

< 논문 >

# 비정렬격자계를 사용하는 3차원 유동해석코드 개발 (I) - 수치해석방법 -

명 현 국\* · 김 종 태\*

(2005년 5월 18일 접수, 2005년 8월 22일 심사완료)

## Development of 3-D Flow Analysis Code Using Unstructured Grid System (I) - Numerical Method -

Hyon Kook Myong and Jongtae Kim

**Key Words:** Flow Analysis Code(유동해석코드), Unstructured Grid System(비정렬격자계), Cell-Centered Method(셀 중심법), Finite Volume Method(유한체적방법)

### Abstract

A conservative pressure-based finite-volume numerical method has been developed for computing flow and heat transfer by using an unstructured grid system. The method admits arbitrary convex polyhedra. Care is taken in the discretization and solution procedures to avoid formulations that are cell-shape-specific. A collocated variable arrangement formulation is developed, i.e. all dependent variables such as pressure and velocity are stored at cell centers. Gradients required for the evaluation of diffusion fluxes and for second-order-accurate convective operators are found by a novel second-order accurate spatial discretization. Momentum interpolation is used to prevent pressure checkerboarding and the SIMPLE algorithm is used for pressure-velocity coupling. The resulting set of coupled nonlinear algebraic equations is solved by employing a segregated approach, leading to a decoupled set of linear algebraic equations for each dependent variable, with a sparse diagonally dominant coefficient matrix. These equations are solved by an iterative preconditioned conjugate gradient solver which retains the sparsity of the coefficient matrix, thus achieving a very efficient use of computer resources.

### 1. 서론

지난 십수년에 걸쳐 비정렬격자(unstructured grid)를 사용하는 유한체적법(FVM)이 CFD(전산 유체역학) 연구 분야에서 주목을 받아왔다.<sup>(1-8)</sup> 이것은 그동안 CFD 분야에서 널리 사용되고 있던 치명적인 두 가지 단점, 즉 정렬격자(structured grid)계가 가지고 있던 복잡하고 실제적인 형상에 대한 격자생성의 어려움과 관심 있는 영역에 격자를 능동적으로 적합 시키기 어려운 점을 비정렬격자계가 해결하였기 때문이다.

따라서 현재는 비정렬격자계만이 공학적으로 중요한 복잡한 3차원 형상을 정확하게 기술할 수 있다고 일반적으로 인식되고 있다.

이와 함께, 수치해석방법 면에서 살펴볼 때 N-S 방정식 풀이에 가장 큰 어려움은 압력  $p$ 의 처리에 있으며, 이의 처리방법으로 속도, 압력 및 온도 등의 종속변수 자체를 풀며, 3차원 확장에도 문제가 없는 주변수 접근법(primitive variable approach)과 지배방정식을 변형함으로써 유도된 압력방정식을 운동량방정식과 분리하는 방식을 사용하는 압력수정방법(pressure correction method, 참고로 pressure-based, uncoupled, sequential or segregated method로 부르기도 함)이 지난 20 여년간 특히 비압축성 유동장 해석에 널리 사용되고 있다. 또한, 이와 같이 분리된 해 전략 및 압력수정방정식을 통한 압력-속도 결합은 유한체적

\* 책임저자, 회원, 국민대학교 기계자동차공학부

E-mail : myong@kookmin.ac.kr

TEL : (02)910-4714 FAX : (02)910-4839

\* 한국원자력연구소

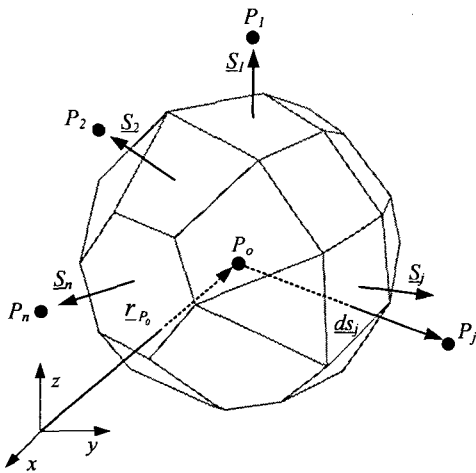


Fig. 1 Control volume of an arbitrary polyhedral shape

방법과 함께 SIMPLE과 같은 알고리즘을 만들어 내었다. 그러나 널리 알려진 이 방법을 비정렬격자계로 확장시키는 데는 두 가지 큰 어려움이 있다. 첫째는 동일한 검사체적을 사용하기 때문에 저장해야할 격자자료를 많이 줄일 수 있어 매우 효율적인 (압력과 속도성분을 같은 곳에 저장하는) 집중(collocated) 격자방법이 요구되나, 압력장의 진동을 막기 위한 특별한 방법이 필요하며, 둘째는 종속변수 값의 선형구조가 사라지기 때문에 그 구배값 결정이 매우 복잡해지므로 이 구배값이 사용되는 확산항의 이산화 및 대류항 계산에 필요한 고차도식을 개발하는데 어려움이 가중된다.

