Commun. Korean Math. Soc. **20** (2005), No. 3, pp. 411–426

초청논문

미분방정식의 해의 안정성에 관한 연구

고윤희

ABSTRACT. 본 논문에서는 상미분방정식, 지연미분방정식, 중립형 지연미분방정식, 그리고 차분방정식의 안정성에 관한 연구방법과 최근의 연구동향들을 간략하게 소개하였다.

1. 서론

19세기 후반, 러시아 수학자인 리아프노프(A. M. Liapunov)[50]는 상미분방정식계의 해들의 정성적 성질(안정성, 주기성, 점근적 안정성, 진동성, 불안정성, 불변성 등)을 연구하기 위해 매우 효과적인 방법인 리아프노프직접방법(Liapunov Direct Method)을 도입하였다. 1930년대까지는 주로 러시아 수학자들에 의해 미분방정식의 해의 안정성에 관하여 연구되었으며 미분방정식의 안정성에 관한 연구가 광범위하게 활성화되지 못했다. 그러나 1940년대 이후 많은 수학자들과 과학자들에 의해 미분방정식의 안정성에 관한 연구가 활성화되기 시작하였다. 그 후 지속적으로 미분방정식의 안정성에 관한 연구가 광범위하게 활성화 되어왔으며 오늘날도 미분방정식의 안정성에 관한 연구는 매우 활성화되고 있다.

미분방정식의 안정성 연구에 매우 많은 수학자들이 공헌하였다. 따라서 특정한 몇 사람을 언급하는 것은 매우 어려운 일이다. 본 논문에서 소개되는 연구내용을 중심으로 많이 인용된는 연구문헌들의 저자들로 다음의 수학자들 A. M. Liapunov[50], V. Volterra[69], N. N. Krasovskii[42], W. A. Coppel[18], J. LaSalle[48], S. Lefschetz[49], T. Yoshizawa[76], J. K. Hale[30, 32], R. Bellman and K. L. Cooke[4], T. A. Burton[7], V. Lakshikantham[46], K. Gopalsamy[26], Y. Kuang[44] 등을 언급할 수 있다.

Received June 21, 2005.
2000 Mathematics Subject Classification: 34K20.
Key words and phrases: 안정성, 점근적 안정성, 지연미분방정식, 중립형 지연분방정식, 차분방정식.

리아프노프직접방법의 기본 아이디어는 연구과정에서 제시되는 다양한 형태의 상미분방정식계와 관련된 보조함수인 리아프느프함수 또는 리아프노프범함수를 구성하여 제시된 방정식계의 해들의 안정성을 보장하는 조건들을 구하는 것이다. 조건들을 구하는 과정에서 구성된 리아프노프함수(범함수)의 미분과정을 통해 다양한 조건들을 제시할 수 있다. 미분방적식계의 안정성 연구에서 많이 이용되는 연구결과는 J. LaSalle의 Invariance Priciple[48]이다.

1950년대 말까지는 미분방정식의 안정성에 관한 연구가 지연구간을 갖지 않는 상미분방정식계의 안정성에 관한 연구들이 주로 진행되었다. 그러나 여러 가지 변화현상을 모형화 하는 과정에서 공학적인 원인, 생물학적인 원인, 생태학적인 원인 등으로 인해 지연구간을 갖는 미분방정식계들에 대한 해의 안정성 연구가 요구되었다. 일반 미분방정식계의 안정성 연구에서 지연구간을 갖는 미분방정식계의 안정성 연구로의 확장과정에서 N. N. Krasovskii[42], J. K. Hale[32] 등이 많은 공헌을 했다. 일반적으로 지연구간을 갖는 미분방정식계(Functional Differential Equation 혹은 Delay Differential Equation)의 안정성을 연구하는 과정에서 리아프노프범함수(Liapunov Functional)구성과정이 매우 까다롭고 복잡하기 때문에 연구과정에서 추과적인 수학의 성질들의 활용이 요구된다. 그리고 지연미분방정식의 일반화 형태인 중립형 지연미분방정식(Neutral Type Delay Differential Equation)의 안정성 연구가 1970년대 이후 활성화 되었다. 참고문헌으로는 J. K. Hale[32]과 Y. Kuang[44] 등을 제시할 수 있다.

한편, 상미분방정식의 이산화(Discretization) 형태인 차분방정식(Difference Equation)의 안정성 연구도 최근에 매우 활성화 되고있다. 참고문헌으로는 V. Lakshimikantham[47]을 언급하였다.

미분방정식계의 안정성에 대한 연구는 매우 광범위하기 때문에 상미분방정식의 안정성 연구, 지연미분방정식의 안정성 연구, 중립형 지연미분방정식의 안정성 연구, 그리고 차분방정식의 안정성으로 나누어 연구내용과 방법들과 최근의 연구동향들을 제시할 것이다. 특히 여기에 제시되는 미분방정식들은 해의 존재성과 계속성을 가정하여 제시되고 있으며 해의 존재성(Existence)과 계속성(Continuation)에 대한 연구결과들은 본 논문에서 제시되는 참고문헌들을 통해 참고할 수 있을 것이다.

2. 미분방정식의 안정성

일반적으로 상미분방정식은 선형미분방정식(Linear Differential Equations)과 비선형미분방정식(Nonlinear Differential Equations)으로 분리되며 또한 자율미분방정식(Auotnomous Differential Equations)과 비자율미분방정식(Nonautonomous Differential Equations)으로 분류하여

여러 가지 해의 정성적 형태들(Qualitative Behaviors)을 연구할 수 있다.

