

## 교량 말뚝기초의 캡강성을 고려한 비선형 3차원 해석

### Nonlinear Three-dimensional Analysis of Piled Piers Considering Coupled Cap Rigidities

원 진 오<sup>1</sup> Won, Jin-Oh

정 상 섬<sup>2</sup> Jeong, Sang-Seom

#### Abstract

A coupled three-dimensional pile group analysis method was developed by considering complex behavior of sub-structures (pile-soil-cap) which included soil nonlinearity and the behavior of super-structure (pier). As an intermediate analysis method between *FBPier 3.0* and *Group 6.0*, it took advantages of each method. Among the components of a pile group, individual piles were modeled with stiffness matrices of pile heads and soils with nonlinear load-transfer curves (t-z, q-z and p-y curves). A pile cap was modeled with modified four-node flat shell elements and a pier with three-dimensional beam element, so that a unified analysis could be possible. A nonlinear analysis method was proposed in this study with a mixed incremental and iteration techniques. The proposed method for a pile group subjected to axial and lateral loads was compared with other analytical methods (i.e., *Group 6.0* and *FBPier 3.0*). It was found that the proposed method could predict the complex behavior of a pile group well, even though piles were modelled simply in this study by using pile head stiffness matrices which were different from the method introduced in *FBPier 3.0*.

#### 요 지

본 연구에서는 지반의 비선형을 고려한 하부구조(말뚝-지반-말뚝캡)의 복잡한 거동과 상부 피어구조와 연계된 상·하부 일체화 해석을 수행할 수 있는 3차원 해석기법을 개발하였다. *FBPier 3.0*과 *Group 6.0*의 중간단계에 해당하는 해석기법으로 각 해석기법의 장점을 취하고 단점을 보완하였다. 군말뚝기초 중 말뚝은 말뚝두부 강성행렬을 이용하여 모델링하였으며, 지반은 비선형 하중전이곡선(t-z, q-z, p-y곡선)으로 나타내었다. 말뚝캡은 6개의 자유도를 갖는 개선된 4절점 평면셸(Flat shell)요소로, 교각(피어)은 3차원 보(Beam)요소로 모델링 하여 상·하부 일체해석이 가능하게 하였다. 말뚝두부 강성행렬의 하중크기에 따른 비선형성을 고려하기 위하여 점중하중-활선계수법을 제안하였다. 기존의 비선형 해석기법과의 비교·분석 결과, 본 해석기법이 말뚝을 *FBPier 3.0*과 달리 말뚝두부 강성행렬을 이용하여 모델링하였어도 말뚝두부 및 교각 상단에서의 변위를 비교적 정확히 산정 가능하였다.

**Keywords** : Flat shell element, Pile group, Pile head stiffness, Soil nonlinearity, Three-dimensional finite element analyses, Unified analysis

1 정희원, 연세대학교 공과대학 토목공학과 박사과정 (Member, Graduate Student, Dept. of Civil Engrg., Yonsei Univ., wjo20@yonsei.ac.kr)

2 정희원, 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수 (Member, Prof., Dept. of Civil Engrg., Yonsei Univ.)

# 1. 서론

상하부 구조물의 일체해석은 상부구조의 설계 뿐만 아니라 말뚝기초의 설계에도 중요한 이슈가 되고 있다. 현재까지 단독말뚝에서 말뚝-지반 상호작용과 군말뚝 내의 말뚝-지반-말뚝 상호작용에 관하여는 많은 연구가 이루어져 왔으나, 말뚝-캡 상호작용, 더 나아가 상부구조물과의 일체화된 해석에 관하여는 그 중요도에 비하여 상대적으로 국내·외 연구가 미진한 편이다. 이는 말뚝-캡 상호작용과 상부구조와의 일체화된 해석을 위해서는 복잡한 구조해석기법이 필요하기 때문이다. 현재까지 말뚝-캡 상호작용과 말뚝-캡-상부구조와의 상호작용은 지반공학 보다는 상부 구조해석에서 다루어져 왔으며, 지반공학에서는 상부 구조해석을 통해 산정된 개개 말뚝두부 하중을 이용하여 지지력 및 변위를 검토하는 것이 일반적이었다. 그러나 이 경우 정밀한 해석기법을 통하여 개개 말뚝해석을 수행한다 할지라도 말뚝두부에 작용하는 하중이 말뚝거동을 정확히 대변하지 못하는 가운데 산정된 값이므로 그 결과는 실제와는 상당한 차이가 발생할 수 있다. 따라서 군말뚝 설계시 말뚝-캡 상호작용을 고려한 설계가 되어야 하며, 점차 상부구조와 하부 말뚝기초를 일체화한 해석기법의 필요성이 증대되고 있다.

국내의 경우 교량기초 설계시 도로교설계기준 해설(하부구조편)(2001)에 제안된 탄성변위법에 의하여 말뚝-캡 상호작용을 고려하고 있다. 그러나 이 방법은 말뚝기초의 비선형 거동을 나타내지 못하는 단점이 있

며, 현재 상부지반의 N치만을 이용하여 설계되고 있는 실정이다. 특히 탄성변위법에 의해 말뚝 두부하중을 산정하는 경우, 비선형 거동특성을 나타내는 연약지반상에 설치된 군말뚝기초는 불안전측 설계로 이루어질 가능성이 많다.

현재 강성법(stiffness method)에 기초하여 말뚝-캡 상호작용을 고려하면서 개개 말뚝의 비선형 거동특성과 좁은 간격의 군말뚝에서 나타나는 말뚝-지반-말뚝 상호작용까지 고려할 수 있는 해석기법으로 *Group 6.0*(Reese 등, 2004) 프로그램이 있다. 그러나 이 프로그램은 강성법에 근거한 Reese 등(1970)의 경사말뚝기초 이론에 의하여 말뚝-캡 상호작용을 나타내므로 말뚝-캡의 휨강성을 고려할 수 없고 무엇보다 상부구조와의 일체해석을 수행할 수 없는 것이 단점으로 되어왔다. 그 결과 이를 보완할 수 있는 3차원 유한요소 해석기법인 *FBPier 3.0*(Hoit 등 1996)이 개발되었다.

*FBPier 3.0*은 군말뚝기초의 거동을 고려한 상부 교각의 설계를 위하여, 1991년 University of Florida & FDOT에서 개발되었으며, 그림 1과 같이 교량기초를 여러 개의 서로 다른 요소로 모델링한다. 교각은 3차원 보요소로, 말뚝캡은 평면셸요소(Flat shell)로, 개개 말뚝은 3차원 절편요소(discrete element)로, 그리고 지반은 비선형 하중전이곡선으로 모델링하여 말뚝-캡의 강성을 고려할 뿐만 아니라 상·하부구조물의 일체해석도 가능한 장점이 있다. 그러나 이 프로그램은 말뚝과 지반 요소까지 3차원요소를 적용하여 일체해석을 수행하므로, 구조해석 측면에 초점이 맞추어진 프로그램이라 할 수 있다.