한편, 최근 비정렬격자계를 사용하는 유한체적법 중에서 수치 해를 정렬 격자계에서와 같이 격자생성으로 만들어진 기본 셀(또는 제어체적)의 중심에 저장하는 셀 중심법 (cell-centered method)이 나타나기 시작하였다.<sup>(1~4)</sup> 이 셀 중심법은 기하학적으로 매우 단순하고, 해석영역의 경계가 면(surface)으로 구성되므로 특이점이 존재하지 않으며, 임의의 셀에 대해 특별한 보간법을 사용하지 않고도 보존법칙을 만족할 수 있는 장점을 가지고 있다.

최근 저자들은 기존의 연구<sup>(1~4)</sup>와 유사하게 비정렬격자계를 사용하고 압력수정방법에 기반을 두면서 불규칙적이고 여러 가지 형상을 가지는 격자에서도 2차 정확도를 가지면서도

용이하게 코드에 접목시켜 사용할 수 있는 새로운 확산플럭스 근사방법을 채택한 3차원 유동해석 코드(PowerCFD 코드)를 자체 개발하고, 여러 가지 유동형태에 대한 검증용 해(benchmark solution)와 이 코드의 수치 해를 비교분석하고 코드의 적합성 및 정확도를 검토하였다. 본 논문에서는 이 코드에 사용된 수치해석방법을 기술하고, 이어지는 논문에서는 검증용해와 비교분석한 결과를 제시한다.

## 2. 수치해석 방법

비정렬격자계를 사용하고 압력수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석코드 PowerCFD를 개발하는데 있어 고려한 사항은 다음과 같다. 먼저 2차원에서는 삼각형 및 사각형 셀, 3차원에서는 사면체, 프리즘, 육면체 셀 등 격자 생성법에 따라 여러 가지 모양의 셀이 사용될 수 있도록 한다. 또한, 압력과 속도성분을 모두 셀의 중심에 저장함으로써 격자자료 저장에 매우 효율적인 셀 중심 집중저장방법을 채택하고, 일반성을 위해 셀에 특수한 형상 함수를 사용하는 것은 피한다. 특히, 대류 및 확산항에 대한 이산화 조작은 가능한 한 잘 알려진 경계적합 정렬격자계의 형태로 공식화한다. 이와 함께 저장 요구를 최소화하기 위해 SIMPLE 알고리즘을 사용하는 압력-속도 결합과 함께 압력수정접근법 전략을 채택하며, 선형화된 방정식의 해를 얻기 위해 적절한 대수솔버를 사용한다.

### 2.1 수송방정식의 이산화

일반적으로 적분형 수송방정식은 정상상태에서 종속변수(또는 해)를  $\phi$  라고 할 때 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\int_S [\rho\phi v - \Gamma_\phi \nabla\phi] \cdot \underline{dS} = \int_V Q_\phi v dV \quad (1)$$

식 (1)에서 좌변 항은 대류 및 확산항이고, 우변 항은 생성항을 각각 의미한다. 또한 종속변수  $\phi$  는 속도, 온도 등을 의미하며, 계수  $\Gamma_\phi$ 는 확산계수로 종속변수에 따라 달라진다. 식 (1)을 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 체적  $V_P$  및 분리된 면  $S_j$  ( $j=1, N_f$ )로 표현되는 다면체 형상을 가지는 계산 셀  $P_0$ 에 대해 적용하면, 식 (1)은 다음과 같이 이산화된다.

$$\sum_j [J_j \phi_j^* - D_j] = \sum_j [C_j - D_j] = (Q_{\phi\nu})_{P_0} V_{P_0} \quad (2)$$

여기서  $J_j$  및  $\phi_j^*$ 는 셀 면  $j$ 에서의 질량유량 및 종속변수  $\phi$ 의 평균값이고,  $C_j$  및  $D_j$ 는 각각 셀 면  $j$ 에서의 대류항 및 확산항이다.

### 2.2 대류항 이산화

식 (2)에서 질량유량  $J_j$ 는 뒤에 기술하는 운동량 및 연속방정식의 해로부터 알려진다고 가정한다. 따라서 대류항  $C_j$ 의 평가는 셀 면  $j$ 에서의 종속변수의 평균값을 의미하는  $\phi_j^*$ 을 결정하는 것으로 귀착되며, 이 값을 구하는 방법에 따라 크게 저차(lower-order) 및 고차(higher-order)의 정확도를 가지는 도식으로 구분된다. 저차정확도 도식  $\phi_j^{LO}$ 에는 1차 상류차분 도식이 있으며 이 도식은 검사면 좌우의 셀에서 내삽이 이루어지기 때문에 바로 비정렬격자에 적용할 수 있으며, 수치적으로 매우 안정적이나 수치오차를 많이 발생시킨다. 반면, 2차의 상류차분도식(2nd-order upwind scheme), 중심차분도식, QUICK, TVD 등 고차도식  $\phi_j^{HO}$ 은 비정렬격자계에 적합하게 수정하여 적용하도록 되어 있으나, 수정방법에 따라 다소 다른 형태가 사용되며,<sup>(1-6)</sup> 일반적으로 매우 정확한 해를 얻게 해 주지만 수치적으로 불안정하다. 이를 방지하기 위해 본 코드에서는 고차도식에 대해 비정렬격자계에 적합하게 수정하여 적용시키고, 일반 CFD 코드에서와 같이 아래 형태의 혼합(blended) 차분 방법을 사용한다.

