 비롯되며, 대칭은 기하적 아이디어에서 비롯된다고 할 수 있다. 이는 군 개념이 대수와 기하의 통합된 형태로 두 측면 모두를 포함하고 있음을 의미한다.

Ⅳ. 학교수학에서의 군 개념 지도

Piaget의 발달단계이론에서 전조작기에서 구체적 조작기로의 이행에서 특히 중요한 것은 가역성과 보존성의 획득이다. 여기서 가역성은 단순히 양방향성만을 말하는 것이 아니라 사실상 두 구조의 동일성을 인식하는 것을 의미한다. 곧, 어떤 주어진 상황에서 그들 사이의 관계인 구조를 파악하는 것을 의미한다. 또한 가역성은 역조작을 가능하게 하는 것으로, 군 개념과 연결해서 생각해보면 역원의 존재성과 관련된다. 또한 가역성의 확장으로 동일성을 인식한다는 것은 조작의 합성을 포함하는 것으로 항등원 개념을 내재한다고 볼 수 있다. 이 두 가지는 앞서 지적한 바대로 반영적 추상화를 통해 형성되는 논리-수학적 개념에서 가장 중요한 조작이 된다. 또한 Freudenthal에 따르면, 군의 조작에는 대칭 개념이 자연스럽게 포함되어 있으며, 대칭은 인간의 미적 아름다움을 다루는 주제로서 아동들의 조작에서도 자연스럽게 발견된다. 그리고 아동의 활동에서 찾아볼 수 있는 이러한 대칭의 개념은 군의 조작에서 항등원과 역원의 형태로 나타나는데, 중요한 것은 이러한 조작을 서로 연결시켜줌으로써 전체적인 틀 안에서 조작의 규칙을 체계적으로 파악하는 것이다. 이러한 연결 과정은 학교대수의 학습과 지도에서 무엇보다 중요하며, 이것이 가능할 때 대수적 구조의 학습이 학교대수에서 가능하게 되며 동시에 초등수학과 중등수학을 구분하는 특징으로 '구조'라는 개념을 더욱 부각시킬 수 있을 것이다.

군 개념과 관련된 이러한 논의는 구체적 조작기에 해당하는 초등수준의 수학 학습에서부터 아동들이 자연스럽게 시작될 수 있음을 의미한다. 다시 말해, 초등수학에서부터 아동들은 교환법칙, 결합법칙 등을 수 연산을 통해 간접적으로 학습하고, 이러한 사칙연산에서 아동들은 같은 수를 더하고 같은 수를 빼는 과정에서 항등원, 역원 개념까지 암묵적으로 다루게 된다. 비록 항등원과 역원의 개념은 고등학교 1학년이 되어서야 분명하게 다룬다 하더라도 이와 관련된 여러 경험들은 이미 초등수학에서부터 축적된다고 볼 수 있다. 그러나 여기서 문제는 이러한 경험들이 이후의 수학 학습에서 적절하게 연결되지 못한다는 데 있으며, 특히 학교대수에서 이러한 경험들을 적용 가능한 영역에서까지 언급되지 않고 있다는데 있다. 곧, 중학교 수학에서 학생들은 등식의 성질을 통해 등호가 포함된 식의 성질을 학습하면서 이것을 이항을 통해 문자가 포함된 연산 과정으로 발전시키고 있지만, 이러한 과정은 각각의 연산에서 서로 독립적으로 다루어질 뿐 전체적인 관점에서 지도되지는 않고 있다([표 1] 참조). 또한 고등학교 수학에서는 교과서나 참고서에서 정리된 표나 목록을 통해 집합과 논리, 실수, 함수, 행렬(변환) 등에서 비슷한 유형의 법칙(교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 항등원, 역원)들을 나열하고 있지만, 역시 이러한 내용들은 그들 사이를 연결하는 전체적인 구조와 관련해서 설명되지는 않고 있다. 실제로 이항연산을 주고 각각에서 항등원, 역원을 찾으라는 문제는 많지만 그것이 앞서 학습한 사칙연산과 같은 맥락에서 다룰 수 있다는 점은 강조되지 않고 있다. 비록 이항연산의 도입부에서 덧셈과 곱셈에서의 항등원과 역원을 예로 들고 있지만, 이것은 일반적인 이항연산을 설명하기 위한 하나의 수단일 뿐 다시 이항연산의 관점에서 덧셈이나 곱셈을 재조명하지 않고 있으며 나아가 일차방정식 등의 다른 주제와도 관련되지 않고 있다. 결국 이러한 문제점을 극복하고 초등수학에서부터 (간접적으로) 학습한 사칙연산의 여러 가지 법칙과 중등수학 이후 집합, 수, 논리, 함수, 행렬 등에서 학습하는 주제들을 전체적으로 묶어서 생각해볼 수 있는 것은 대수적 구조, 즉 군 개념을 통해서이며, 이것이 가능하게 된다면 학생들은 학교대수를 학습하는 과정에서 다양한 주제들을 통

합적인 관점에서 바라볼 수 있게 될 것이다([표 3]). 그렇다고 해서 이러한 주장은 중등수학에서 군 개념 자체를 직접 지도하자는 것은 결코 아니며, 이는 집합과 연산을 하나의 대상으로 파악하는 군 개념이 분명 중등수학의 범위를 벗어나기 때문이다. 다만 본 연구에서 강조하는 바는 학교수학에서 등장하는 대수와 관련된 여러 가지 주제들을 구조라는 관점에서 해석하고자 할 때, 군 개념이 이들을 묶는 역할을 하며 특히 교사들의 경우 그 바탕에 군 개념이 놓여 있음을 인식하고 지도하는 것이 보다 바람직하다는 점을 분명히 하고 있다.