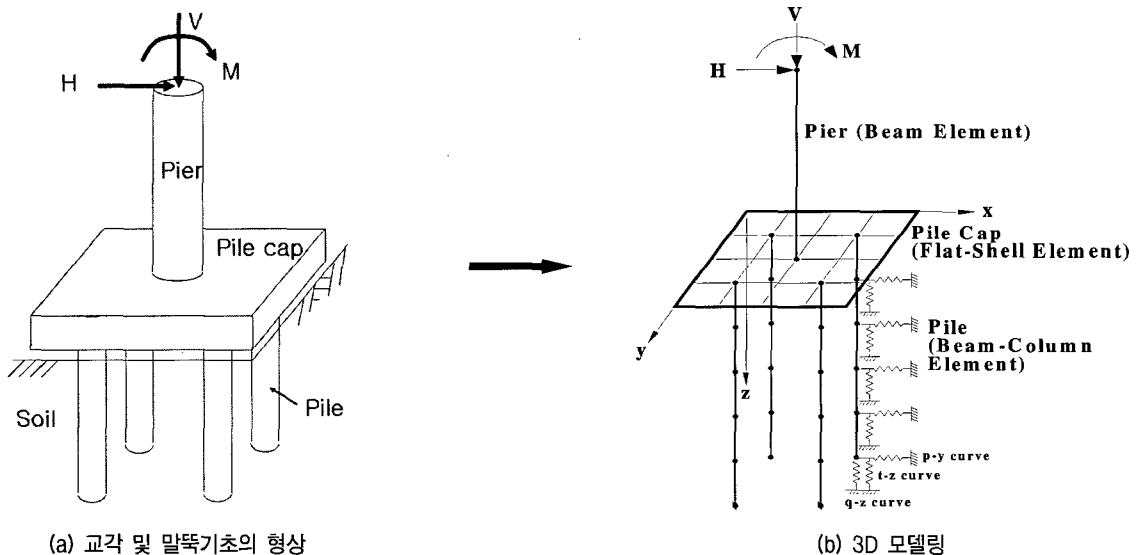


그림 1. 교각 및 말뚝기초의 모델링

따라서 구조해석적인 측면에서 장점이 있지만 지반분야에서 사용하기에는 몇 가지 어려움이 있다. 예를 들어 기존의 말뚝해석이 축방향 하중을 받는 말뚝해석(1차원)과 횡방향 하중을 받는 말뚝해석(2차원)으로 비교적 간단하게 모델링하여 왔던 것에 비해서 말뚝기초를 3차원으로 모델링함에 따라 말뚝과 지반스프링 절점을 3차원 좌표값으로 입력하여야 하며, 개개 말뚝도 3차원 단면물성치를 입력하여야 하는 어려움이 있다.

따라서 본 연구에서는 기존 해석기법의 장점인 말뚝기초 해석의 간편함을 유지하면서 말뚝캡의 휨강성을 고려하고 상부구조물과의 일체해석이 가능한 해석기법(YSGroup)을 개발하였으며, 이는 기존의 해석기법들과는 차별화된 방법이라 할 수 있다. 본 논문에서는 Reese 등(1970)에 의해 제안된 말뚝두부 강성행렬을 이용하여 3차원 보요소로 확장하는 방법과 비선형 알고리즘, 그리고 4절점 평면셀요소에 초점을 맞추어 기술하였다. 본 해석기법의 타당성 검증에 위하여 상용 프로그램인 Group 6.0과 FBPIer 3.0과 비교·분석을 수행하였다.

## 2. 교각-말뚝기초의 일체해석기법

그림 1과 같이 교각과 말뚝기초의 일체해석을 위해서는 각각의 요소를 적합한 모델을 사용하여 모델링하는 것이 필요하다. 본 해석기법에서는 말뚝을 보-기둥요소로, 지반을 비선형의 하중전이곡선으로 모델링하였으며, 말뚝-지반-말뚝 상호작용은 횡방향 하중전이곡선

(p-y)에서 감소계수(p-multiplier)를 적용하여 고려하였다. 상부 교각은 3차원 보요소로, 말뚝캡은 절점당 6개의 자유도를 갖는 4절점 평면셀(Flat shell)요소로 모델링하였다.

### 2.1 말뚝의 모델링

본 해석기법에서 단독말뚝은 보-기둥(beam-column) 요소를 이용하여 모델링하였다(Jeong 등, 2001, 2003; 원진오 등 2004). 말뚝을 2차원의 보-기둥 요소로 모델링하는 경우, 3차원 절편요소에 비하여 말뚝의 모델링이 상대적으로 쉽고 간편하면서도 말뚝의 3차원 거동을 적절히 나타낼 수 있으므로 대부분의 기존 균말뚝 해석기법이 2차원의 보-기둥 요소를 이용하여 균말뚝을 모델링하고 있다(Reese 등, 2000; Chow, 1987; O'Neill 등, 1977; 정상섭 등 2002).

#### 2.1.1 말뚝두부의 거동

말뚝캡의 거동은 그림 1과 같이 균말뚝의 구조상 말뚝두부에서의 거동특성에만 영향을 받는다. 따라서 말뚝두부의 이동과 그때 말뚝두부에서 발생하는 반력과 관계를 규정하는 것이 중요하다. 말뚝두부의 변위 및 회전에 관련하여 그림 2와 같이 4가지의 주요모드가 제안되었으며(Reese 등, 1970), 4가지 주요모드를 이용하여 단독말뚝의 3차원 거동을 대부분 나타낼 수 있다.

모드 I은 상부구조에 의해 회전이 구속된 채 말뚝두

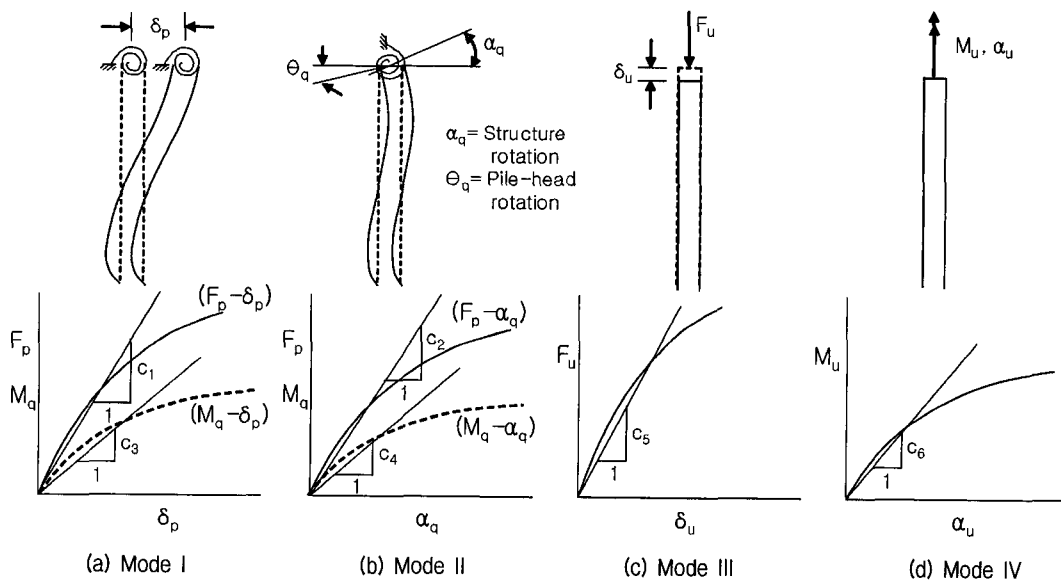


그림 2. 말뚝두부의 하중-변위 관계(Reese 등, 1970)

부가 수평이동하는 경우이며, 모드 II는 수평변위가 구속된 채 상부구조물이 회전하는 경우이다. 모드 III은 말뚝두부의 축방향 이동을 나타내며, IV은 말뚝두부에서 축방향의 회전을 나타낸다.

본 해석기법에서는 단독말뚝을 보-기둥 요소로 모델링하여 모드 I과 모드 II의 하중-변위 관계는 횡하중을 받는 단독말뚝 해석방법(Matlock 등, 1962; Ashour 등, 2003)을 통하여, 모드 III의 하중-변위 관계는 축하중을 받는 단독말뚝 해석방법(Coyle 등, 1966; Walsh 등, 1995)을 통하여 산정하였으며, 모드 IV는 고려하지 않았다. 주요모드 관계곡선은 일반적으로 그림 3과 같이 비선형 형태를 나타낸다. 따라서 본 연구에서는 하중-변위관계 곡선의 기울기를 나타내는 말뚝의 스프링정수( $c_1 \sim c_6$ )는 변위 또는 회전각에 따라 그 값이 변하는 비선형 해석기법을 고려하였다.