다양한 분류들을 통합하는 형태로 다음과 같이 미분방정식을 제시할 수 있다.

$$x' = F(t,x),\ F(t,0) = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

여기에서 $x \in \mathbb{R}^n$에 속하며, 함수 F는 개집합 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$에서 $\mathbb{R}^n$로 대응되는 연속함수이다. 미분방정식 (2.1)에 관련된 보조방정식인 리아프노프 방정식 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$V : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.2}$$

여기에서 $V(t,x)$는 연속조건을 갖는다. 미분방정식 (2.1)의 해의 정성적 분석(안정성, 점근적 안정성, 유계성, 주기성, 불변성, 불안정성 등)을 하기 위해 리아프노프방정식 (2.2)를 미분방정식 (2.1)에 관련된 미분식으로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$V'_{(2.1)}(t,x) = \limsup_{\delta\to 0^+} \frac{\{V(t+\delta, \delta F(t,x)) - V(t,x)\}}{\delta} \tag{2.3}$$

미분방정식 (2.1)과 관련된 안정성에 관한 대표적인 정리를 다음과 같이 기술할 있다. 자세한 내용은 J. LaSalle[48], R. K. Miller[53] 등을 참고할 수 있다.

정리 A. *If there exits a continuously differentiable, positive definite, decrescent Liapunov Function $V(t,x)$ with $V'_{(2.1)}(t,x) \le 0$, then $x = 0$ of (2.1) is uniformly asymptotically stable.*

정리 A에서 $V'_{(2.1)}(t,x) \le 0$의 조건은 적절한 초기조건이 제시되는 경우 해들이 상수해로 수렴하는 성질을 보장해주는 충분조건이 될 수 있다. 안정성에 관한 용어들을 세분하여 분리할 수 있다. 안정성(Stability)과 평등적 안정성(Uniform Stability), 점근적 안정성(Asymptotic Stability)과 평등적 점근적 안정성(Uniform Asymptotic Stability), 지수적 안정성(Exponential Stability) 등으로 분류할 수 있다. 특히, 자율미분방정식(Autonomous Differential Equations)에서는 안정성과 평등적 안정성은 같은 개념이다. 그리고 점근적 안정성과 평등적 점근적 안정성도 같은 개념이다.

구체적인 리아프노프방정식 구성과정을 제시해보기로 하자. 다음의 변수분리형 비선형 자율미분방정식(Nonlinear Autonomous Differential Equations)을 고려하자.

$$\begin{cases} x' = f(x)g(y), \\ y' = u(x)v(y). \end{cases} \tag{2.4}$$

이 경우 방정식 (2.4)에 관련된 리아프노프 방정식 $V(x,y)$는 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$V(x,y) = \int_0^x \frac{u(s)}{f(s)} ds - \int_0^y \frac{g(s)}{v(s)} ds. \tag{2.5}$$

이 때 리아프노프 방정식 (2.5)는 미분방정식 (2.5)의 제1적분(The First Integral)이라 한다. 미분방정식 (2.4)보다 일반화된 형태의 미분방정식들에 대한 리아프노프 방정식 구성과정과 안정성에 관한 개선된 연구결과들은 참고문헌 S. B. Hsu[35], B. S. Goh[25], A. Ardito and P. Ricciardi[1] 등에서 참고할 수 있다.

그리고 자율미분방정식(Autonomous Differential Equations)에서 해의 안정성에 관한 주요 정리로는 다음 정리를 제시할 수 있다. 정리에 대한 자세한 내용은 R. K. Miller[53], J. K. Hale[30] 등을 참고할 수 있다. 자율미분방정식

$$x' = F(x),\ F(0) = 0 \tag{2.6}$$

을 고려할 수 있다. 여기에서 $x \in \mathbb{R}^n$이고 F는 개집합 $D \subset \mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^n$으로 대응되는 연속함수이다.

정리 B. *Let* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *be a continuously differentiable and let* $V(0) = 0$. *Suppose that* $V'_{(2.6)}(x) \le 0$ *for all* $x \in \mathbb{R}^n$. *Let* $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V'_{(2.6)} = 0\}$. *Let* M *be the largest invariant subset of* E. *Then all bounded solutions of* (2.6) *approach* M *as* $t \to \infty$.

정리 B의 증명과정과 정리의 응용과정에서 Invariant Set 성질과 Ω Limit Set의 Compactness 성질들이 활용된다. 그리고 정리에서 제시된 집합

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V'_{(2.6)} = 0\}$$

가 오직 하나의 원소 를 갖는다는 것을 보임으로써 자율미분방정식 (2.6)의 모든 해들이 0으로 점근적으로 수렴한다는 것을 보일 수 있다.

한편, 선형미분방정식(Linear Differential Equations)과 섭동선형미분방정식(Perturbed Linear Differential Equations)의 안정성 연구과정에서는 정방행렬식의 고유치(Eigenvalues)들의 성질을 적용한 Routh-Hurwitz Criterion을 이용하여 국소적 안정성(Local Stability)에 관한 결과들을 얻을 수 있다. 그리고 연구결과들은 참고문헌 R. K. Miller[53], W. A. Coppel[18], W. Hahn[29], W. Hurewicz[36], S. B. Hsu[35] 등에서 확인할 수 있다.

한편 제시된 미분방정식의 주기해(Periodic Solutions)의 존재성 연구과정에서 가장 광범위하게 이용되는 정리는 Bendixson's Criterion, Dulac's Criterion, Limit Cycle Stability, 그리고 부동점 정리(Fixed Point Theorem)들이다. 참고문헌으로는 T. Yoshizawa [76], J. K. Hale[30], W. Hahn[29] 등을 제시할 수 있다.

상미분방정식의 해의 안정성에 대한 최근의 연구 내용들은 응용되고 있는 미분방정식들에 대한 새로운 리아프노프함수구성을 시도하여 새롭고 독립된 연구결과들을 얻고 있다. 특히 해의 정성적 형태분석(Qualitative Behavior Analysis)과정에서 비교방법(Comparison Method)를 많이 활용하는 과정에서 다양한 부등식들을 적용함으로써 새롭고 개선된 결과들을 제시되고 있다. 또한 Topological Stability, Topological Degree Theory 등 수학의 다양한 이론들을 활용하고 있다. 연구결과들로서는 [8], [21], [27], [57] 등을 제시할 수 있다.

