

비형식적 상황을 이용한 내용구조의 표현과 지도계열의 구성

신현성¹⁾

이 연구는 교육과정에 명시적으로 표기하지 않은 개념형성과정을 밝혀 구조망으로 나타내고, 여기에서 교사가 지도할 내용의 계열을 구성하는데 그 목적을 둔다. 이를 위해 연구진은 사인함수의 그래프에 대한 개념형성과정을 수업모델로 만들어 교실에서 수업을 실시하고 수업 중학생들의 모둠활동을 관찰했다. 또, 수업 후에는 인터뷰를 통해 개념형성과정에서 보인 상황 찾기(인식), 사용된 사고전략, 효과적인 자료 및 학습 도구 등 학생들의 반응을 면밀히 기록했다. 이들 결과는 5인의 전문 집단에 의하여 분석되어 내용구조망(network)과 그 지도계열을 구성할 수 있었다. 이 연구는 학교현장에서 소홀이 되고 있는 개념교육에 구체적인 방법을 제시하고 있다.

주요 용어 : 구조망, 내용 구조, 아이디어 교환, 비형식적 상황²⁾

1. 연구배경

수학과 교육과정의 논의에서 내용의 구조화는 새수학의 관점, 학습자사고 구조관점, 상황인지의 관점으로 발전되어 왔다. 초기에 이 과제는 수학적 개념원리, 법칙의 구조화와 전이(Shavelson, 1974), 과제분석과 위계설정(Gagne, 1962) 및 기본구조의 분류(Bruner, 1966) 등으로 진행되었으며, 이후 피아제의 사고구조의 영향을 받아 비로소 부르바키(Bourbaki N, 1971)관점에서 벗어났다. 피아제(Piaget, Inhelder, 1960)는 삼각형의 각 문제에 대한 두 아동의 실험결과를 통하여 학습자의 사고구조를 설명했다.³⁾

구조의 형성은 체계의 부분적인 변화가 전체체계에 영향을 주는 관계를 형성하는 것이다. 더욱이 좀 더 진보적인 구조화의 형태는 순간적인 자극에 영향을 받지 않는 사고를 말한다.

이러한 그의 구조이론을 수학적으로 구체화시킨 디즈(Dienes, 1971)는 수학적 개념형성을 주기적 양식으로 이해하려 했고, 이러한 학습주기는 지식의 구조와 능동적인 학습자 사이의

1) 강원대학교 (hsshin@cc.kangwon.ac.kr)

2) 개념 형성과정에서 교사 또는 학습자가 행한 실험, 자유놀이, 실생활경험 등을 포함한 상황을 의미한다.

3) 삼각형의 각 문제를 학습하고 있는 아동과 면담내용이며, 5세 반인 불과 체크의 프로토콜이다.

계획된 상호작용으로서 특별히 고안된 수학자료를 매개로 하여 수행한다고 보았다. 학습의 초기에는 학습자의 경험이 구체적 활동을 통하여 체계적으로 구조화하기 시작하는 단계이며, 이 후 구조간의 관계, 구조의 일반화, 추상의 수준 등으로 발전한다. 내용구조에 대한 지도 계열설정은 그의 구조이론과 밀접한 관련을 가진다. 이들 구조화에 대한 또 다른 시각은 프로이덴탈에 의해 진행되었다.

프로이덴탈(Freudenthal, 1983)은 지도내용의 구조화를 학생의 학습패턴으로 설명하려 했다. 이 학습패턴은 피아제의 사고구조에 대한 실험에서 그 양식이 소개되었다(Resnick, 1981). 스킴프(Skemp, 1971)는 이를 이해라 했으며, 그의 아이디어를 긴스버그(Ginsburg, 1990)는 센스를 만드는 과정(sense-making pro.)으로 규정하면서 다음과 같은 항목을 포함해야 한다고 말했다.