### 2.1.2 비선형 알고리즘

말뚝두부의 비선형 하중-변위관계를 고려하는 방법으로 O'Neill 등(1977)은 그림 3과 같은 증분하중법(purely incremental solution)을 사용하였다. 그러나 이 방법은 그림 3에 나타난 바와 같이 각 하중단계에서 접선기울기,  $(k_i)_j$ 를 사용함에 따라 실제 하중-변위 곡선보다 더 큰 스프링정수가 산정되며 해석결과 변위는 감소되는 경향이 나타난다. 따라서 곡선의 수렴을 위하여 본 연구에서는 그림 4와 같이 각 하중단계에서 반복계산법 중의 하나인 할선계수법(secant modulus method)을 적용하였다. 이러한 증분하중-할선계수법을 적용할 경우 그림 4에 나타난 바와 같이 하중  $P_2$ 에 대한 변위가  $u_2$ 에서 곡선 위의 점인  $u'_2$ 로 이동하여 실제에 근접한 변위가 산정되게 된다.

본 해석시 증분하중-할선계수법을 적용하는 과정은 다음과 같다. 개개 말뚝당 그림 5와 같은 하중-변위 곡선이 총 10개(축방향 1개, 횡방향 8개, 비틀림방향 1개) 산정되며, 그 중의 하나에서  $i$ 번째 하중 증분일 때의 경우를 그림 5에 나타내었다.

총 외부하중을  $N$ 단계로 나누어 해석을 수행하였으며, 각 하중단계에서 축방향 스프링정수는 식 (1)과 같이  $j=1$ 인 경우는 접선기울기를,  $j \geq 2$ 인 경우에는 할선계수를 산정하였다.

$$(k_i)_j = \left( \frac{df(u)}{du} \right)_{u=(u)_{i-1}}, \quad j=1 \quad (1a)$$

$$(k_i)_j = \frac{f((u)_j) - f((u)_{i-1})}{(u)_j - (u)_{i-1}}, \quad j \geq 2 \quad (1b)$$

$$(u)_j = (u)_{i-1} + \Delta u_j \quad (1c)$$

여기서  $(k_i)_j$ 는  $i$ 번째 하중단계에서  $j$ 번째 반복계산시 스프링정수이며  $(u)_{i-1}$ 은 이전 하중단계에서의 최종 누적변위이며  $(u)_j$ 은 현재  $i$ 번째 하중단계에서  $j$ 번째 반복계산시의 누적변위이다. 각 하중단계에서 구조해석을 통해 산정된 변위는  $\Delta u_j$ 이며 이를 통해 누적변위  $(u)_j$ 를 산정하였다.

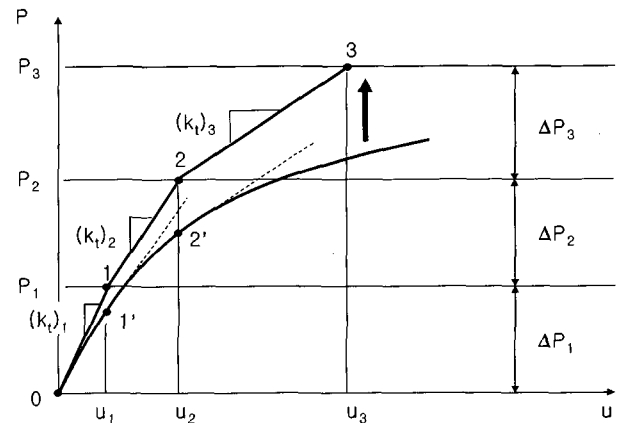


그림 3. 증분하중법의 개념

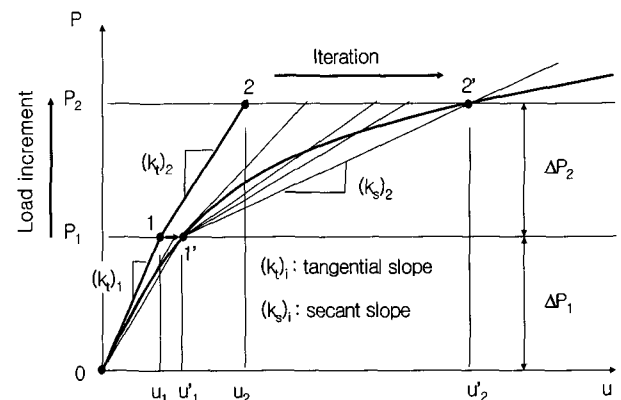


그림 4. 증분하중-할선계수법의 개념

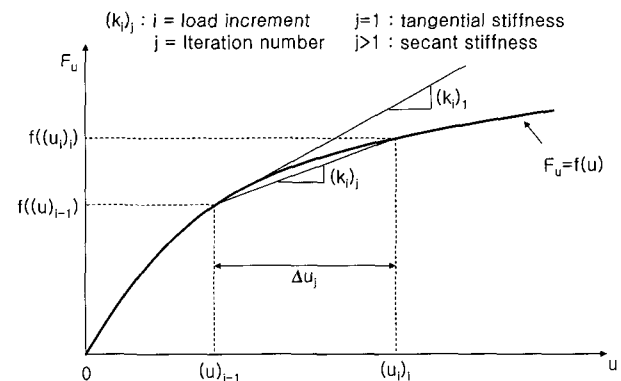


그림 5. 말뚝의 스프링정수 산정방법

i번째 하중단계에서  $\Delta u_j - \Delta u_{j-1} < \epsilon$ 을 만족하면 i번째 하중단계의 최종 누적변위 ( $u$ )를 산정하고 다음 하중 단계로 넘어가며 이와 같은 과정을 총 N번 반복하였다. 수치해석시 접선기울기  $\langle df(u)/du \rangle$  및 하중  $\langle f(u) \rangle$ 는 Cubic spline 보간법을 이용하여 산정하였다(Allen 등, 1998).

### 2.1.3 말뚝의 강성행렬

말뚝의 스프링정수( $c_1 \sim c_6$ )는 각 하중단계와 각 반복 계산(iteration) 내에서는 선형이라는 가정 하에 중첩의 원리가 적용될 수 있다. 말뚝두부의 모드 I에서 모드 IV 까지 각각의 거동에 관한 하중-변위 관계를 연립하여 행렬식으로 나타내면 식 (2)와 같으며, 간단히 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_v \\ \delta_w \\ \alpha_u \\ \alpha_v \\ \alpha_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$S_i \delta_i = F_i \quad (3)$$

여기서,  $S_i$ 는 말뚝두부 강성행렬이며,  $\delta_i$ 는 말뚝두부의 변위(또는 회전각), 그리고  $F_i$ 는 말뚝두부의 하중(또는 모멘트)을 나타낸다. 말뚝두부 강성행렬 내의 각 요소인  $c_1 \sim c_6$ 은 각 하중단계와 각 반복계산에서 그 값이 변하게 된다. 개개 말뚝은 하나의 거동을 나타낼 수 있는 보요소로서 기능을 수행하여야 하므로, 식 (2)의 말뚝두부 절점에서의 평형방정식은 절점 1과 2로 이루어진 보요소의 평형방정식으로 확장되었으며, 이를 통하여 상부 구조 해석시 말뚝의 거동을 나타내었다.