$$\phi_j^* = \phi_j^{LO} + \gamma_{\phi} [\phi_j^{HO} - \phi_j^{LO}] \quad (3)$$

식 (3)에서  $\gamma_{\phi}$ 는 혼합값(blending factor)으로, 이 값이 0이면 1차 도식, 1이면 2차(고차) 도식이 되고,  $\gamma_{\phi}$ 가 0과 1사이의 값을 가지면 혼합차분이 되어 고차 도식의 정확도와 저차 도식의 안정성을 함께 가지게 된다. 또한, 식 (3)의 우변에서 첫 번째 항만을 내재적으로 처리하고, 두 번째 항은 지연수정(deferred-correction) 방법에 따라 외재적으로 처리된다.

### 2.3 구배계산

셀 중심 및 셀 면에서의  $\phi$ 의 구배값  $\nabla\phi$ 을

평가하기 위해서는 점  $P_0$  주위에서의  $\phi$ 의 변화를 가정하여야 하며, 수치 알고리즘의 안정성 및 얻어진 해의 정확도는 일반적으로 이들 값을 평가하기 위해 사용된 보간 방법의 형태에 크게 의존한다.

본 코드에서는 이를 위해 유한요소법의 개념과 유사한 방법을 채택한다. 즉, 종속변수  $\phi$ 의 분포를 점  $P_0$ 을 둘러싼 공간에서 찾는 방법으로 종속변수의 선형 분포를 다음과 같이 가정한다.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_{P_0} + (\nabla\phi)_{P_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_0}) \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{r}_{P_0}$ 는 점  $P_0$ 의 위치벡터이고,  $(\nabla\phi)_{P_0}$ 는 점  $P_0$ 에서  $\phi$  구배의 근사값으로, 가우스정리(Gauss theorem 또는 발산정리) 또는 최소자승법(least square method)을 사용하여 구하고 있다.<sup>(1-6)</sup> 본 연구에서는 가우스정리를 사용하는 것으로 하고, 다음과 같이 셀 중심에서의 구배값  $(\nabla\phi)_{P_0}$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_{P_0} &= \left[ \int_{V_R} (\nabla\phi)_{P_0} dV \right] / (\Delta V)_{P_0} \\ &= \sum_j (\bar{\phi} \cdot \mathbf{S})_j / (\Delta V)_{P_0} \end{aligned} \quad (5)$$

위식에서 셀 면에서의  $\bar{\phi}$  값은 이웃하는 셀들에서의 값을 가중평균<sup>(1-3)</sup> 또는 단순히 산술평균<sup>(4,5)</sup>하여 얻어지나, 본 연구에서는 가중 평균하여 구하는 것으로 한다.

### 2.4 확산항

셀 면  $j$ 에서 식 (2)의 확산항은 다음과 같이 수치적으로 근사된다.

$$D_j = \Gamma_{\phi_j} (\nabla\phi)_j^* \cdot \mathbf{S}_j \quad (6)$$

비정렬격자계에서 셀 면  $j$ 에서 해의 구배  $(\nabla\phi)_j^*$ 를 구하는 방법은 크게 두 가지로 나뉜다. 첫째 방법은 셀 중심의 값으로부터 내삽하여 경계면을 둘러싼 격자점에서의  $\phi$ 를 얻으면 셀 면에서 두 셀  $P_0$  및  $P_j$  중심을 잇는 직선  $\underline{ds}_j (= \mathbf{r}_{P_j} - \mathbf{r}_{P_0})$  방향과 셀 면의 접선 방향으로 해의 변화를 알 수 있으므로 국소좌표 변환을 통하여 해의 구배  $(\nabla\phi)_j^*$ 를 얻을 수 있다.<sup>(6,8)</sup> 이 방법은 정렬격자계에서 널리 사용되고 있는 방법과 마찬가지로, 비정렬격자계에서는 3차원에서 한 면이 삼각형

이상의 다각형이 되므로 여기서 2개만의 방향벡터를 설정하는 것이 어려우며 또한 각 격자점에 해를 내삽시키는 데에도 많은 문제점을 안고 있다. 다른 방법은 주확산항(primary diffusion term) 값으로  $ds_j$  방향의  $d\phi$ 는 사용하고,  $(\nabla\phi)_j$ 의 나머지 성분, 즉 셀 면의 접선방향의 이차(또는 교차) 확산항(secondary or cross diffusion term) 값은 두 셀 중심에서 구한  $\nabla\phi$ 를 거리 가중평균 또는 산술평균하여 사용하는 것<sup>(1-3)</sup>으로, 일반적으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$D_j = \Gamma_{\phi,j} [f_j (\phi_{P_j} - \phi_{P_0}) + ((\nabla\phi)_j \cdot \underline{S}_j - f_j (\nabla\phi)_j \cdot \underline{ds}_j)] \quad (7)$$