- 비형식적인 지식, 형식적인 지식, 또는 이들 두 요인간의 관계
- 전이를 위한 규칙, 일반화, 수학적 지식의 응용
- 잠재능력 및 신념체계

그러나 카펜터(Carpenter, 1997)와 롬버그(Romberg, 1999)등은 이해를 역동적 과정으로 보고 이를 4~5가지로 세분했으며 주로 구성 및 상황인지의 관점으로 해석하려 했다.

지금까지 논의한 구조이론과 이해의 속성은 교수요목의 내용구조를 표현하고 그 지도 계열을 구성하는데 중요한 역할을 하여 후자의 두 가지를 교실에서 이용할 수 있게 구체적인 방법을 제시하는 것이 이연구의 목적이기도 하다. 그동안 이들 두 문제는 두 가지 방향으로 연구되었는데, 하나는 정보처리모형에서 시도한 모델로 학습자의 내용구조를 단위로 표현하고 단위와 단위사이에 존재하는 여러 성질을 위계화한 것이다. 대표적인 연구로 그리노(Greeno, 1976)⁴⁾의 곱셈과 나눗셈의 위계를 도식화한 것을 들 수 있다. 다른 하나는 하트(Hart, 1994)의 초등학교의 수학내용에 대한 계열조직의 연구이다. 그녀는 계열구성을 수직 계열과 수평계열로 나누어서 가네의 위계를 다시 정리했으며, 수직계열보다 수평계열의 결정을 중요시하여 학습자의 성취도분석을 통해 수평계열을 결정하려 했다.

이와 같이 학습자의 이해과정을 분석하여 대역적 계열구성 또는 국소적 계열구성을 하는 연구는 교과서 저자나 또는 교실의 수학교사에게 필요한 일이며 피아제로부터 부르너를 거쳐 스킴프, 하트에 이르는 중요한 연구문제였다.

2. 연구문제

교실에서 교사는 수학자들이 제시한 수학적 구조를 알맞은 언어적 표현과 자료를 이용하여 학생들이 볼 수 있는 내용구조⁵⁾로 변경한다. 이러한 내용구조는 대역적이든 또는 국소적이든 학습자의 이해양식을 반영해야 하며, 여기에는 개념형성과정이 강조된다. 연구문제는

-
- 4) 그리노가 제시한 도식화를 구조망(network)이라고 하며 노드(node)를 정하고 이들 사이에 대상, 정의, 결과를 표시하여 노드간의 연결과 구조의 단순화를 꾀했다.
 - 5) 이 연구에서 내용구조는 수학적 구조를 교사(학습자)가 자신의 인지구조에 알맞게 도입하여 교과서 또는 학생용활동지에 수정한 상태의 구조를 말한다.

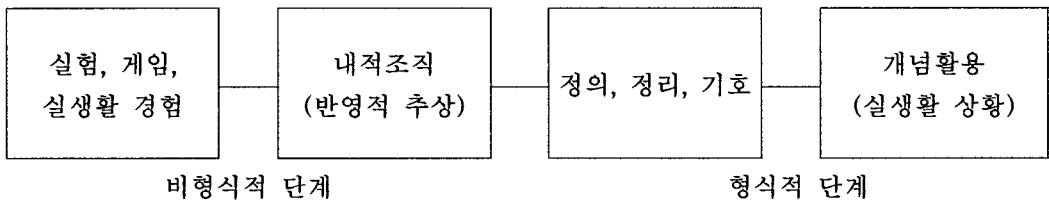
다음과 같다.

- 1) 내용구조를 표현할 수 있는 구조망⁶⁾을 제시할 수 있는가?
- 2) 잘 정리된 구조망에서 어떻게 계열설정을 이끌어 내는가?

3. 연구방법 및 절차

1. 연구설계

파일럿 실험과 고등학교 수학교사들의 면담을 통해 개념형성 과정을 3단계로 정리하였다.



[그림 1] 비형식적 단계와 형식적 단계

물론 이 모델은 8차 아이시엠이(ICME, 1996)의 인지·발달 소영역에서 논의된 토의주제와 엔시티엠(NCTM, 1998)의 인지과정 논의에 기초를 둔 것으로 처음 두 단계의 구체적 표현방법을 우리나라 교실사정에 알맞게 정리한 것이다.