3. 지연미분방정식계의 안정성

일반적으로 상미분방정식계는 변화율이 현재상태에만 영향을 받는 형태로 모형화 된다. 그러나 변화율은 현재상태 뿐만 아니라 과거의 역사(지연구간 항)에 영향을 받는 것이 현실적이고 합리적인 모형이 될 수 있다. 그러므로 모형화 과정에서 지연미분방정식계로의 확장은 매우 자연적인 현상인 것이다. 또한 지연미분방정식은 상미분방정식의 일반화된 형태로 제시되는 것이다.

우선 지연구간이 유한인 미분방정식계

$$x'(t) = F(t, x_t), \; F(t, 0) = 0 \; \forall \; t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

의 0해의 안정성에 관한 연구과정을 고려할 수 있다. 여기에서 x_t는 x의 $[t-h, t]$에서 $[-h, 0]$로의 평행이동(Translation)이다. 그리고 $x \in \mathbb{R}^n$이고 $|x|$는 n차원 유클리디안노름(EuclideanNorm)이다. 그리고 C는 집합 $C = \{\phi \mid \phi : [-h, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ is continuous}\}$이며, $\|\phi\| = \sup\limits_{-h \le s \le 0} |\phi(s)|$을 의미한다. 여기에서 식(3.1)과 관련된 연속함수인 다음의 리아프노프범함수(Liapunov Functional)을 구성할 수 있다.

$$V(t, \phi) : [0, \infty) \times C \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.2}$$

이 경우 (3.1)의 해의 안정성을 보장하는 조건들을 구하는 과정에서 식(3.1)에 관련된 리아프노프범함수 (3.2)의 미분식인

$$V'_{(3.1)}(t, \phi) = \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{V(t+\delta, x_{t+\delta}(t, \phi)) - V(t, \phi)}{\delta} \tag{3.3}$$

를 정의할 수 있다. 여기에서 미분방정식 (3.1)의 해의 여러 가지 정성적 성질(안정성, 주기성, 점근적 안정성, 불안정성 등)을 보장하는 다양한 존건들을 부과할 수 있다.

일반 미분방정식계의 안정성에 관한 정리 (LaSalle[48])를 확장한 대표적인 정리는 J. K Hale[32]에서 제시된 다음의 결과이다.

정리 C. *Let $H > 0$ and $V : [0, \infty) \times C_H \longrightarrow \mathbb{R}$ be continuously and locally Lipschitz in ϕ, and let $F(t, \phi)$ be bounded for bounded ϕ.*

Suppose that there exist wedges W_1, W_2, W_3 such that, for all $t \geq 0$ and ϕ in C_H,

(i) $W_1(|\phi(0)|) \leq V(t,\phi) \leq W_2(||\phi||)$ *and*
(ii) $V'_{(3.1)}(t,x_t) \leq -W_3(|x(t)|)$.

Then the zero solution of (3.1) *is uniformly asymptotically stable.*

여기에서 $C_H = \{\phi \in C \mid \|\phi\| < H\}$이고, 0해가 평등적으로 점근적인 안정성을 유지한다는 것은 해의 초기조건을 적절한 범위에서 택하는 경우 모든 해들은 평등적으로 0해로 수렴한다는 것을 의미한다. 정리 C 에서 "$F(t,\phi)$ be bounded for bounded ϕ"의 조건이 너무 강해 응용과정에서 많은 제약이 뒤따랐다. 따라서 언급한 조건을 완화시키는 개선된 많은 연구결과들이 제시되었다. T. A. Burton[7], J. Hatvani[34] 등의 연구결과들을 참고할 수 있다. 연구과정에서 함수공간의 여러 가지 성질들이 적용되며 대표적인 정리로 Stone-Weierstrass 정리, Ascoli-Arzela 정리, 동력계 성질(Dynamical System Properties), Gronwall Inequality, Operator Theory, 비교정리(Comparision Theorem) 등이 유용하게 활용될 수 있다.

한편, 지연구간이 무한인 경우의 모델에 대한 안정성 연구들이 활발하게 진행되었다. 특히 지연구간이 무한인 관계로 함수공간을 정의하는 과정에서 다양한 용어들(Admissible Space, Fading Memory Space 등)이 정의된다. 여러 가지 적분성질들이 연구과정에서 활용된다. 연구결과로는 T. A. Burton[7], J. Haddock[28], J. Kato[33] 등을 언급할 수 있다.

대표적인 스칼라 모델로서 다음의 무한지연 미분방정식과 리아프노프 방정식이 응용과정에서 제시된다.

$$x'(t) = -a(t)f\{x(t)\} + \int_{-\infty}^{t} k(t, s-t, x(s))ds \tag{3.4}$$

$$V(t,x_t) = |x(t)| + \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} |k(u, s+t, x(s))|duds \tag{3.5}$$

한편, 모델개체 별로 연구들이 진행되며 각 모델에 따른 리아프노프 함수들을 구성하여 다양한 연구결과들이 제시된다. 대표적인 모델로서 Lotka-Volterra Type System인

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left\{r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t-\tau_{ij})\right\} \tag{3.6}$$

을 고려할 수 있다. 여기에서 $i = 1, 2, 3, \ldots, n$이다. 상수 r_i와 a_{ij}들의 조건에 따른 다양한 리아프노프함수들이 구성될 수 있으며 다양한 독립된 안정성에 관한 연구결과들이 제시된다. 많은 경우, 미분방정식 (3.6)의

형태는 먹이사슬(Prey-Predator Model) 형태로 제시되면 개체들과의 경쟁과 공생(Coexistence)의 생태학적 현상들을 안정성 연구와 관련시켜 연구되어진다. 그리고 제시된 지연미분방정식과 관련된 특성방정식(Characteristic Equation)해의 분석을 통해 구체적인 지연구간의 범위에 따른 다양한 해의 안정성에 대한 결과들을 얻을 수 있다. 참고문헌으로는 Y. Kuang[44], K. Gopalsamy[26], H. I. Freedman[23], Y. Cao[13], Y. Xiao[72] 등을 언급할 수 있다. 그리고 바로 앞에서 언급한 참고문헌을 참고하면 다양한 지연미분방정식계의 안정성에 관한 연구결과들을 확인할 수 있을 것이다.