여기서 우변 첫 번째 항은 주확산항이고, ( )안의 항은 교차 확산항으로, 주확산항은 직각격자계에서와 같이 내재적으로 처리하고, 이차확산항은 지연수정(deferred-correction)방법을 사용하여 생성항에 첨가시킨다. 또한, 식 (7)에서  $f_j$  항은 기하학적 요소로 연구자에 따라 다른 표현이 사용되고 있으며,<sup>(1-5)</sup> 또한 셀 면에서의 종속변수의 구배  $(\nabla\phi)_j$ 에 대해서도 두 인접 셀 중심에서 구한 구배  $\nabla\phi$ 의 평균값<sup>(4,5)</sup> 또는 거리 가중평균<sup>(1-3)</sup>이 사용되고 있다.

식 (7)의 형태는 현재 상용 CFD 코드에서 사용되고 있는 일반적인 근사방법이나, 이 식은 점  $P_0$  와 점  $P_j$  를 잇는 선분이 셀 면 중심을 지난다는 가정 하에서 얻어진 식으로 이 경우에는 2차 정확도를 가질 것이나, 일반적으로 격자가 불규칙하든지 찌그러짐(skewness)이 존재하면 더 이상 2차 정확도를 보장하지 않게 된다.

최근 명<sup>(9)</sup>은 확산플럭스  $D_j$  가 불규칙적인 격자에서도 2차 정확도를 가지면서도 용이하게 CFD 코드에 접목시켜 사용할 수 있는 새로운 근사방법을 다음과 같이 제안하였다.

$$\begin{aligned} D_j &= \Gamma_{\phi,j} \left( \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_{S_j} \\ &= (\phi_{P_j} - \phi_{P_0}) \frac{\Gamma_{\phi,j} S_j}{ds_j \cdot \hat{n}} \\ &+ \Gamma_{\phi,j} [(1 - \omega_j)(\nabla\phi)_{P_0} + \omega_j(\nabla\phi)_{P_j}] \cdot \underline{S}_j \quad (8) \\ &- \Gamma_{\phi,j} [(\nabla\phi)_{P_0} \cdot (\underline{r}_j - \underline{r}_{P_0}) \\ &+ (\nabla\phi)_{P_j} \cdot (\underline{r}_{P_j} - \underline{r}_j)] \frac{S_j}{ds_j \cdot \hat{n}} \end{aligned}$$

여기서,

$$\omega_j = \left| (\underline{r}_j - \underline{r}_{P_j}) \right| / \left| (\underline{r}_{P_j} - \underline{r}_{P_0}) \right| \quad (9)$$

로 이웃하는 두 셀의 크기가 다른 경우 거리 가중내삽을 위한 가중값(보간값)이며,  $\underline{r}_j$  및  $\underline{r}_j$ 는 각각 셀 면  $j$ 에 인접한 두 셀의 중심  $P_0$  및  $P_j$ 를 잇는 직선  $ds_j$ 이 셀 면  $j$ 와 만나는 점 및 셀 면 중심의 위치벡터이다.

식 (8)이 본 코드에서 채택한 확산항 근사방법으로, 용이하게 CFD 코드에 접목시켜 사용할 수 있는 식 형태를 가지고 있으며, 기존의 확산항 처리방법과 마찬가지로 우변 첫 번째 항은 내재적으로 처리하고, 나머지 항들은 지연수정 방법을 사용하여 생성항에 첨가시키는 방법을 사용한다.

참고로, 식 (8)은 형태상으로는 기존의 식 (7)과 유사하나, 몇 가지 새로운 사실을 제시하고 있다. 첫째, 식 (7)에서 기하학적 요소인  $f_j$  항은 셀 면에 이웃한 두 셀의 중심을 잇는 선과 셀 면의 사잇각이 0이 아닌 일반적인 비직교성까지 고려한 다음 표현을 사용하는 것이 타당함을 제시한다.

$$f_j = \frac{S_j}{ds_j \cdot \hat{n}} \quad (10)$$

둘째, 식 (8)은 등간격이고 점  $P_0$  와 점  $P_j$  를 잇는 선분이 셀 면 중심을 지나는 경우 식 (7)과 정확히 일치한다. 셋째,  $\underline{S}_j$  와  $ds_j$  의 사잇각이 0인 직각격자인 경우 식 (8)의 첫 번째 항만 남아 결과적으로 확산플럭스가 직각격자에서 유한차분으로 이산화된 식과 일치하게 된다. 넷째, 식 (8)은 셀 면에서의 종속변수의 구배  $(\nabla\phi)_j$ 를 기존의 방법과는 달리 다음과 같이 구해야함을 새롭게 제시하고 있다.

$$(\nabla\phi)_j = (1 - \omega_j)(\nabla\phi)_{P_0} + \omega_j(\nabla\phi)_{P_j} \quad (11)$$