다음에는 3단계를 가장 잘 적용할 수 있는 개념으로 삼각함수 그래프를 선택하였고, 실험학교의 교사와 협의하여 비형식적 단계가 반영된 수업모델을 설정하였다. 실험 중에는 분석할 자료의 수집을 위해 3가지 방법을 이용했다. 즉 체크리스트와 면담과 활동지로써 각기 자료 분석의 용도가 달랐다. 특히, 개념활용에 관한 활동지 일부는 충분한 시간을 주기 위해 과제형태로 이용되었으며 실험집단의 중·하위 학습집단에게 면담의 기회를 많이 주었다. 2차시의 실험이 진행되는 동안에 실험교사의 활동을 도와주는 2명의 연구요원이 배치되었고, 실험과정을 분석하는 대학원생인 5명의 전문교사가 조직이 되었다. 이들이 사용한 면담자료는 실험 전에 연구자가 작성하고 파일럿실험을 거친 면접문항으로 위의 4단계의 학습활동이 잘 반영된 것이었다. 이후 자료 분석은 5명의 전문교사와 연구자 간의 활발한 토론을 통해 이루어졌다.

2. 표본, 면담 및 관찰지 구성

연구내용은 고등학교 10-나의 삼각함수 그래프이기 때문에 ○○시에 있는 평준화 지역의 대표적 인문계고교 30명씩을 표본으로 했고 성취도를 기준하여 상·중·하 학생이 고르게 분포되어있는 학급을 택하였다. 면담 및 활동지(관찰지) 구성은 연구의 가장 어려운 과제였으며 활동지는 두 종류의 세트를 준비하였다. 하나는 실험기간 중에 교사와 학생이 공동으로 사용하는 A세트와 실험이 끝난 후 면담을 위한 B세트로 구분했다. 모든 실험과 면담자료는 앞 4단계 중에서 주로 비형식적 과정을 충실히 반영했다.

6) 교수요목을 위계화하여 도식적으로 나타낸 모델을 의미한다.

비형식적 상황을 이용한 내용구조의 표현과 지도계획의 구성

다. 본 실험에서는 1,2단계에서 학생들이 보인 비형식적 구조를 몇 개의 과정으로 분류하였다.

- 동심원 개념을 통한 삼각비의 일관성 : 중학교 3학년에서 배운 삼각비의 값이 동심원에서 일관성을 가지는 사실을 확인한다.
- 상황을 이용한 단위원 설정 : 놀이공원의 회전틀(또는 물레방아)에서 파워포인트로 좌표축, 단위원을 생성한다.
- 꼭지점이 좌표평면의 원점으로 직각삼각형 설정 : 파워포인트로 두 꼭지점 중 하나는 원점, 다른 하나는 단위원상의 동점 P로 표현한다.
- 좌표평면에서 라디안으로 표현된 θ 의 변화 : 라디안으로 나타낸 각 θ 가 1,2,3,4 상한에서 어떻게 변화하는지 조사한 다음에 일반각으로 표현이 되는 과정을 모둠별로 토의한다.
- 높이를 통한 사인값 설정 : 단위원 상의 동점 P에서 x 축까지의 거리를 모둠별로 정하여, 종이로 오린 다음에 칠판의 자표판에 이것을 붙이는 놀이다. 1상한과 2상한에서는 양의 값으로 높이를 이해하지만, 3상한과 4상한에서는 음의 값으로 높이를 이해한다.
- 파워포인트 곡선 설정 : 파워포인트를 이용하여 모둠별로 표시한 종이 끝을 점으로 표시한 다음에 이들 점을 곡선으로 연결한다.

이들 과정을 교수요목으로 확정하는 것은 간단한 연구문제가 아니기 때문에 수업 중 학생들이 보인 비형식적 구조를 관찰한 체크리스트와 면담결과를 분석하였다. 그 결과 발견된 몇 가지 사실을 제시한다.