## 2.2 말뚝캡의 모델링

상부구조와의 일체화된 해석을 위해서는 말뚝캡을 말뚝과 교각과의 연결이 가능한 요소로 모델링하는 것이 필요하다. 기존에 말뚝캡을 평판(Plate)요소로 모델링한 연구(Clancy 등, 1993; Zhang 등, 2000; Kitiyodom 등, 2002)가 있었으나, 이 경우 평판요소는 수평방향의 자유도가 없어 수평방향의 이동을 고려할 수 없으며, 또한 절점당 6개의 자유도를 갖는 보요소와의 결합에 있어서도 용이하지 못한 단점이 있었다. 따라서 본 연구에서는 그림 6과 같이 평판(Plate)요소와 평면응력(Membrane)요소를 결합하여 절점당 6개의 자유도를 갖는 평면셀요

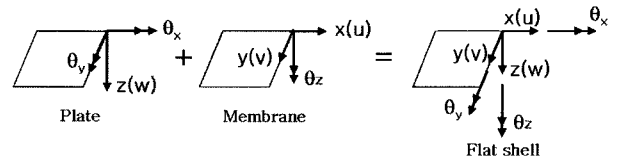


그림 6. 면내회전자유도를 갖는 평면셀(Flat-shell) 요소

소를 이용하여 말뚝캡을 모델링하였다. 일반적인 평면셀요소는 절점당 5개의 자유도를 가지나, 본 연구에서는 평면응력요소에서 회전자유도를 포함한 평면응력요소를 결합하여 절점당 6개의 자유도를 갖는 평면셀요소(이완훈, 1995)를 적용하여 상부 교각기초나 말뚝과의 접합이 용이하도록 하였다. 평면셀요소 개발을 위한 평판요소로 Mindlin 평판요소를 사용하였는데, 이는 휨 변형 외에 전단변형까지 고려하는 요소로 말뚝캡과 같이 평판의 두께가 두꺼운 평판에 적합한 요소이다.

평면셀요소는 그림 6에 나타난 바와 같이 모든 절점이 한 평면에 있으며 평판요소의 자유도와 평면응력요소의 자유도가 서로 중첩되지 않고 구분되어 있다. 따라서 평면셀의 강성행렬( $K_{fs}^e$ )은 식 (4)와 같이 평판(plate) 요소의 강성행렬( $K_p^e$ )과 평면응력(membrane)요소의 강성행렬( $K_m^e$ )의 독립적인 결합에 의해서 구성된다.

$$K_{fs}^e = \begin{bmatrix} K_p^e & 0 \\ 0 & K_m^e \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 2.2.1 Mindlin 평판(Plate) 요소

일반적인 Mindlin 평판요소는 두께가 두꺼운 깊은 평판(Deep plate)에 적합하며, 두께가 얇아질 경우 전단강성이 과대평가되어 전단잠김(shear locking) 현상이 발생할 수 있다. 이를 해결하기 위하여 본 연구에서는 선택적감차적분(selectively reduced integration), 대체변형률장(substitute strain field)의 이용, 비적합변위모드형(non-conforming displacement mode)의 추가 등의 세가지 기법이 혼용된 4절점 평판요소를 적용하였다.

변위장은 등매개변수(isoparametric) 4절점 요소 변위장에 요소의 휨거동을 개선하기 위하여 회전변위성분에 두개의 비적합모드( $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ )를 추가하였다.

$$\begin{aligned} w &= \langle N \rangle w \\ \theta_x &= \langle N \rangle \{ \theta_x \} + \langle \bar{N} \rangle \{ \bar{\theta}_x \} \\ \theta_y &= \langle N \rangle \{ \theta_y \} + \langle \bar{N} \rangle \{ \bar{\theta}_y \} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $\langle N \rangle$ 은 기본 형상함수이며  $\langle \bar{N} \rangle$ 는 비적합 모드이고,  $\bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$ 는 비적합변위이다. 변위-변형률 관계는 등매개변수요소의 변위-변형률 관계식에 비적합모드의 추가에 의하여 비적합변위와 변형률의 관계를 나타내는  $\bar{B}_b, \bar{B}_s$ 가 추가되게 된다. 변위-변형률 관계행렬을 부분행렬로 나누어 간단히 표기하면 식 (6)과 같다.

$$\{e\} = \begin{bmatrix} B_b & \bar{B}_b \\ B_s & \bar{B}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

강성행렬은 비적합모드의 추가에 의하여 다음 식과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cn} \\ K_{cn}^T & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$K_{cc} = \int_V B_b^T D_b B_b dV + \int_V B_s^T D_s B_s dV \quad (8a)$$

$$K_{cn} = \int_V B_b^T D_b \bar{B}_b^* dV + \int_V B_s^T D_s \bar{B}_s^* dV \quad (8b)$$

$$K_{nn} = \int_V \bar{B}_b^{*T} D_b \bar{B}_b^* dV + \int_V \bar{B}_s^{*T} D_s \bar{B}_s^* dV \quad (8c)$$

식 (7)은 다시 정적응축(static condensation)으로 비적합변위를 제거하면 식 (9)와 같이 평판요소의 강성행렬,  $K_p^e$ 을 얻을 수 있다.

$$K_p^e = K_{cc} - K_{cn} K_{nn}^{-1} K_{cn}^T \quad (9)$$

### 2.2.2 평면응력(Membrane) 요소

일반적인 평면응력(Membrane)요소는 절점당 2개의 직선변위자유도(x, y)를 갖지만 회전자유도( $\theta_z$ )를 추가하면 요소의 거동이 크게 향상될 뿐 아니라, 평판요소와 결합되었을 때 절점당 총 6개의 자유도를 가지므로 보(Beam)요소와 같이 회전자유도가 있는 요소와의 결합이 용이하다. 평면응력요소의 변위장은 식 (10)과 같이 4절점요소의 기본형상함수  $\langle N \rangle$ 과 Allman의 회전자유도 관련 형상함수  $\langle C \rangle$ ,  $\langle S \rangle$ 와 이에 각각 추가된 비적합모드  $\langle \bar{N} \rangle$ ,  $\langle \bar{C} \rangle$ ,  $\langle \bar{S} \rangle$ 에 의하여 구성된다. 여기서  $\{\bar{u}\}$ ,  $\{\bar{v}\}$ ,  $\{\bar{\theta}_z\}$ 는 비적합변위이다.

$$\begin{aligned} u &= \langle N \rangle \{u\} + \langle C \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{u}\} + \langle \bar{C} \rangle \{\bar{\theta}_z\} \\ v &= \langle N \rangle \{v\} + \langle S \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{v}\} + \langle \bar{S} \rangle \{\bar{\theta}_z\} \\ \theta_z &= \langle N \rangle \{\theta_z\} \end{aligned} \quad (10)$$

하중-변위 방정식은 다음의 혼합형태(mixed formulation)의 식으로 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{K} & h^T \\ h & -\gamma \mathcal{W} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\theta_z\} \\ \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \\ \{\bar{\theta}_z\} \\ \tau_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_{\theta_z}\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$h = \int_V \begin{bmatrix} b & g & \bar{b} & \bar{g} \end{bmatrix}^T dV, \quad \gamma = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

식 (11)에서  $\bar{K}$ 는 다음 식 (13)과 같으며  $\bar{K}$ 의 부분행렬들은 식 (14)와 같다.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{cc} & \bar{K}_{cn} \\ \bar{K}_{cn}^T & \bar{K}_{nn} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{K}_{cc} = \int_V \begin{bmatrix} B & G^* \end{bmatrix}^T D \begin{bmatrix} B & G^* \end{bmatrix} dV \quad (14a)$$

$$\bar{K}_{cn} = \int_V \begin{bmatrix} B & G^* \end{bmatrix}^T D \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{G}^* \end{bmatrix} dV \quad (14b)$$

$$\bar{K}_{nn} = \int_V \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{G}^* \end{bmatrix}^T D \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{G}^* \end{bmatrix} dV \quad (14c)$$