## 2.5 경계조건

셀 중심과 함께 종속변수  $\phi$  는 경계면 중심에도 저장된다. 경계면에서의 확산 플럭스  $D_j$  는 내부 경계면에서 구하는 식 (8)과 마찬가지로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$D_b = (\phi_{P_i} - \phi_{P_b}) \frac{\Gamma_{\phi_b} S_b}{ds_b \cdot \hat{n}} + \Gamma_{\phi_b} [(\nabla\phi)_{P_b} \cdot \underline{S}_b - ((\nabla\phi)_{P_b} \cdot \underline{ds}_b) \frac{S_b}{ds_b \cdot \hat{n}}] \quad (12)$$

위 식에서 아래첨자  $b$ 는 경계면을 의미하며, 참고로 식 (12)는 현재 상용 CFD 코드에서 대부분 사용되는 일반적인 근사방법이다. 그러나 셀 면에서의 종속변수의 구배  $(\nabla\phi)_j$ 를 구하는데 있어 두 인접 셀 중심에서 구한 구배값  $\nabla\phi$ 의 거리가 증평균값<sup>(1-3,6)</sup>을 사용하는 통상적인 방법은 경계면에서  $\omega_j$  값이 0이 되므로 논리적 모순점을 가지고 있으나, 본 연구에서 채택한 식 (12)는 경계면에서도 그대로 적용되어 논리적으로도 타당하다.

한편 Dirichlet 경계조건인 경우에는 주확산항은 내재적으로 포함되고, 이차항은 외재적으로 처리된다. 또한 Neumann 경계조건인 경우에는 명기된 플럭스가 직접적으로 제어체적 평형에 더해질 수 있으며, 식 (12)은 경계면에서의 값  $\phi_b$ 를 계산하기 위해 사용된다.

## 2.6 이산화방정식

지금까지 기술한 대류항, 확산항 등에 대한 이산화 방법을 일반적인 적분형 수송방정식 (1) 또는 식 (2)에 대입함으로써 다음과 같이 셀  $P_0$ 에 대한 최종적인 이산화방정식이 얻어진다.

$$A_{\phi 0} \phi_{P_0}^n + \sum_j^{nmb} A_{\phi j} \phi_{P_j} = b_{\phi} \quad (13)$$

위식에서  $j$ 는 셀  $P_0$ 의 이웃하는  $nmb$ (number of neighbouring cells) 개의 셀이며, 계수  $A_{\phi j}$ 에 의해서로 연결된다. 정렬격자에서  $nmb$ 는 2차원에서 4, 3차원에서 6으로 고정되어 있으나, 비정렬격자계에서는 셀 형태에 따라 다른 값을 가지며,  $b_{\phi}$ 는 셀  $P_0$ 의 원천항으로, 이차 확산항 및 대류항에 대한 지연수정항과 함께 선형화되지 않은 모든 값들은 포함하며, 경계에서의 확산항도  $b_{\phi}$ 에 포함된다. 또한, 본 코드에서는 식 (13)을 통상적인 방법을 사용하여 하향완화를 행한다.

## 2.7 선형솔버

보존방정식 (2)을  $N$ 개의 모든 셀에 걸쳐 적분

함으로써 미지 종속변수들을 포함한 식 (14)와 같이 상호 결합된  $N$ 개의 비선형 대수방정식이 얻어진다. 이것을 푸는 방법에는 여러 가지가 있으나, 본 연구에서는 일반적으로 상용 CFD 코드에서 채용하고 있는 분리방법(segreated method)을 채택한다. 즉, 이들 식들은 선형화되어 있으며 계수와 원천항이 알려져 있다고 가정함으로써 잠정적으로 결합되지 않은 각 종속변수에 대한 일련의 방정식들이 이전 반복계산에서 얻어진 종속변수 값들을 사용하여 계산된다. 결과적으로 각 종속변수(압력 대신에 압력수정)에 대해 다음과 같은 선형대수방정식을 푸는 것이 된다.

$$[A_{\phi}] [\phi] = [b_{\phi}] \text{ or } A\phi = b \quad (14)$$

여기서,  $A_{\phi}$ 는  $N \times N$  행렬이고, 벡터  $[\phi]$ 는  $N$ 개의 격자점에서의 종속변수  $\phi$ 의 값을 포함하며,  $[b_{\phi}]$ 는 생성(원천)항 벡터이다.