특히, 미분방정식 (3.6)에서 지연구간에 관련된 적절한 리아프노프 방정식 구성의 복잡성은 여러 연구결과들을 참고로 확인 할 수 있다. 그러한 복잡성을 극복하기 위해 미분방정식 (3.6)의 형태를 변수 변환을 통해 새로운 리아프노프 함수를 구성함으로써 기존의 연구결과들 일반화 시키고 개선시킨 연구결과들을 참고문헌 Gopalsamy[26] 등에서 확인할 수 있다. 이러한 연구과정에서 적용되는 핵심 내용은 제시된 지연미분방정식계의 유계성과 해의 균등적 연속성(Uniform Continuity)과 영을 포함하는 양의 실수범위에서의 Riemann적분가능성을 이용한 해들의 수렴성이다. 이러한 해의 수렴성을 통해 해의 안정성의 결과들을 얻을 수 있다.

구체적인 보기로서 다음의 지연미분방정식계를 고려하자.

$$
\begin{aligned}
x' &= x(a - y - dz - \alpha x),\\
y' &= y(-b + x(t-\tau) - \alpha_1 y),\\
z' &= z(-c + dx(t-\tau) - \alpha_2 z),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

여기에서 방정식 (3.7)에 관련된 안정성에 대한 연구결과를 얻기위해 $u = \ln\frac{x}{x^*}$, $v = \ln\frac{y}{y^*}$, $w = \ln\frac{z}{z^*}$의 형태로 변수변환을 시킨다. 그리고 초기단계의 라프노범함수

$$
\begin{aligned}
V(u,v,w) = x^*\int_0^{u(t)}(e^s-1)ds + y^*\int_0^{v(t+\tau)}(e^s-1)ds\\
+ z^*\int_0^{w(t+\tau)}(e^s-1)ds
\end{aligned}
$$

를 구성한후 구성된 리아노프범함수를 미분방정식(3.7)에 관하여 미분한후 주된 리아프노프함수를 완성한후 균등적 연속성과 적분가능성을 이용하여 해들의 점근적 안정성에 대한 결과들을 구할 수 있다.

한편, 다종 모델형(Multi-Species Model)인 비선형 Lotka-Volterra미분방정식의 안정성 연구가 최근에 매우 활발하게 진행되고 있으며 대

표적인 미분방정식으로 다음과 같이 제시될 수 있다.

(3.8)

$$x_i'(t) = b_i\{x_i(t)\}\Bigg[r_i(t) - a_i(t)x_i(t-\tau_i) - c_i(t)\int_{-\infty}^{0} x_i(t+s)h_i(s)ds + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_{ij}} b_{ijl}(t)x_j(t-\tau_{ijl}) + \sum_{j=1}^{n}\int_{\tau_{ij}}^{0} x_j(t+s)k_ij(t,s)ds + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(t)\int_{-\infty}^{0} x_j(t+s)h_{ij}(s)ds\Bigg]$$

미분방정식 (3.8)의 해의 안정성에 관한 많은 연구결과들을 참고문헌을 통해 확인할 수 있으며 주요 연구 내용은 미분방정식 (3.8)에 관한 다양한 리아프노프 방정식 구성을 통한 여러 가지 조건들을 얻는 것이다. 참고문헌으로는 K. Gopalsamy[26], Y. Kuang[44] 등을 제시할 수 있다. 제시된 참고문헌들을 통해 안전성에 관한 연구내용들의 개선되고 일반화 되는 과정을 확인할 수 있다.

주어진 미분방정식계의 해의 정성적 분석을 연구하는 과정에서 각 방정식에 주어진 조건에 따른 독립된 결과들을 얻을 수 있기 때문에 미분방정식의 안정성 연구의 다양성은 매우 광범위하다.

지연미분방정식의 해의 안정성 연구에 대한 최근의 연구 내용들은 일반미분방정식(지연구간이 없는 상미분방정식)의 해의 안정성 연구에서처럼, 응용되고 있는 미분방정식들에 대한 새로운 리아프노프함수 구성을 시도하여 새롭고 독립된 연구결과들을 얻고 있다. 새로운 리아프노프 구성과정에서 매우 다양한 수학의 여러 성질들이 활용되고 있다. 해의 정성적 형태분석(Qualitative Behavior Analysis) 과정에서 비교방법(Comparison Method)를 많이 활용하는 과정에서 다양한 부등식들을 적용함으로써 새롭고 개선된 결과들을 제시되고 있다. 그리고 Topological Dynamics Properties, Ergodic Theory, Multi-valued Semiflows 등 다양한 성질들을 활용하여 새로운 결과들을 얻고 있다. 또한 연구과정에서 다양한 소프트웨어의 시뮬레이션 과정이 활용되어지고 있다. 참고문헌으로 [2], [14], [19], [37], [56], [65], [74] 등을 제시할 수 있다.