[표 3] 학교수학에서의 군 개념의 학습

초등학교 수학	학생들은 수 연산에서 교환 법칙, 결합 법칙, 항등원, 역원 등의 (군) 개념을 간접적으로 경험한다.

⇩

중학교 수학	학생들은 초등 산술에서의 경험을 확장해서 문자가 포함된 연산에서 교환법칙, 결합법칙 등을 학습하고, 등식의 성질과 이항을 이용해서 일차방정식을 해결하는 과정에서 이러한 규칙들이 적용되고 있음을 이해하고, 각각의 방정식을 전체적으로 인식한다.

⇩

고등학교 수학	학생들은 이항연산에서 교환법칙, 결합법칙, 항등원, 역원 등의 개념을 학습하고, 이러한 (군) 개념을 일차방정식의 풀이과정과 연결해서 살펴본다. (앞서 학습한 집합에서 이러한 군 개념을 적용해본다.)
	1학년 함수 단원에서 합성을 학습한 다음에 앞서 학습한 (군) 개념을 적용해본다
	2학년 행렬 단원에서 행렬의 곱(변환의 합성)을 학습한 다음에 앞서 학습한 (군) 개념을 적용해본다

V. 결론

'초등수학과 구분되는 중등수학의 특징은 무엇인가'라는 질문에 대하여 선행연구에서는 '구조'를 강조해왔으며, 이와 함께 초등산술과 중등대수에서 시작하여 초등수학과 중등수학의 차이를 논의하는 연구(Kieran, 1992; Sfard, 1991)가 있어왔다. 그리고 이러한 시도는 자연스럽게 '대수에서 구조란 무엇인가'라는 질문과 연결된다. 본 연구는 이러한 연구와 같은 맥락에서부터 출발하여, 학교대수에서의 구조의 지도에 대해 생각해보고자 하였다. 일반적으로 대수는 산술의 연장선상에 있으나 동시에 산술과 구분되는 특징을 가지고 있다. 즉, 산술과 대수 사이의 관계를 '구조'라는 측면에서 보면, 산술은 대수를 함의하고 있으며 대수는 산술을 가정하고 있다고 볼 수 있다.

구조를 학습하는 것은 사물이 어떻게 관련되어 있는가를 학습하는 것이다. 중등수학을 구조와 연결해서 강조하기 위해서는 수학의 다양한 주제들이 앞서 논의한 것처럼 동일한 구조 아래에서 조작될 수 있음을 보여줄 수 있어야 한다. 이러한 과정이 학교대수의 전체적인 틀을 가정하고 이루어질 때, 학생들은 수학을 하나의 구조 내에서 보는 경험을 하게 되며, 현대수학에서 강조되는 구조를 학교수학을 통해 간접적으로 경험할 수 있게 된다. 그리고 학교대수에서 구조의 학습이 이러한 군 개념을 통해 이루어질 수 있다면, 다음 [표 4]에서 제시된 함수와 행렬에서의 연산 역시 같은 맥락에서 이해할 수 있으며, 수학이 특수한 사례의 연속에 그치는 것이 아니라 그 내면에 존재하는 규칙과 원리, 그리고 변형이 포함되어 있는 구조의 학문이라는 인식을 간접적으로 심어 줄 수 있을 것으로 기대된다.

[표 4] 함수와 행렬에 적용된 군의 개념

f, g, h; Function	A, B, X; Matrix
$f \circ g = h$	$AX = B$
$f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ h$	$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$
$(f^{-1} \circ f) \cdot g = f^{-1} \circ h$	$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$
$I \circ g = f^{-1} \circ h$	$IX = A^{-1}B$
$g = f^{-1} \circ h$	$X = A^{-1}B$

본 연구는 중학교 대수 학습에서 등장하는 두 개의 일차방정식을 제시하고, 그 풀이에서 나타나는 유사성을 학생들에게 설명하는 것이 이후 대수의 학습에 어떤 영향을 미칠 것인가라는 의문에서부터 시작하였다. 그리고 일차방정식과 이항연산에서의 항등원, 역원 개념이 어떻게 관련되는지를 살펴보고자 하였다. 실제 지도에서 보면, 중학교에서 배우는 일차방정식의 풀이는 미지수항은 왼쪽으로 상수항은 오른쪽으로 이항해서 방정식을 푸는 방법적 측면만을 강조하고 있으며, 고등학교 수학에서 이항연산은 항등원과 역원의 정의를 학습한 다음 이 정의를 그대로 반복해서 문제를 푸는 방법만을 강조하고 있을 뿐이다. 따라서 학생들은 항등원과 역원이 이항연산에서 어떤 의미를 가지는지 또는 일차방정식의 풀이에서 이항연산에서 다루었던 개념들이 어떻게 적용되는지에 대해서는 생각하지 못하게 된다. 그러나 이항연산에서 항등원과 역원의 지도가 앞서 중학교에서 학습한 등식의 성질과 이항, 일차방정식과 연결될 수 있으며 이러한 연결을 통해 학교수학을 볼 수 있다면, 학생들이 수학에서 강조하는 구조의 한 단면을 바라보고 구조의 장점을 경험하는 기회를 가질 수 있을 것이며, 본 연구는 이러한 점을 강조하고 있다.