한편, 본 연구에서 제시한 이산화방법은 행렬  $[A_{\phi}]$ 가 다음과 같은 바람직한 특성을 가지게 한다. 첫째, 각 열에서 0이 아닌 요소 수가 인접 셀의 개수  $n$ 과 같아 행렬  $[A_{\phi}]$ 가 성기며, 둘째 압력 수정인 경우에는 대칭행렬이고, 셋째 대각선 지배형태  $[A_{\phi 0} \geq \sum A_{\phi j}]$ 이므로, 식 (14)는 일련의 반복해법에 의해 용이하게 풀려질 수 있으며, 행렬  $[A_{\phi}]$ 가 매우 성긴 형태를 가지므로 결과적으로 매우 작은 컴퓨터 메모리 용량이 요구된다. 따라서 본 연구에서는 대칭행렬에 대해서는 공액구배(CG, Conjugated Gradient)방법을, 비대칭행렬에 대해서는 CGSTAB (CG STABilized) 방법을 불완전 Cholesky 사전조정(preconditioning)과 함께 사용한다. 참고로, 분리 솔루션 방법은 모든 종속 변수  $\phi$ 에 대해 행렬  $[A_{\phi}]$  및 벡터  $[b_{\phi}]$ 에 대해 같은 기억용량을 재사용할 수 있게 함으로써,  $n_{av}$ 를 제어체적 당 평균 셀 면의 수라고 할 때 오직  $(n_{av} + 1)N$  개의 기억위치만을 요구한다.

## 2.8 운동량방정식의 이산화

한편, 운동량 방정식에서는 일반적인 보존방정식과 달리 추가적인 확산 플럭스 항을 포함하고

있다. 일예로  $u_i$ 에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$D_j^i = \int_{S_j} \mu \nabla u_i \cdot d\underline{S}_j + \int_{S_j} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \hat{n}_j \cdot d\underline{S}_j \quad (15)$$

위식에서 밀출 친 항은 일반보존방정식에는 없는 항으로, 만일 물성 값이 일정하다면 모든 제어체적 면에 대한 밀출 친 항의 합은 연속방정식에 의해 0이 될 것이다. 그러나 물성 값이 일정하지 않다고 해도 이 항들은 충격파(shock wave) 근처를 제외하고는 매끈하게 변하고, 전체 제어체적에 걸친 이 밀출 친 항의 적분은 주확산항의 적분 값보다 작다. 이러한 이유로 이 밀출 친 항은 통상 명시적(양해법)으로 처리된다. 또한 셀 면에서의 구배값은 위에서 살펴 본 바와 같이 셀(제어체적) 중심에 대한 구배값을 사용하여 용이하게 계산될 수 있다. 그런데, 식 (15)의 우변 첫 번째 항을 식 (8)과 같은 방법으로 구하면 이 경우 명시적으로 구해야 하는 항이 또 나타나게 된다. 따라서 본 연구에서는 앞에서 기술한 경계조건과의 상응성 및 다음에 기술할 압력 수정방정식을 함께 고려하여 식 (15)을 원래의 전단응력 텐서로부터 구하는 방법을 사용한다. 즉, 식 (15)은 전단응력 텐서로 표현하면 다음과 같으며,

$$D_j^i = \int_{S_j} \tau_{ij}^i \cdot d\underline{S}_j \approx \tau_{ij}^i \cdot S_j \quad (16)$$

이것을 식 (8)과 같이 표현하면, 다음과 같이 결합된 형태로 나타낼 수 있다.

$$D_j^i = (u_{P_j}^i - u_{P_0}^i) \frac{\mu_j S_j}{ds_j \cdot \hat{n}} + [\tau_{ij}^i \cdot S_j - \mu_j ((\nabla u_i)_j \cdot ds_j) \frac{S_j}{ds_j \cdot \hat{n}}] \quad (17)$$

위식에서  $\tau_{ij}^i$ 는 이 면을 공유하는 두 셀 중심에서의 속도구배 값을 사용하여 용이하게 구할 수 있으며, 벽면에 대해서는 벽면을 포함하는 셀 중심에서 구한 속도구배 값을 벽면 중심으로 외삽하여 전단응력을 구한다.

또한, 운동량 방정식의 생성항에는 압력구배항을 포함하고 있으며, 이 구배항을 명확히 구분하여 나타내면 다음과 같다.

$$Q_{u,v} = Q_{u,v}^* + Q_{u,v}^p = Q_{u,v}^* - (\nabla p)_{P_0} V_{P_0} \quad (18)$$

따라서 운동량방정식은 압력이 알려져야만 풀릴 수 있으며, 압력은 아래에서 기술하는 바와 같이 이산화된 연속방정식을 불러들임으로써 구해진다.

2.9 셀 면에서의 속도

이산화된 연속방정식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\sum_j J_j = \sum_j \rho v_j^* \cdot S_j = 0 \quad (19)$$

그런데 잘 알려진 바와 같이 압력과 속도성분이 셀 중심에 저장되기 때문에 셀 면에서의 질량 유속  $J_j$ 을 인접한 두 셀 중심에서의 속도를 평균하여 구할 경우 잘 알려진 압력장의 진동해를 피할 수 없게 된다. 따라서 이것을 방지하기 위해서 본 연구에서는 Rhie-Chow의 압력가중내삽법<sup>(10)</sup>과 유사한 방법을 선택하여 비정렬격자계와 같은 임의의 셀 면에 적용시킨다. 즉, 이 방법은 식 (19)에 정의된 셀 면에서의 유체속도를 다음과 같이 계산한다.