여기서  $[B]$ ,  $[G]$ ,  $[b]$ ,  $[g]$ 는 적합변위와 변형률 사이의 관계를,  $[\bar{B}]$ ,  $[\bar{G}]$ ,  $[\bar{b}]$ ,  $[\bar{g}]$ 는 비적합변위와 변형률 사이의 관계를 나타내는 행렬이다. 최종적인 평면응력요소의 강성행렬,  $K_m^e$ 는 식 (11)에서 비적합변위  $\{\bar{u}\}$ ,  $\{\bar{v}\}$ ,  $\{\bar{\theta}_z\}$ 와 응력  $\tau_0$ 를 정적응축(static condensation)하므로 산정된다.

$$K_m^e = \bar{K} + \frac{1}{\gamma V} h h^T \quad (15)$$

### 2.3 해석 알고리즘

본 연구에서는 상기 말뚝두부 강성행렬(식 (2), 식 (4))과 비선형해석 알고리즘(식 (1))을 통합하여 상하부일체 해석기법을 개발하였으며, 그 흐름도는 다음과 같다.

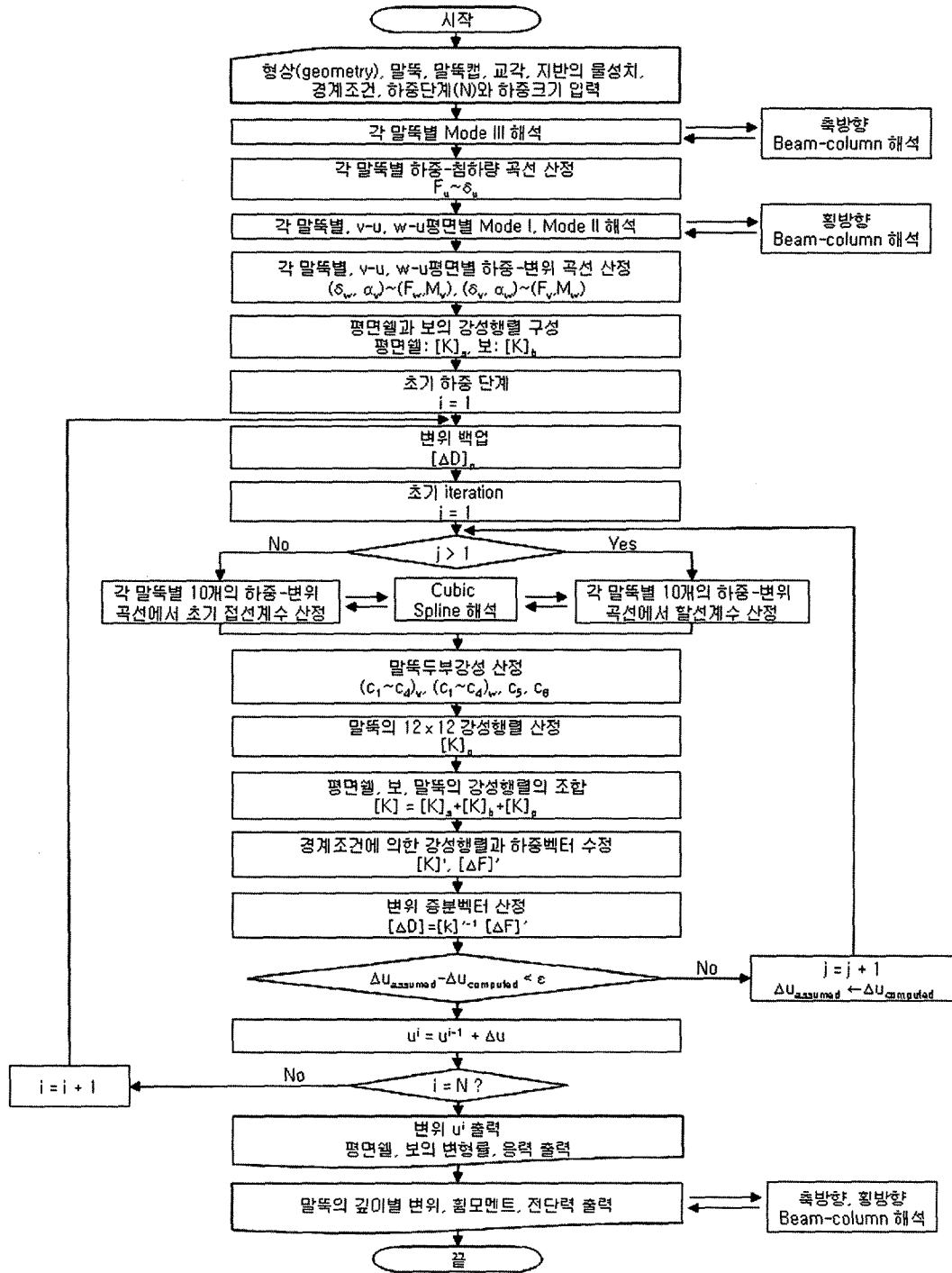


그림 7. 본 해석기법의 흐름도

### 3. 해석기법의 타당성 검증

#### 3.1 비선형 해석기법의 비교·검토

그림 1과 같이 모델링한 교각기초 상단에 축하중만이 작용하는 경우를 대상으로 각각의 비선형 해석기법들을 적용하여 해석결과를 비교, 검토하였다. 그림 8은 하

중단계(N)를 4개로 나눈 경우로 한정하여 각각 충분한 증분과 증분하중-할선계수법 적용시 산정된 말뚝의 스프링정수 중 축방향 스프링정수( $c_3$ )를 말뚝두부변위에 따라 도시한 그림이다. 그림 8에서 할선(secant)으로 표시된 것은 하중단계(N) 1인 할선계수법에 의한 결과이다. 증분하중-할선계수법(Inc.-sec.)은 하중단계가 변할 때마다 축방향 스프링정수( $c_3$ )는 급격히 감소하였으며,

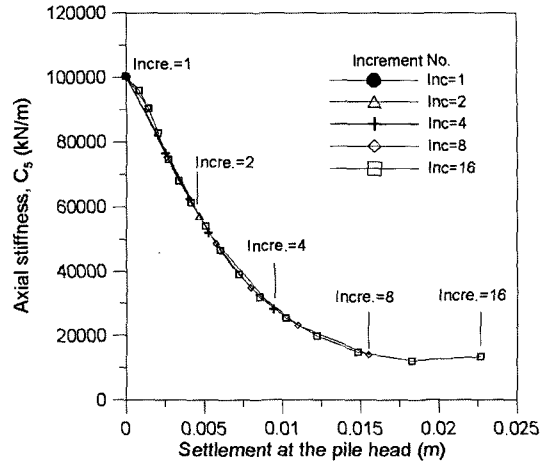
이는 각 하중단계 중 첫 번째 반복계산(iteration)시 접선 기울기가 산정되었기 때문이다. 증분하중-할선계수법은 각 하중단계에서 수렴할 때까지 반복계산 되었으나, 증분하중법은 각 하중단계에서 첫 번째 접선기울기만이 산정됨을 알 수 있었다.

하중단계를 1에서 16단계로 증가시켜 매번 균말뚝 해석을 수행하였을 때, 말뚝두부에서 산정된 축방향 스프링정수( $c_s$ )의 변화를 그림 9에 나타내었다. 그림 9의 (a)와 (b)는 각각 증분하중법과 증분하중-할선계수법을 적용한 결과값을 나타낸다.