· 삼각비의 일관성 :

삼각비의 계산은 잘 이루어졌으나 동심원에서 사인값, 코사인값 등이 일정하다는 사실은 생소해 했으며, 거의 모든 실험자가 몇 번 계산을 통해 비로소 이를 인식하였다. 다음 우수학생 A의 대답이다.

학생 A : 왜 동심원에서 닮은 직각삼각형을 그려 사인값, 코사인값을 확인하나요?

연구자 : 이 그림을 보아라. 여러 개 닮은 직각삼각형에서 사인값이 각각 다르다면 어떤 문제가 있을까요?

학생 A : 글썸요...?

이와 같이 학생들이 삼각비 값의 일관성이 유지되지 않으면, 앞으로 배우게 되는 삼각함수의 그래프에서 또는 이미 배운 삼각함수의 정의에서 어떠한 문제가 발생하는지 잘 모른다. 또, 교과서에서는 단위원만이 소개된 이유를 알지 못한다.

· 단위원과 직각삼각형의 설정 :

놀이공원의 회전틀(또는 물레방아)에서 파워포인트로 좌표축과 단위원을 그려 넣는 과정을 관찰(또는 면담)했으며, 대부분 학생들이 이들 과정을 즐겼다. 다음은 우수학생 A와 비우수학생 B의 반응이다.

학생 B : 교과서에 있는 원이 저렇게 놀이공원에서 가져올 수 있다니!

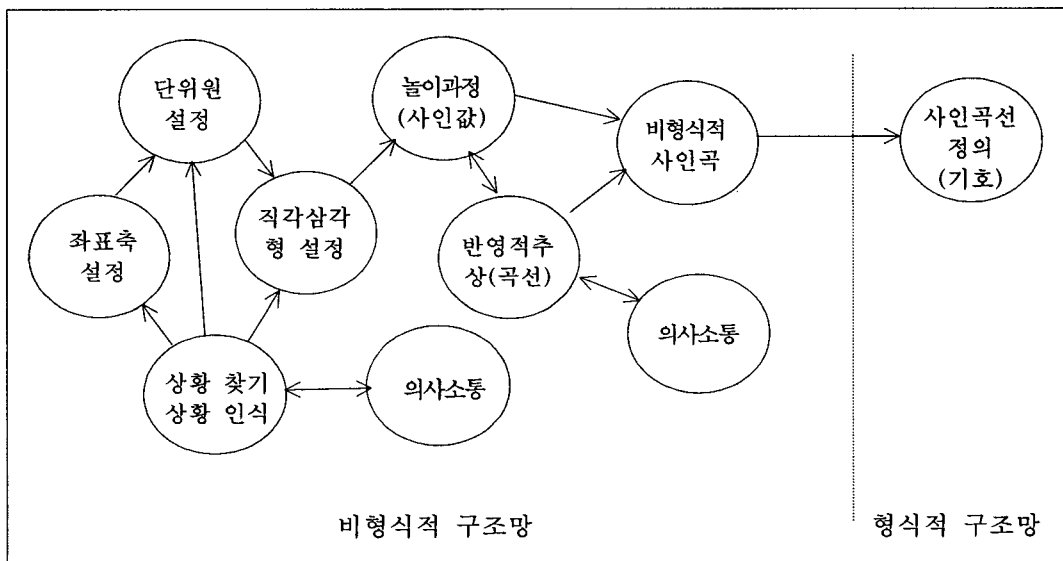
학생 A : 교과서에서 왜 동점 P라고 하는지 알겠어요. 사인값은 회전틀에서 저기 두 점 사이의 거리겠지요.

모둠활동을 관찰해 보면 대부분 학생들이 교과서에 있는 단위원, 각 θ , 사인값의 의미를 쉽게 이 상황에서 인식하고, 우리 주위에서 이들 개념이 살아있다는 것이 신기해한다.