4. 중립형 미분방정식계(Neutral delay models)의 안정성 연구

3절에서 제시된 지연미분방정식계(Functional Differential Equations, Delay Differential Equations)는 상미분방적식계의 일반화된 형태이다. 여기에 제시되는 중립형 지연미분방정식계는 지연미분방정식계의 일

반화된 형태로 도함수부분도 지연구간을 포함한 형태로 제시된다. 여러 가지 변화현상의 모형화 과정에서 과거 역사의 도함수의 부분을 포함하는이 중립형 지연미분방정식의 해의 안정성 연구가 필요하게 되었다.

중립형 지연미분방은 다음과 같은 일반화된 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = F(t, x_t) \tag{4.1}$$

여기에서 $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$는 개집합(Open Set)이며, 두개의 범함수 $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 는 연속함수이다. 그리고 미분방정식 (4.1)에서 제시된 C는 폐구간에서 $\mathbb{R}^n$으로 대응되는 연속함수들의 공간을 의미한다. 미분방정식 (4.1)의 형태에 대한 체계적인 연구 내용은 J. K. Hale[32]에서 제시되고 있다. 연구과정에서 $D(t, x_t)$부분과 $F(t, x_t)$부분을 동시에 고려하므로 많은 전제조건들을 필요로 한다. 그리고 중립형 지연미분방정식계의 안정성을 연구하는 과정에서 함수해석학(Functional Analysis)의 작용소 이론(The Operator Theory)의 중요한 성질들이 적용된다. 다음에 제시되는 정리는 중립형 지연미분방정식계의 안정성에 관한 핵심정리이다.

정리 D. *Suppose D is stable,*

$$f : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; f : \mathbb{R} \times (\text{bounded sets of } C)$$

into bounded sets of $\mathbb{R}^n$ and suppose $u(s)$, $v(s)$ and $w(s)$ are continuous, nonnegative, and nondecreasing with $u(s), v(s) \geq 0$ for $s \neq 0$ and $u(0) = v(0) = 0$. If there is a continuous function $V : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$u(|D\phi|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|), \; V'_{(4.1)}(t, \phi) \leq -w(|D\phi|)$$

then the solution $x = 0$ of (4.1) is uniformly stable. If $u(s) \to \infty$ as $s \to \infty$, the solutions of (4.1) are uniformly bounded. If $w(s) > 0$ for $s > 0$, then the solution $x = 0$ of (4.1) is uniformly asymptotically stable.

중립형 지연미분방정식의 간단한 보기로서 다음의 중립형 지연미분방정식 (4.2)와 리아프노프 함수 (4.3)를 구성하여 정리 C의 결과를 활용하여 안정성에 관한 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt}Dx_t = -\alpha x(t) - q\alpha x(t-r) - g(Dx_t), \tag{4.2}$$

where $D\phi = \phi(0) - q\phi(-r), |q| < 1, \alpha > 0$.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(D\phi)^2 + \beta \int_{-r}^{0} \phi^2(s) ds. \tag{4.3}$$

안정성에 관한 결과를 얻기 위해 리아프노프 함수 (4.3)을 미분방정식 (4.2)에 관하여 미분한 다음 간단한 부등식 성질을 활용할 수 있다. 방정식 (4.2)와 관련된 구체적인 연구내용은 J. K Hale[32]에서 참고할 수 있다.

다른 형태의 중립형 지연미분방정식의 보기로 다음의 중립형 지연 로지스틱 방정식(The Neutral Delay Logistic Equation)을 고려할 수 있다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left[1 - \left\{x(t-\tau) + \rho\frac{dx(t-\tau)}{dt}\right\}\Big/ K\right], \tag{4.4}$$

여기에서 r, ρ, τ, K는 양의 상수들이다. 미분방정식 (4.4)과 유사한 형태의 방정식들의 해의 형태(안정성, 유계성, 진동성, 비유계성, 수렴성 등)에 대한 연구는 H. I. Freedman and X. Yuantong[23], K. Gopalsamy[26], Y. Kuang[44] 등에서 참고할 수 있으며, 연구과정에서 특성방정식(Characteristic Equation) 성질, 다양한 부등식(Gronwall Inequality, Jensen Inequality, Holder Inequality 등) 성질, 상극한과 하극한 성질, 기본적인 적분 성질 등이 적용될 수 있다.

제한된 공간에서의 두가지 종류의 개체들의 상호 경쟁 협조관계를 모형화한 일반화된 중립형 지연미분방정식으로 다음식 (4.5)을 고려할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)\left[\int_{-\tau_1}^{0} g\{x(t+s)\}\,d\mu_1(s) - \rho\int_{-\tau_2}^{0} \dot{x}(t+s)d\mu_2(s)\right. \\ &\qquad \left. - q\{x(t)\}\int_{-\tau_3}^{0} y(t+s)d\mu_3(s)\right], \\ \dot{y}(t) &= y(t)\left[a + b\int_{-\tau_4}^{0} x(t+s)q\{x(t+s)\}\,d\mu_4(s)\right. \\ &\qquad \left. - \int_{-\tau_5}^{0} y(t+s)d\mu_5(s)\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

중립형 지연미분방정식 (4.5)의 해의 안정성을 연구하기 위해서 동치관계의 다른 형태로 미분방정식을 변형한 후 적절한 리아프노프 함수를 구성한다. 구체적인 연구내용은 Y. Kuang[44]를 참고할 수 있다.

최근의 연구 결과에서는 작용소 이론(Semi Group Properties, Analysis of the Spectrum, The Riesz Basis Property 등)과 다양한 적분 부등식을 활용되어지고 있다. 참고문헌으로 [15], [58], [60] 등을 제시할 수 있다.