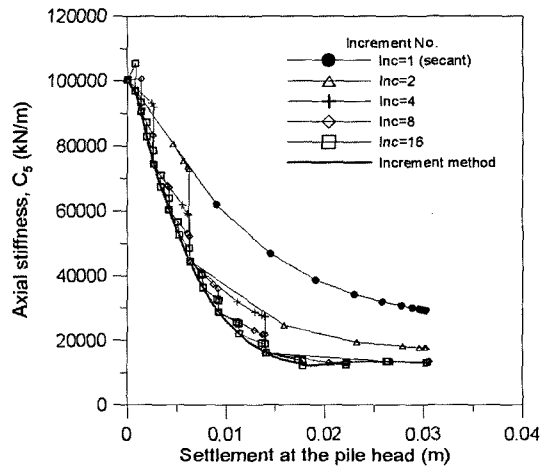
증분하중법은 각 하중단계에서 접선기울기만을 고려하기 때문에 그림 9(a)에 나타난 바와 같이 축방향 스프링정수( $c_s$ )는 동일한 말뚝두부변위에서 같은 값이 산정되었다. 그림 9(a)에서 각 하중단계표시는 마지막 하중단계에 적용된 접선기울기 및 그에 해당하는 침하량을 나타낸다. 본 연구결과 증분하중법을 적용할 경우 하중단계(N)를 적게 나눌수록 말뚝두부변위가 현저히 감소됨을 알 수 있었다. 반면 그림 9(b)와 같이 증분하중-할선계수법을 적용한 경우 하중단계와 무관하게 0.03m의 동일한 침하량이 산정되었다. 그림 9(b)의 굵은 실선은 하중단계(N)를 총 16개로 나눈 증분하중법을 나타내며 하중단계가 많은 경우 증분하중법과 증분하중-할선계수법이 서로 유사한 스프링정수를 산정함을 알 수 있었다.

그림 10은 축하중을 받는 균말뚝 해석 결과 산정된 교각 하단부 A지점에서의 하중-침하량 곡선을 나타낸다. 증분하중법 적용시 하중단계가 많을수록 동일한 축하중 작용시 상대적으로 큰 침하량이 산정되었다. 이를 통해 증분하중법 사용시 하중단계(N)를 많게 하여 하중

증분량을 줄이는 것이 중요함을 알 수 있었다. 반면 증분하중-할선계수법 적용시는 하중단계(N)와 관계없이



(a) 증분하중법



(b) 증분하중-할선계수법

그림 9. 말뚝두부에서의 축방향 스프링정수( $c_s$ )의 변화

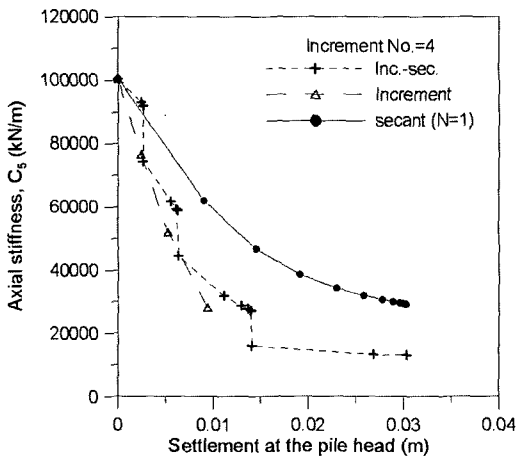


그림 8. 비선형 해석기법간의 축방향강성 비교

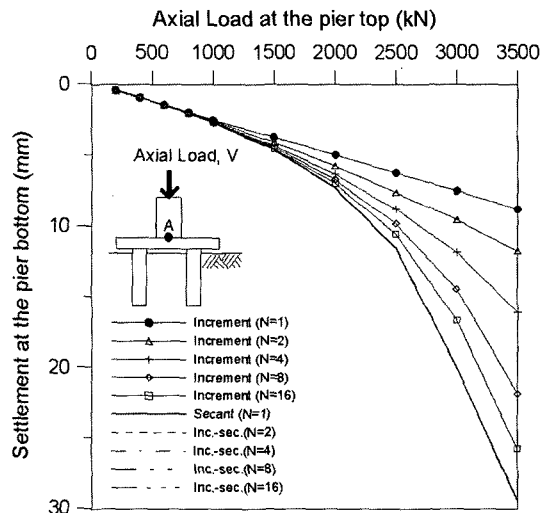


그림 10. 교각 하단의 하중-침하량 곡선



동일한 하중-침하량 곡선이 산정되었다. 증분하중-할선 계수법은 내부 계산과정에서는 그림 9(b)와 같이 하중 단계가 바뀔 경우 서로 다른 스프링정수( $c_1 \sim c_6$ )가 산정되었으나 수렴 과정에서 모두 동일한 말뚝두부변위가 산정되었으므로, 결과적으로는 동일한 하중-침하량 곡선이 산정되었다. 따라서 증분하중-할선계수법 적용시 하중단계(N)가 1인 할선계수법을 적용해도 동일한 값이 산정됨을 알 수 있었다.

### 3.2 기존 해석기법과의 비교

그림 11의 군말뚝 기초를 대상으로 본 해석기법과 기존 해석기법들(FBPier 3.0, Group 6.0)과 비교, 분석을 수행하였다. 말뚝은 사질토 지반에 10m 항타시공된 PHC 말뚝 4본으로 이루어져 있으며, 말뚝간 간격은 6D이므로 감소계수(p-multiplier)는 고려하지 않았다. 지반은 N치가 20인 사질토지반을 대상으로 하였으며, 축방향 하중전이곡선(t-z, q-z곡선)은 McVay 등(1989)식을, 횡방향 하중전이곡선(p-y곡선)은 API모델(O'Neill 등, 1983)을 사용하였다. 군말뚝과 교각의 제원 및 물성치는 표 1과 같으며, 지반의 물성치는 표 2와 같다. 표 2에서 주면마찰력( $\tau_f$ )과 선단지지력( $q_u$ )은 Meyerhof에 의해 제

안된 식  $\tau_f = 2N(\text{kPa})$ 와  $Q_f = 400NA(\text{kN})$ 을 통해 산정하였다. 선단부 거동에 영향을 미치는 지반의 전단계수  $G_i$ 는 지반종류, 하중이력 등에 영향을 받으며, 현장재하시험(CPT, DMT, SPT)이나 지반의 탄성계수( $E$ )를 이용하여 산정할 수 있으나, 본 해석에서는 Zhang 등(1999)의 해석에 사용된 지반의 전단계수를 적용하였다. 표 3에서 횡방향 하중전이곡선(p-y곡선)에 사용되는 내부마찰각은 N치를 이용한 Dunham식과 Peck식의 평균값을 적용하였으며, p-y곡선 초기기울기(k)는 LPILE 프로그램에서 제안한 값을 적용하였다. 해석시 적용된 t-z, q-z, p-y 곡선은 그림 12와 같다.