$$v_j^* = v_j + \delta v_j \quad (20)$$

여기서 우변 첫 번째 항은 다음과 같이 셀 면에서 중심차분에 의해 공간적으로 보간된 속도이고,

$$v_j = (1 - w_j) v_{P_0} + w_j v_{P_j} \quad (21)$$

두 번째 항은 아래와 같이 정의되는 3차 압력확산항(third order pressure diffusion term) 또는 압력 감쇄항으로 이산화된 연속방정식에서는 4차의 압력 미분항으로 작용한다.

$$\delta v_j = D_p \hat{n} = - \left( \frac{V_0}{A_{v_0}} \right)_j \left[ \frac{p_{P_j} - p_{P_0}}{ds_j \cdot \hat{n}} - \frac{\nabla p \cdot ds_j}{ds_j \cdot \hat{n}} \right] \frac{S_j}{|S_j|} \quad (22)$$

위식에서  $A_{v_0}$ 는 아래에 기술하는 SIMPLE 알고리즘인 경우 식 (13)의 셀  $P_0$ 에 대한 계수값이며, SIMPLEC 알고리즘인 경우에는 다음과 같이 대체된다.

$$A_{v_0} \rightarrow A_{v_0} + \sum_j A_{v_j} \quad (23)$$

또한 식 (22)에서 뒷선이 그려진 항은 이 셀 면을 공유하는 두 셀 중심에서의 값을 보간하여 구해

진다.

한편, Miettinen<sup>(11)</sup>은 비엇갈림 격자에서 셀 면에 더해지는 압력감쇄항의 크기를 분석하고 벽면 근처 셀에서는 이 압력감쇄항의 크기가 이웃하는 두 셀에서 내삽한 속도보다 더 커지는 것을 발견하였다. 압력감쇄항  $D_p$ 가  $v_j$  보다 커지는 것을 막기 위하여 압력감쇄항의 크기를 제한하면 다음과 같이 표현된다.

$$v_j^* = v_j - \min(C_{limit}, \left| \frac{D_p}{v_j} \right|) |v_j| \text{sign}(D_p) \quad (24)$$

여기서  $v_j$ 는 공간적으로 중심차분으로 보간시킨 셀 면에서의 속도 크기를 나타내며,  $C_{limit}$ 은 0부터  $\infty$ 의 값을 가지며  $C_{limit} = \infty$ 은 Rhie-Chow법이 된다. 이 방법은 2차원 자연대류 유동과 실린더 주위의 비점성 유동해석에서 개선된 효과를 제시하는 것으로 알려져, 본 코드에서도 셀 면에서의 속도에서 3차의 압력 미분항의 크기를 중심차분으로 구한 속도 크기의 1~10 %로 제한하는 방법을 적용해서 사용한다.

### 2.10 압력-수정방정식

널리 알려진 SIMPLE 계통 알고리즘<sup>(12)</sup>이 본 코드에서도 압력-속도 결합을 위해 사용되어진다. 즉, 앞에서 기술한 바와 같이 압력 추정값  $p^*$ 와 식 (20)으로 나타낸 속도 추정값  $v^*$ 는 이산화된 운동량방정식을 만족시키나, 이산화된 연속방정식은 만족시키지 못하므로 다음과 같이 수정이 필요하다.

$$\begin{aligned} \sum_j J_j &= \sum_j \rho_j (v_j^* + v_j') \cdot S_j \\ &= \sum_j J_j^* + J_j' = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

여기서,  $J_j'$  및  $v_j'$ 은 각각 질량유속 및 속도의 수정(또는 보정)량이다. 속도 변동분  $v_j'$ 는 식 (22)으로부터 압력 변동분  $p'$ 이 작고 최종적으로 소거되는 값이므로 식 (22)의 우변 두 번째 항으로부터 나타나는 값을 생략하여 다음과 같이 나타내면,

$$v_j' \approx - \left( \frac{V_0}{A_0} \right)_j \frac{p_P' - p_{P_0}'}{|ds_j|} \cdot \frac{S_j}{|S_j|} \quad (26)$$

질량유속 수정량  $J_j'$ 는 다음과 같다.

$$J_j' \approx - \rho_j \left( \frac{V_0}{A_0} \right)_j \left| \frac{S_j}{ds_j} \right| (p_P' - p_{P_0}') \quad (27)$$

식 (27)을 식 (25)에 대입하면 다음과 같은 압력 수정방정식이 구해진다.

$$A_{P_0} p_{P_0}' + \sum_j^{nmb} A_{P_j} p_{P_j}' = b_{P_0} \quad (28)$$

여기서,  $A_{P_0} = - \sum_j^{nmb} A_{P_j}$ 이고,  $b_{P_0}$ 는 셀  $P_0$ 로의 정미유입 질량유량이며, 합은 셀  $P_0$ 의 모든 이웃하는 셀에 대해 행하여진다.