5. 차분방정식(Difference equations)의 안정성 연구

연속적인 시간의 경우에서는 변수 x의 변화유형은 도함수

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt},\ x''(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2},\ x'''(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3}$$

등으로 구체화된다. 이 속에 포함되는 시간의 변화는 무한소이다. 그 대신 시간이 이산변수(Discrete Variable)이어서, 변수 t가 정수값만을 가진다고 볼 때는 도함수의 개념은 더 이상 적절하지 않게 된다. 그럴 때는, 변수 x의 변화는 $x(t)$의 도함수 보다는 차분(Difference)으로 표현해야 한다. 따라서 미분방정식의 기법은 차분방정식의 기법으로 대체되어야 한다. 그러므로 차분방정식의 행의 안정성을 연구하는 과정에서 다양한 기법들이 적용되는데 그러한 기법들은 미분방정식의 해의 안정성 연구에서 이용되는 기법들이 변형되어 적용될 수 있다. 특히 리아프노프 안정성(Liapunov Stability)의 연구에서는 미분방정식의 연구방법들(차분방정식의 보조함수 구성 연구, 다양한 비교법 적용)이 이용된다. 기본적인 표현들을 제시하면

$$\Delta x_n = \Delta x(n) = x(n+1) - x(n) = x_{n+1} - x_n$$

으로 정의할 수 있다. 차분방정식의 일반적인 형태로 다음과 같은 식을 제시할 수 있다.

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \tag{5.1}$$

여기에서 f는 정의역 $N^+ \times \mathbb{R}^k$에서 $\mathbb{R}^k$로 대응되는 연속함수이며 N^+는 0을 포함하는 자연수 집합이고, $f(n,0) = 0$을 만족하며 0은 0벡터를 의미한다. $x(n, n_0, x_0)$를 초기조건 (n_0, x_0)을 갖는 해라고 정의한다. 그리고 방정식 (5.1)의 보조함수인 리아프노프함수(Liapunov Function)인 $V(n, x_n)$와 $\omega\,(n, V(n, x_n))$가 다음의 부등식

$$\begin{aligned} V(n+1, x_{n+1}) &\le V(n, x_n) + \omega(n, V(n, x_n)) \\ &\equiv g(n, V(n, x_n)) \end{aligned}$$

을 만족하는 경우 차분방정식의 안정성에 대한 다음의 주요 정리를 제시할 수 있다. 참고문헌으로는 V. Lakshmikantham[47]을 제시할 수 있다.

정리 E. *Suppose that there exist two functions $V(n,x)$ and $g(n,u)$ satisfying the following conditions:*

(1) $g : N^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(n,0) = 0, g(n,u)$ *is nondecreasing in* u;
(2) $V : N^+ \times \mathbb{R}^k \longrightarrow R^+$, $V(n,0) = 0$ *and* $V(n,x)$ *is positive definite and continuous with respect to the second argument; Then*
 (a) *the stability of* $u = 0$ *implies the stability of* $x_n = 0$ *of* (5.1);

(b) *the asymptotic stability of $u = 0$ implies the asymptotic stability of $x_n = 0$ of* (5.1).

정리 E의 응용과정에서 적절한 리아프노프함수(Liapunov Function)의 구성과 비교방법(Comparison Method)의 활용이 중요한 역할을 한다. 구체적인 보기로서 다음의 차분방정식을 고려하자.

$$(5.2)\quad x_i(n+1) - x_i(n) = -b_i x_i(n - l_i(n)) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}(n) x_j(n - h_{ij}(n))$$

차분방정식 (5.2)에 과련된 리아프노프 함수

$$(5.3)\qquad v(n) = \max_{1\le i\le m}\ \max_{k\in N(-l,0)} \frac{|x_i(n+k)|}{r_i}$$

를 구성하여 부등식과 비교방법(Comparision Method)을 이용하여 안정성에 대한 결과들을 얻을 수 있다. N은 모든 정수의 집합이며, $N(a,b) = \{a, a+1, \cdots, b\}$이고 $l = \max_{1\le i,j\le m}\{l_i, h_{ij}\}$ 이다. 자세한 내용은 W. Chen [16]을 참고할 수 있다.

차분방정식의 안정성에 관한 최근의 연구 동향은 상미분방정식의 안정성 연구에서 비슷한 경향을 보이고 있다. 즉 새로운 리아프노프 방정식의 도입과 비교방볍을 유연하게 적용하기 위한 다양한 부등식의 활용과 구성 등을 통해 개선된 결과와 새로운 결과들을 얻고 있다. 특히 차분방정식 연구에서는 안정성(수렴성)과 진동성에 연구도 활발하게 진행되고 있다. 참고문헌으로는 [16], [17], [20], [22] 등을 제시할 수 있다.

차분방정식의 응용분야로는 경제학, 제어분야, 이산수학 분야, 생물학 등을 언급할 수 있다.

6. 결론

미분방정식의 안정성에 관한 내용을 개괄적으로 언급하였다. 그런데 상미분방적식의 안정성에 관한 연구분야가 매우 광범위하여 중요한 연구 부분에 대한 언급을 하지 못한 부분도 있을 것이다. 또한 연구내용을 언급하는 경우에도 체계성과 구체성이 결여되는 부분도 있을 것이다. 그러나 본 논문에서 제시되는 미분방정식의 안정성에 관한 연구내용을 통해서 연구에 관심이 있는 분들에게 조금이나마 도움이 될 수 있기를 기대해본다. 그리고 각종 표시(Notation), 다양한 용어에 대한 정의들(Definitions)이 생략되거나 애매한 부분들이 있을 수도 있다. 그러한 것은 참고문헌에서 제시된 다양한 연구내용들을 참고할 수 있다.

최근의 연구동향에서는 주어진 미분방정식계의 해의 안정성, 주기성, 불안정성 등의 정성적 형태 분석(Qualitative Behavior Ana -lysis)을 연구하는 과정에도 다양한 소프트웨어를 이용한 시뮬레이션을 활용하

고 있으며, 생물학 혹은 생태학에서 제시되는 응용모델의 안정성을 연구하는 과정에서 수학자, 이론 생물학자 그리고 통계학자들과의 공동연구들도 활발하게 진행되고 있다.