교각 상단에 축하중을 작용시킨 경우 해석결과를

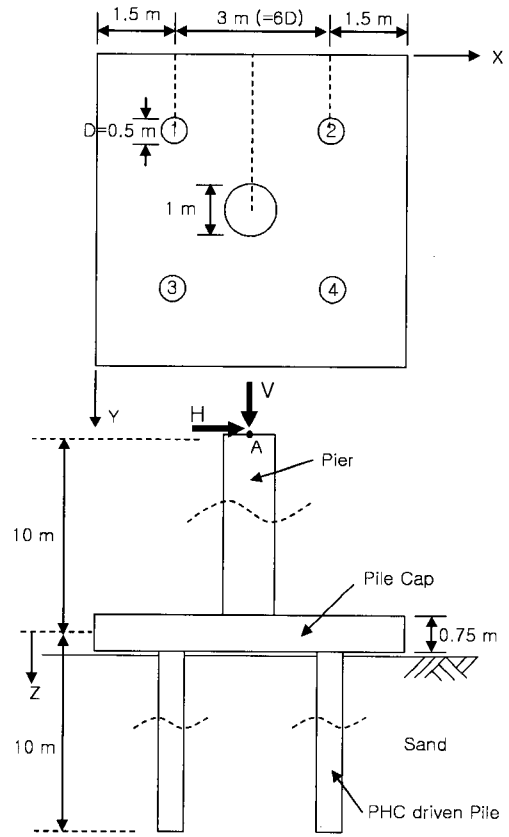


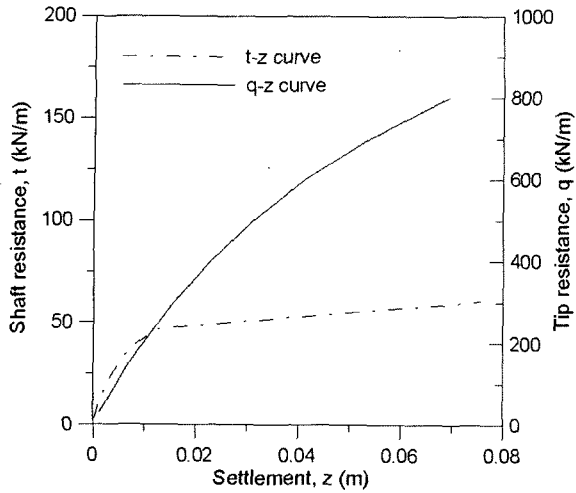
그림 11. 해석대상 군말뚝기초의 모식도

표 1. 말뚝-캡-교각의 물성

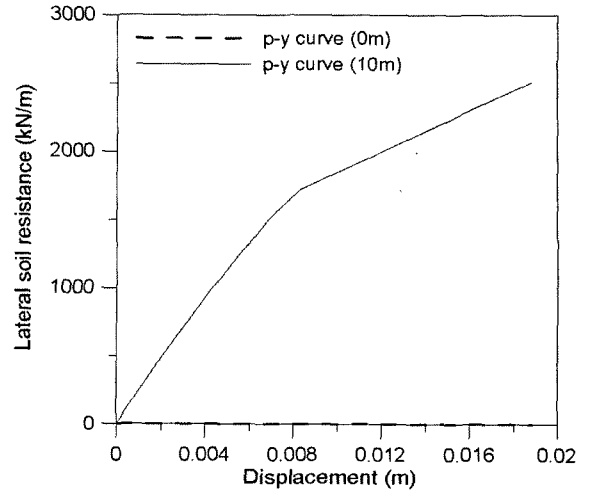
교각 (Pier)	탄성계수(E), MPa	40,000
	단면이차모멘트( $I_x, I_y$ ), $\text{m}^4$	0.04909
	단면적(A), $\text{m}^2$	0.7864
	Polar moment of inertia(J), $\text{m}^4$	0.09817
	전단계수(G), MPa	17,391.3
말뚝캡 (Pile cap)	탄성계수(E), MPa	40,000
	포아손비( $\nu$ )	0.18
	두께(t), m	0.75
말뚝 (PHC Pile)	탄성계수(E), MPa	48,000
	단면이차모멘트( $I_x, I_y$ ), $\text{m}^4$	0.003068
	단면적(A), $\text{m}^2$	0.19635

표 2. 지반의 물성

Medium sand (N=20) 항타말뚝	t-z, q-z곡선 (McVay식, 1989)	극한전단응력( $\tau_f$ ), kPa	40	그림 12(a)
		초기전단탄성계수( $G_i$ ), kPa	8000	
		포아손비( $\nu$ )	0.32	
	p-y곡선 (O'Neill, 1983)	극한선단저항력( $Q_f$ ), kN	1570.8	그림 12(b)
		내부마찰각( $\phi$ ), °	31.8	
		단위중량( $\gamma_t$ ), $\text{kN/m}^3$	16.6	
	p-y 계수(k), $\text{kN/m}^3$	24,400		



(a) t-z, q-z 곡선



(b) p-y 곡선

그림 12. 말뚝의 하중전이 곡선

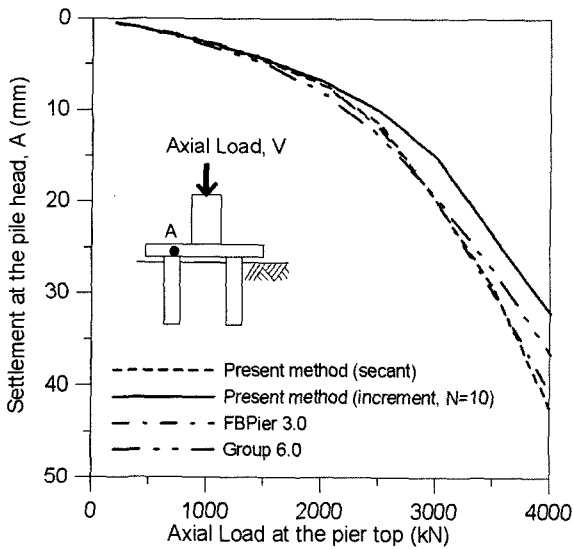


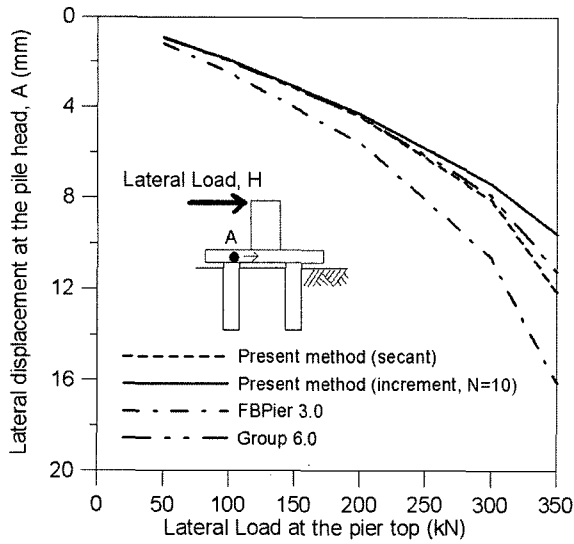
그림 13. 축방향 하중을 받는 군말뚝기초 해석결과

그림 13에, 수평하중을 작용시킨 경우 해석결과를 그림 14에 나타내었다. *Group 6.0* 프로그램은 본 해석기법이나 *FBPIer 3.0*과 달리 말뚝캡의 강성 또는 두께를 고려하지 못하는 한계가 있으며, 특히 교각을 모델링하지 못하므로 수평하중 작용시 교각 하단부에 수평하중 외에 등가의 모멘트를 작용시켜 해석을 수행하였다.