· 라디안 표현과 사인값 :

학생들은 각의 라디안 표현을 단순히 계산활동으로 생각하였는데, 라디안의 표현이 삼각함수를 정의하고 삼각함수의 그래프를 이해하는데 얼마나 중요한 활동인지 인식하지 못했다. 실험자 대부분은 계산활동의 한 방법으로 라디안을 다루는 것으로 인식하였으며, 라디안을 도입한 이유를 충분히 설명하지 못하였다. 현행교과서도 각을 라디안으로 고치는 계산활동을 지나치게 강조한 점이 있으며, 라디안 도입 이유는 설명이 충분치 못하다.

이들 비형식적 내용을 구조망으로 도식화한 것은 다음과 같다. 이 연구에서는 레쉬(Lesh, 1981) 등이 표현한 방법에 개념표현방법, 놀이내용, 학습도구 및 자료 등이 포함된 것이 특징이다.



[그림 3] 비형식적 구조망과 형식적 구조망

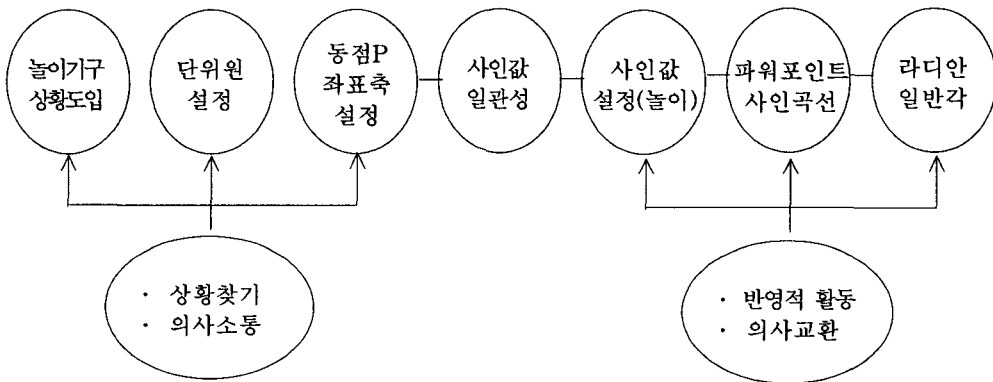
그런데 위의 구조망은 기본 골격만 포함한 것이며, 원래는 각 노드에 개념표현방법, 자료 및 학습도구, 상황찾기 등이 기록된다.

이러한 관찰 이외에도 학생들은 모둠별로 상황설정을 할 수 있거나 상황인식을 잘했으며, 놀이 활동에서 가장 단순한 형태의 사고전략인 세기(Counting)를 자주 활용하였다. 모둠별로 계산기를 활용했기 때문에 각 모둠은 그들이 정한 θ 에 대한 사인값은 계산기로 구했으며 개념형성과정에서 계산기는 자연스러운 도구로 학생들은 인식했다. 그러나 놀이활동을 사인곡선으로 추상화하는 반영적 활동에서는 우수학생이 좋은 반응을 보인 반면 비 우수학생은 그렇지 못하였다. 이유는 교사(또는 활동지)의 발문을 이들 집단이 쉽게 받아

주지 못한 데 있었다. 이는 상황 또는 실험과정에서 그들의 활동을 추상화하는 능력이 취약했기 때문이다. 이들의 반영적 추상화가 약하다는 사실은 수학교사와 면담과정에서도 밝혀졌다. 삼각함수의 그래프에 대한 형식적 내용구조는 현행교과서의 구조와 거의 비슷하였기 때문에 여기서는 생략한다.

2. 계열 구성

구조망이 결정이 되면 지도계열을 정해야 하는데 이를 위해 각 노드를 순서적으로 늘어놓아야 한다. 학교에서는 교과서분석을 통한 위계설정을 교사가 주로 사용한다. 하지만 학생들의 이해양식을 반영하지 않은 위계분석은 그 의미가 적다. 이 연구는 하트가 도입한 성취도 분석방법을 더 발전시킨 것으로 학습자를 인터뷰하고, 그들이 자주 사용하는 사고 전략, 자료 및 학습도구, 상황찾기(인식) 등을 조사하여 계열구성에 사용했다. 이들 결과를 종합하면 다음과 같은 도식으로 나타낼 수 있다.