이를 위해 먼저 학교대수에서 구조의 성격과 그 학습이 무엇을 의미하는지를 Bruner의 구조에 대한 논의와 비교하여 살펴보았으며, 그 결과 대수에서의 구조는 군 개념과 밀접한 관련이 있음을 확인할 수 있었다. 이에 군 개념과 관련된 선행연구를 Piaget, Freudenthal, Dubinsky, Burn 등의 논의에서 살펴보았으며, 이러한 논의를 통해 중등수학에서 제시된 군 개념의 지도 필요성에 대해 검토해보았다.

본 연구에서 논의한 내용들은 어떤 의미에서는 1960년대 새수학(New Math)에서 주장했던 '구조의 학습'과도 유사한 성격을 띠고 있다. 그러나 본 연구에서는 구조의 학습을 위해서 현행 교육과정에서 제시된 내용 체계를 새롭게 구성하자는 주장을 하는 것은 아니라, 초등수학에서부터 고등학교 수학으로 이어지는 내용들 가운데 군 개념을 중심에 놓고 다룰 수

있는 내용들에 대해 대수적 구조라는 관점에서 그 연결 가능성을 생각해보고자 한 것이다. 그리고 교사들은 이러한 내용들 간의 연결에서 군 개념이 그 바탕에 놓여 있다는 사실을 인식해야 하고, 동시에 학생들은 군 개념을 통해 학교대수에서 다루는 여러 가지 내용을 전체적인 관점에서 볼 수 있게 됨을 강조하였다.

본 연구의 한계로는 학교대수의 학습과 지도에서 '구조'라는 아이디어를 통해 학습주제들 간의 구체적인 연결과 그 지도 방안을 제시하지 못했으며, 또한 이 과정에서 드러날 수 있는 문제점 등에 대해서도 심도 깊은 논의가 이루어지지 못하고 있다. 후속연구를 통해서 학교대수에서 대수적 구조를 논의하기 위해 학교수학 전반에서 군 개념을 직·간접적으로 제시하고 지도하기 위한 보다 구체적인 방안에 대한 검토가 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

김응태·박한식·우정호 (1989). 수학교육학개론. 서울대학교 출판부.

박재문 (1981). 구조주의 인식론에 비추어 본 브루너의 지식의 구조. 서울대학교 박사학위 논문.

우정호 (1999). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). 수학교육 지도원리와 방법. 서울대학교 출판부.

Bruner, J. S. *The Process of education.* 이홍우 역 (1996). 교육의 과정. 서울: 배영사.

Burn, B. (1996). What are the fundamental concepts of group theory?. *Educational Studies in Mathematics,* 31, 371-377.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics,* 27, 267-305.

Freudenthal, H. (1973). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education. In A. G. Howson (ed.), *Developments in mathematics education, Proceedings of ICME-2* (pp.101-114). Cambridge University Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education,* China lectures. Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.390-419). New York: Macmillian.

Martin-Gay, K. E. (2001). *Prealgebra, 3rd Edition.* Prentice Hall.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior,* 14, 15-39.

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it?. In S. Wagner & C. Kieran (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp.11-24). NCTM.

Vygotsky (1962). *Thought and Language.* 신현정(역)(1985). 사고와 언어. 서울: 성원사.

A study on the teaching of algebraic structures in school algebra

Kim, Sung Joon[13)]

Abstract

In this paper, we deal with various contents relating to the group concept in school mathematics and teaching of algebraic structures indirectly by combining these contents. First, we consider structure of knowledge based on Bruner, and apply these discussions to the teaching of algebraic structure in school algebra. As a result of these analysis, we can verify that the essence of algebraic structure is group concept. So we investigate the previous researches about group concept: Piaget, Freudenthal, Dubinsky. In our school, the contents relating to the group concept have been taught from elementary level indirectly. In elementary school, the commutative law and associative law is implicitly taught in the number contexts. And in middle school, various linear equations are taught by the properties of equality which include group concept. But these algebraic contents is not related to the high school. Though we deal with identity and inverse in the binary operations in high school mathematics, we don't relate this algebraic topics with the previous learned contents. In this paper, we discussed algebraic structure focusing to the group concept to obtain a connectivity among school algebra. In conclusion, the group concept can take role in relating these algebraic contents and teaching the algebraic structures in school algebra.

Key Words : School algebra, Algebraic structure, Group concept, Algebraic contents

13) Busan National University of Education (joonysk@bnue.ac.kr)