식 (28)으로부터 압력 수정분  $p'$ 가 얻어진 후, 셀  $P_0$ 에서의 속도 및 압력은 다음과 같이 수정되고,

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (29)$$

$$v = v^* + v' = v^* - \frac{V_{P_0}}{A_{P_0}} (\nabla p')_{P_0} \quad (30)$$

마지막으로 플럭스를 만족시키는 질량유량은 다음과 같이 구해지고,

$$J_j = J_j^* + J_j' = J_j^* + A_{P_j} p_{P_j}' - A_{P_0} p_{P_0}' \quad (31)$$

이 값이 다음 계산의 대류 플럭스 계산에 사용된다. 참고로 식 (29)에서  $\alpha_p$ 는 압력에 대한 하향완화계수(under-relaxation)이다.

## 3. 결 론

본 논문에서는 최근 저자들이 개발한 비정렬격자계를 사용하고 압력수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석코드(PowerCFD 코드)에 사용된 수치해석 방법을 중심으로 기술하였다. 이 코드에 채택된 주된 특징은 다음과 같다.

(1) 먼저 2차원에서는 삼각형 및 사각형 셀, 3차원에서는 사면체, 프리즘, 육면체 셀 등 격자생성법에 따라 여러 가지 모양의 셀이 사용될 수 있도록 하였다.

(2) 압력과 속도성분을 모두 셀의 중심에 저장하므로 격자자료 저장에 효율적인 셀 중심 집중 저장을 채택하고, 일반성을 위해 셀에 특수한 형상 함수를 사용하는 것은 피하였다.

(3) 대류 및 확산항에 대한 이산화 조작은 가능한 한 잘 알려진 경계적합 정렬격자계의 형태로 공식화하였다. 특히, 본 코드에서는 불규칙적이고

여러 가지 형상을 가지는 격자에서도 2차 정확도를 가지면서도 용이하게 코드에 접목시켜 사용할 수 있는 새로운 확산플럭스 근사방법을 채택하였다.

(4) 운동량방정식의 압력항 처리를 위하여 연속 방정식의 속도와 연관시킨 SIMPLE 계통 알고리즘을 비정렬격자계에 적용시켜 압력수정방정식을 얻는 방법을 확립시켰다.

(5) 선형화된 방정식의 해를 얻기 위해 사전 조정된 Conjugated Gradient 방법 계통의 대수 솔버를 사용하였다.

이러한 수치해석방법을 채용한 코드를 사용해서 단순하면서도 직교성을 갖는 정사각형의 lid-driven 캐비티유동 문제에 대해 비정렬 삼각형 격자 및 비정렬 사각형 격자를 사용하여 계산한 결과를 정렬격자계를 사용하여 계산한 검증용 해와 비교분석한 결과 본 수치해석방법의 적합성 및 정확성이 입증되었다.<sup>(13)</sup> 따라서 이어지는 논문에서는 보다 복잡한 형상을 가지는 열 및 유체유동 검증용 문제에 대해 계산한 결과를 검증용 해와 비교분석을 통해 본 연구(코드)에서 제시한 수치해석방법의 타당성 및 정확성을 평가하고 있다.

### 참고문헌

- (1) Demirdzic, I. and Muzaferija, S., 1995, "Numerical Method for Coupled Fluid Flow, Heat Transfer and Stress Analysis Using Unstructured Moving Meshes with Cells of Arbitrary Topology," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 125, pp. 235~255.
- (2) Jiang, Y. and Przekwas, A.J., 1994, "Implicit, Pressure-Based Incompressible Navier-Stokes Equations Solver for Unstructured Meshes," AIAA-94-0305.
- (3) Davison, L., 1996, "A Pressure Correction Method for Unstructured Meshes with Arbitrary Control Volumes," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 22, pp. 265~281.
- (4) Mathur, S.R. and Murthy, J.Y., 1997, "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes," *Numerical Heat Transfer, Part. B*, Vol. 31, pp. 195~215.
- (5) Ferziger, J. H. and Peric, M., 1996, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer.
- (6) Muzaferija, S., 1994, "Adaptive Finite Volume Method for Flow Predictions Using Unstructured Meshes and Multigrid Approach," PhD Thesis, University of London.
- (7) Zwart, P.J., Raithby, G.D. and Raw, M.J., 1999, "The Integrated Space-Time Finite Volume Method and its Application to Moving Boundary Problems," *J. Comp. Physics*, Vol. 154, pp. 497~519.
- (8) Lien, F.S., 2000, "A Pressure-Based Unstructured Grid Method for All-speed Flows," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 33, pp. 355~374.
- (9) Myong, H. K., 2005, "A New Numerical Approximation of Diffusion Flux in Unstructured Cell-Centered Methods," *Trans. of the KSME(B)*, submitted.
- (10) Rhie, C.M. and Chow, W.L., 1983, "Numerical Study of the Turbulent Flow past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.*, Vol. 21, pp. 1523~1532.
- (11) Miettinen, A., 1997, "A Study of the Pressure Correction Approach in the Collocated Grid Arrangement," Ph.D. thesis, Helsinki Univ. of Technology.
- (12) Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
- (13) Myong, H.K. and Kim, J.E., 2005, "Numerical Simulation of 2-D Lid-Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers," (in Korean) *Proc. of KSCFE Spring Annual Conf.*, pp. 153~158.