[그림 4] 비형식적 구조망과 형식적 구조망

5. 결론 및 토론

이 연구의 주 목적은 삼각함수(사인함수)의 개념형성과정을 구조망으로 나타내고, 이를 명시적으로 계열구성을 하는데 있었다. 이에 대한 실험이 끝난 후 교실에서 교사가 알아야 할 몇 가지 사항이 부수적인 결론을 얻어졌다.

첫째는 개념형성과정에서 학생들의 인지구조, 흥미, 관심 등에 알맞은 상황찾기 또는 상황인식이 필요하다는 것이다. 이 연구에서는 최종 놀이공원에 있는 회전틀을 선정하기까지 여러 소재(양궁의 과녁, 운동장의 원그림 등)를 고려했으나 학생들의 개념형성에 방해가 되는 요소가 많았다. 이는 레이브(Lave, 1993)등이 말한 상황제시의 이론을 보충해 줄 수 있는 발견이다.

둘째는 모둠활동을 통한 아이디어 교환은 개념형성과정에서 반영적 활동을 자극한다는 것이다. 실험 중 관찰 또는 실험 후 인터뷰에서 반영적 활동이 잘 일어나지 않는 모둠이 발견되었는데, 한결같이 모둠 내 학생끼리 의사소통을 통한 아이디어 교환이 잘 이루어지지 않았다는 점이다. 반면 아이디어 교환이 활발한 팀에서는 쉽게 반영적 활동으로 이어

졌다.

학생 A : 종이막대가 1, 2 상황 과 3,4 상황에 세워져 있을 때 어떻게 곡선이 만들어 질까?

학생 B : 막대를 생각하지 말고 막대의 끝점을 생각해봐. 선생님이 그린 것은 끝점을 연결한 것이지.

학생 A : 그러면 막대의 길이와 넓이는 필요가 없다는 말인가?

학생 C : 그래 순서쌍으로 나타낸 점을 찍는 거야.

학생 A : 화면에서 선생님이 컴퓨터로 점을 연결하실 때, 이어진 곡선이 $\sin\theta$ 의 그림이란 말인가?

학생 D : 그래. 파워포인트에서 종이 막대가 선분으로 변한다음에 이것들이 없어지고 곡선만 남잖아.

학생 A : 맞다. 순서쌍으로 나타내어진 점들을 연결하니까. 화면이 맞다.

이러한 자료는 상황인지에서 주장하는 의사소통의 역할을 일부 뒷받침해준다. 실제로 교실에서 삼각함수를 가르친 경험이 있는 교사들은 학생들의 잘못된 생각을 고치는데 교사의 설명만으로는 이루어지지 않는다는 것을 지적했다.

셋째는 학교의 개념교육을 다시 고려해야한다는 점이다. 교실의 학생 수가 많다는 이유 때문에 교사의 일방적 설명, 활동지가 없는 교과서만의 자료제시 또는 파워포인트를 통한 활동적인 자료에 관계없이 칠판과 O.H.P를 이용한 교실환경은 학습자의 개념형성을 방해한다는 점이다.

그런데, 위의 세 가지 중에서 마지막은 실험이 진행 중이거나 실험 후의 인터뷰에서 종합적으로 정리한 것이다.

연구의 결과를 학교에서 어떻게 활용할까? 먼저 교사는 개념교육에서 비형식적 구조망(network)를 짜야 한다. 이 구조망에는 수업자료와 도구, 학습자사고전략, 검증된 상황찾기 등이 표상되어야 한다. 다음으로 구조망에서 수직적 위계와 수평적 위계를 발견하고 지도계열의 구석을 이끌어야 한다.