안정성은 생태학적으로 생태계의 다양한 개체들 사이의 공생 (Co-existence)을 의미하고, 공학적으로 다양한 구조의 안정성에 관련 문제들에 적용할 수 있기 때문에 앞으로도 안정성에 관한 연구들 매우 광범위하게 활성화될 것으로 기대된다.

그리고 다양한 미분방정식을 이산화 과정인 차분방정식의 안정성 연구도 매우 활발하게 진행되고 있다.

References

[1] A. Ardito, and P. Ricciardi, *Lyapunov Functions for a Generalized Gauss-Type Model*, J. Math. Biology **33** (1995), 816–828.

[2] P. Auger, R. B. Parra, S. Morand, and E. Sanchez, *A predator-prey model with predators using hawk and dove tactics*, Mathe. Biosci. **177** (2002), 185–200.

[3] K. Balachandran, D. G. Park, and Y. C. Kwun, *Comparision Theorems for Controllability of Nonlinear Volterra Integrodifferential Systems*, J. Math. Anal. Appl. **268** (2002), 457–465.

[4] R. Bellman and K. L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York and London, 1963.

[5] R. G. Bowers and A. White, *The adaptive dynamics of Lotka-Voltera systems with trade-offs*, Math. Biosci. **175** (2002), 67–81.

[6] T. A. Burton, *Stability Theory for Volterra Equations*, J. Differential Equations **32** (1979), 101–118.

[7] ______, *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, 1983.

[8] T. A. Burton and T. Furumochi, *Krasnoselskii's fixed point theorem and stability*, Nonlinear Anal. **49** (2002), 445–454.

[9] T. A. Burton and G. Makay, *Asymptotic stability for functional differential equations*, Acta Math. Hungar **65** (1994), no. 3, 243–251.

[10] T. A. Burton and B. Zhang, *Periodic Solutions of Abstract Differential Equations with Infinite Delay*, J. Differential Equations **90** (1991), 357–396.

[11] D. S. Callaway and A. S. Perelson, *HIV-1 Infection and Low Steady State Viral Loads*, Bull. Math. Biol. **64** (2002), 29–64.

[12] R. S. Cantrell, C. Cosner, and W. F. Fagan, *Habitat edges and predator-prey interactions: effects on critical patch size*, Math. Biosci. **175** (2002), 31–55.

[13] Y. Cao, H. I. Freeman, and T. C. Gard, *A mapping method for global asymptotic stability of population interaction models with time delays*, Nonlinear Anal. **34** (1998), 361–389.

[14] T. Caraballo, P. Marin-Rubio, and J. Valero, *Autonomous and non-autonomous attractors for differential equations with delays*, J. Differential Equations **208** (2005), 9–41.

[15] W. Chen and Z. Guan, *Uniform asymptotic stability for perturbed neutral delay differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **291** (2004), 578–595.

[16] W. Chen and X. Lu, *Asymptotic stbility in pertubed delay difference systems*, J. Math. Anal. Appl. **229** (2004), 261–272.

[17] S. K. Choi, N. J. Koo, and Y. H. Goo, *Asymptotic property of nonlinear Volterra difference systems*, Nonlinear Anal. **51** (2002), 321–337.
[18] W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D. C. Health and Company, Boston, 1965.
[19] E. N. Dancer and Z. Zhang, *Dynamics of Lotka-Volterra Competition Systems with Large Interaction*, J. Differential Equations **182** (2002), 470–489.
[20] H. A. EI-Morshedy and S. R. Grace, *Comparison theorems for second order nonlinear difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **306** (2005), 106–121.
[21] A. Fernandes, C. Gutierrez, and R.Rabanal, *Global asymptotic stability for differentiable vector fields*, J. Differential Equations **206** (2004), 470–482.
[22] Y. Fan, L. Wang, and W. Li, *Global behavior of a higher order nonlinear difference equation*, J. Math. Anal. Appl. **299** (2004), 113–126.
[23] H. I. Freeman and X. Yuantong, *Models of competition in the chemostat with instantaneous and delayed nutrient recycling*, J. Math. Biol. **31** (1993), 513–527.
[24] H. I. Freedman and J. W. So, *Global stability and persistence of simple food chains*, Math. Biosci. **76** (1985), 69–86.
[25] B. S. Goh, *Global Stability in Many-Species Systems*, The Amer. Natural. **111** (1977), 135–143.
[26] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publisher, 1992.
[27] M. Gyllenberg, P. Yan, and J. Jiang, *The qualitative behavior of a second-order system with zero diagonal coefficient*, J. Math. Anal. Appl. **291** (2004), 322–340.
[28] J. Haddock and J. Terijeki, *On the location of positive limit sets for functional differential equations with infinite delay*, J. Differential Equations **86** (1990), 1–32.
[29] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, 1967.
[30] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1969.
[31] ———, *Dynamical Systems and Stability*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 39–59.
[32] ———, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer Verlag, 1976.
[33] J. K. Hale and J. Kato, *Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay*, Funkaialaj Ekvacioj, **21** (1978), 11–41.
[34] L. Hatvani, *Annulus arguments in the stability theory for functional differential equations*, Differ. Integral Equ. Appl. **10** (1997), no. 5, 975–1002.
[35] S. B. Hsu, *On Global Stability of a Predator-Prey System*, Math. Biocsi. **39** (1978), 1–10.
[36] W. Hurewicz, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, INC, New York, 1958.
[37] J. Kalas and L. Barakova, *Stability and asymptotic behaviour of a two-dimensional differential system with delay*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 278–300.
[38] F. Kappel and W. Schappacher, *Some Considerations to the Fundamental Theory of Infinte Delay Equations*, J. Differential Equations **37** (1980), 141-183.
[39] Y. Ko, *An Aymptotic Stability and a Uniform Asymptotic Stability for Functional Differential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 535–545.
[40] ———, *The uniform asymptotic stability for functional differential equations with finite delay*, Acta Sci. Math. (Szeged) **66** (2000), 565–577.