참고문헌

- 신현성·강태성 (2004). 삼각함수의 그래프 그리기, 춘천: 강원대 자료개발 센터(비디오).
함혜영 (2004). 실생활 문제 : M.T에서 일어난 일, 춘천: 강원대 자료개발센터(비디오).
Bourbaki N. (1971). The architecture of mathematics. In Lionnais, F.(Eds.) Grant Currents of mathematical thought, New York, Dover P. Inc.
Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, Mass: Harvard University press.
Carpenter. T. P. (1997). Making Sense : Teaching and learning math. with understanding ports mouth. N H : Hein.
Covell, K. (1971). Intellectual growth and understanding mathematics. Columbus, Ohio : ERIC Information Analysis Center for Science and Mathematics Education.

- Diens, Z. P. , & Golding, E. W. (1971). Approach to modern mathematics. New York : Herder & Herder.
- Frudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of mathematical Structure. Reidel.
- Gagne, R. M. (1962). Learning hierarchies. Psychological Review, 69(4).
- Gagne. R. & Briggs, L. J. (1970). Principles of instructional design. New York : Holt, Rinehart & Winston.
- Ginsburg, H. P. (1990). Assessing understandings of mathematics. The test of early math. ability, Austion, TX : ProEd.
- Greeno, J. G. (1976). Cognitive objectives of Instruction : Theory of Knowledge for solving Problems and answering question, David Klahr(Ed). Cognition and Instruction. Hillsdale, N, J : Lawrence Erlbaum Associates.
- Hart K. M. (1996). Children's Understanding of Mathematics : 11-16, London : John Murray.
- ICME 토론품 (1996). Cognition and development. Sevilla, Spain July 14~21.
- Lave. J. & Wenger. E. (1993). Situated learning New York : Cambridge Press, 1991. Situated learning in Communities of practices in I. Resnick(eds) Perspectives on Socially Shared Cognition. Washington : APS.
- Lesh, R. (1981). Conceptual Models and applied mathematical problem solving, Acquisition of Mathematics Concepts and process. Academic press Inc.
- Merrill, M. D. (1965). Correction and review on successive parts in learning a hierarchical task. Journal of Educational psychology, 56.
- Miller, H. R. (1969). Sequencing and prior information in linear programmed instruction. AV communication review, 17.
- NCTM. (1998). Annual meeting, San Francisco.
- Niedermayer, F. C. (1969). Learning and varying sequences of ninth grade mathematics materials. Journal of Experimental Education, 37.
- Piaget, J. & Inhelder, (1960). The child's Conception of geometry. New York : basic Book.
- Resnick, L. B. (1981). The Psychology of Mathematics for instruction, New Jersey Lsa.
- Romberg, T. A. (1999). Teaching and Learning mathematics with Understanding, Hillsdale. N, J : LEA.
- Shavelson, R. J. (1974). Methods for examining representations of a subject-Matter Structure in a student's Memory. Journal of Research in Science Teaching, 11.
- Skemp, R. R. (1971). The Psychology of Learning Mathematics, Penguin Book.

신현성

A study on constructing a instructional sequence and content structure based on informal context of mathematical syllabus.

Shin, Hyun Sung⁷⁾

This Study suggests some ideas how we develop a network of content structure based on informal context and method how we decide a sequence of mathematical syllabus from those Structures.

10th grade students in the process conceptual development was observed and interviewed in 2 hour teaching and learning experiment. Three related characteristics of student's thought in structuring math. Content and sequencing it were investigated as follows : (a) the reasoning that they do reflective abstraction well(or do not well) in acquisition of conceptual knowledge. (b) the method that teacher can use results in (a) to organize the content structure. (c) the ways that teacher find the process knowledge in informal content structure. That is, this study investigated the way we, curriculum designer, can create well defined content structure and instructional sequence strongly based on the learners' understanding.

Key Words : Network, Structure of contents, Exchange of ideas, Informal situation

7) Kangwon University (hsshin@cc.kangwon.ac.kr)