[41] ———, *The Instability for delay differential equations*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 4049–4057.
[42] N. N. Krasovskii, *Stability of Motion*, Stanford, 1963.
[43] T. Krisztin and O. Arino, *The Two-Dimensional Attractor of a Differential Equation with State-Dependent Delay*, J. Dynam. Differential Equations **13** (2001), 453–507.
[44] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, 1993.
[45] ———, *Global Stability for Infinite Delay Lotka-Volterra Type Systems*, J. Differential Equations **103** (1993), no. 2, 221–246.
[46] V. Lakshimikantham and S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, vol 1, Academic Press, New York and London, 1969.
[47] V. Lakshmikantham and D. Trigiante, *Theory of Difference Equations*, Academic Press INC, Boston, San Dieago, New York and Tokyo, 1988.
[48] J. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, 1961.
[49] S. Lefschetz, *Stability of Nonlinear Control Systems*, Academic Press, London and New York, 1965.
[50] A. M. Liapunov, *Stability of Motion*, Academic Press, 1966.
[51] T. Lindstrom, *Global stability of a model for competing predators*, Nonlinear Anal. **39** (2000), 793–805.
[52] A. Marin-Sanguino and N. V. Torres, *Modelling, Steady State Analysis and Optimization of the Catalytic Efficiency of the Triosephosphate Isomerase*, Bull. Math. Biol. **64** (2002), 301–326.
[53] R. K. Miller and A. N. Michel, *Ordinary Differential Equations*, Academic Press, 1982.
[54] J. M. Nichols and J. D. Nichols, *Attractor reconstruction for nonlinear systems: a methodological note*, Math. Biosci. **171** (2001), 21–32.
[55] P. W. Nelson and A. S. Perelson, *Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection*, Math. Biosci. **179** (2002), 73–94.
[56] S. Novo, R. Obaya, and A. M. Sanz, *Attractor minimal sets for cooperative and strongly convex delay differential systems*, J. Differential Equations **208** (2005), 86–123.
[57] J. Ortega, V. Planas-Bielsa, and T. S. Ratiu, *Asymptotic and Lyapunov stability of constrained and Poisson equilibria*, J. Differential Equations **214** (2005), 92–127.
[58] N. Ortiz, *Necessary conditions for the neutral problem of Bolza with continuously varying time delay*, J. Math. Anal. Appl. **305** (2005), 513–527.
[59] C. C. Philos and I. K. Purnaras, *Asymptotic Behavior of Solution of Second Order Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Nonlinear Anal. **24** (1995), no. 1, 81–90.
[60] R. Rabah, G. M. Sklyar, and A. V. Rezounenko, *Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space*, J. Differential Equations **214** (2005), 391–428.
[61] S. Ruan, *The Effect of Delays on Stability and Persistence in Plankton Models*, Nonlinear Anal. **24** (1995), no. 5, 575–585.

[62] Y. Saito, T. Hara, and W. Ma, *Harmless delays for permanence and impersistence of a Lotka-Volterra discrete Predator-prey system*, Nonlinear Anal. **50** (2002), 703–715.
[63] H. Sedaghat, *Periodicity and convergence*, J. Math. Anal. Appl. **291** (2004), 31–39.
[64] A. B. Silva and M. A. Teixera, *Global aymptotic stability on Euclidean spaces*, Nonlinear Anal. **50** (2002), 91–114.
[65] S. Tang and L. Chen, *Global Qualitative Analysis for a Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Delay*, J. Math. Anal. Appl. **266** (2002), 401–419.
[66] H. Tian, *The exponential asymptotic stability of singurarly perturbed delay differential equations with a bounded lag*, J. Math. Anal. Appl. **270** (2002), 143–149.
[67] A. Tsoularis and J. Wallace, *Analysis of logistic growth models*, Math. Biosci. **179** (2002), 21–55.
[68] E. Venturino, *The Effects of Diseases on Competing Species*, Math. Biosci. **174** (2001), 111–131.
[69] V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations*, Dover, New York, 1959.
[70] J. Walker, *Dynamical Systems and Evolution Equation*, Plenum, New York, 1980.
[71] Mei-Hui Wang and M. Kot, *Speeds of invasion in a model with strong or weak Allee effects*, Math. Biosci. **171** (2001), 83–97.
[72] Y. Xiao and L. Chen, *Modeling and analysis of a predator-prey model with disease in the prey*, Math. Biosci. **171** (2001), 59–82.
[73] B. Xu, *Further Results on the Stability of Linear Systems with Multiple Delays*, J. Math. Anal. Appl. **267** (2002), 20–28.
[74] R. Xu, M. J. Chaplain, and F. A. Davidson, *Permanence and periodicity of a delayed ratio-dependent predator-prey model with stage structure*, J. Math. Anal. Appl. **303** (2005), 602–621.
[75] R. Xu, F. A. Davidson, and M. A. J. Chaplain, *Persistence and stability for a two-species ratio-dependent predator-prey system with distributed time delay*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 256–277.
[76] T. Yoshizawa, *Stability Theory By Liapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, 1966.
[77] J. Zhang, L. Chen, and X. D. Chen, *Persistence and global stability for two-species nonautonomous competition Lotka-Volterra patch-system with time delay*, Nonlinear Anal. **37** (1999), 1019–1028.
[78] X. Zhang, L. Chen, and A. U. Neuman, *The stage-structured predator-prey model and optimal harvesting policy*, Math. Biosci. **168** (2000), 201–210.

제주대학교 사범대학 수학교육과
제주도 제주시 아라1동 산 1번지
690-756
E-mail: yheeko@cheju.ac.kr