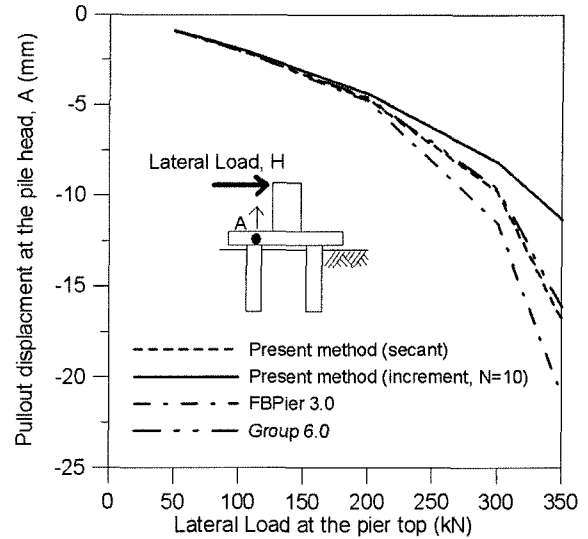
그림 13은 교각 상단에 축하중이 작용한 경우 말뚝캡 위의 A지점에서 산정된 하중-침하량 곡선이다. 본 해석기법에서 실선으로 표시된 부분은 하중단계  $N=10$ 으로 하여 증분하중법을 적용한 해석 결과이며 점선은 본 해석기법에서 채택하고 있는 할선계수법이

적용된 해석결과이다. 증분하중법을 적용한 경우, 수직하중이 2000kN이상 되는 큰 하중 상태에서는 할선계수법을 적용한 경우에 비하여 침하량이 작게 산정되었는데, 이러한 경향은 교각상단에 수평하중을 받는 경우의 해석에서도 동일하게 나타났다. 본 해석기법(할선계수법 적용)은 *FBPIer 3.0*과 거의 유사한 결과를 나타내었다. 또한 *Group 6.0* 해석결과에서 3000kN 이상되는 큰 하중 상태에서 본 해석기법에 비하여 변위가 작게 산정되었는데, 이는 *Group 6.0* 프로그램이 말뚝캡의 휨강성을 고려하지 못한 이유 때문인 것으로 판단된다.

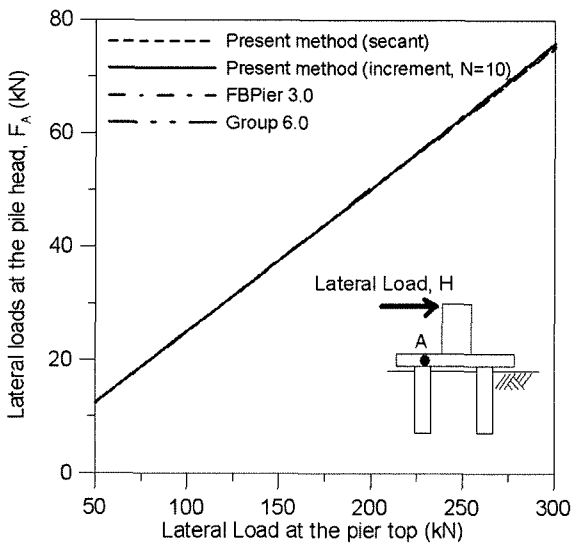
그림 14는 교각 상단에 횡하중이 작용한 경우 말뚝두부 A지점에서의 수평변위, 인발변위, 수평하중 및 모멘트의 분포를 나타낸 것이다. 횡하중이 작용한 경우는 앞서 축하중이 작용한 경우와 달리 본해석기법이 *Group 6.0*과 비슷한 경향을 나타내었고, 오히려 *FBPIer 3.0*과 상당히 큰 차이를 나타내었다. A지점의 수평변위, 인발변위는 그림 14(a)와 (b)에 나타난 바와 같이 *FBPIer 3.0*이 *Group 6.0* 또는 본 해석기법에 비하여 약 20% 정도 큰 값이 산정되는 것으로 나타났으며, 그림 14(c)의 수평하중은 모든 해석기법이 거의 동일한 값이 산정되었다. 그림 14(d)의 모멘트는 *FBPIer 3.0*이 본 해석기법에 비하여 9~77% 정도 작게 산정되었으며, 본 해석기법과 *Group 6.0*과는 5~9% 정도의 비교적 차이가 작은 것으로 나타났다. 횡하중을 받는 군말뚝의 경우 본 해석기법이 *FBPIer 3.0*과는 차이를 나타내고 오히려 *Group 6.0*과 유사한 경향을 보이는



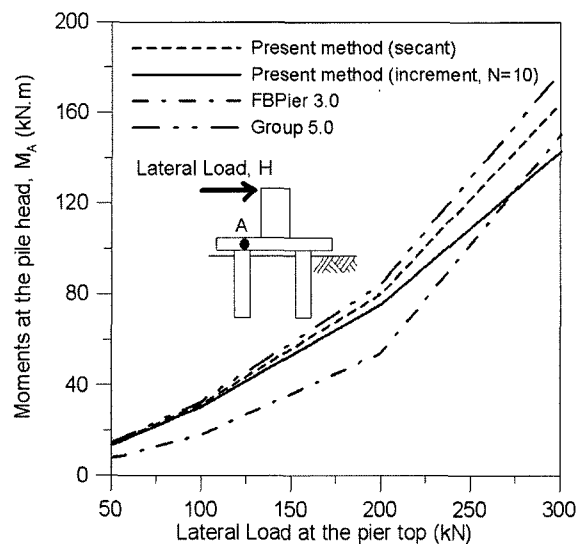
(a) A지점의 수평변위



(b) A지점의 인발변위



(c) A지점의 수평하중



(d) A지점의 모멘트

그림 14. 횡방향 하중을 받는 군말뚝기초 해석결과

원인으로 말뚝모델링의 차이를 들 수 있다. *FBPier 3.0*은 개개 말뚝을 3차원 절편요소로 모델링하나, 본 해석기법과 *Group 6.0*은 말뚝두부에서 강성행렬을 구성하여 말뚝과 캡간의 상호작용을 고려하였다. 따라서 수평하중을 받는 군말뚝기초에서 개개 말뚝을 말뚝두부 강성행렬을 이용하여 모델링하는 경우(본 해석기법, *Group 6.0*)는 3차원 요소로 모델링하는 경우(*FBPier 3.0*)에 비하여 수평변위가 다소 작게 산정됨을 알 수 있었다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 교량하부 말뚝기초의 최적 설계와 거

동 예측을 위하여 상부구조와의 일체해석을 수행할 수 있는 해석기법(*YSGroup*)을 개발하였다. 본 해석기법은 *FBPier 3.0*과 *Group 6.0*의 중간단계에 해당하는 해석기법으로, 군말뚝 내 말뚝들은 *Group 6.0*과 유사하게 말뚝두부 강성행렬을 이용하여 나타내었다. 이는 *FBPier 3.0*이 3차원 절편요소를 사용하는 것에 비하여 말뚝과 지반을 쉽고 간편하게 모델링할 수 있는 장점이 있다. 기존의 군말뚝해석기법이 강성법(stiffness method)을 사용하여 말뚝-캡 상호작용을 고려함에 따라 말뚝캡의 휨강성을 고려할 수 없고 상부 교각과의 일체화된 해석을 수행할 수 없는 단점이 있었으나, 본 연구에서는 상부 말뚝캡을 평면셀요소를 이용하여 모델링하므로 말뚝캡

의 휨강성을 고려할 수 있었고 상부 교각과도 일체해석이 가능하였다. 특히 본 해석기법에서는 상부 교각 또는 말뚝기초와의 접합이 용이하고 평면셀요소의 거동을 원활하게 하기 위하여 회전자유도가 포함된 6개의 자유도가 있는 4절점 평면셀요소를 적용하였다.

지반의 비선형거동으로 인한 말뚝두부 강성행렬의 변화를 고려하기 위해 본 연구에서는 증분하중-할선계수법(increment-iteration method)을 제안하여, 기존의 O'Neill 등(1977)이 제안한 증분하중법(purely increment method)이 하중단계가 작을 때 실제보다 강성이 견고(stiff)해지는 단점을 보완하였다. 균말뚝을 대상으로 증분하중-할선계수법을 적용하여 비교·분석한 결과 하중단계(N)가 1인 할선계수법(secant modulus method) 만으로도 비선형 거동을 충분히 나타낼 수 있음을 확인하였다.

본 해석기법의 *FBPier 3.0*과 *Group 6.0*과의 비교·분석 결과, 말뚝캡을 평면셀요소를 적용한 경우에 강성법(stiffness method)과 같이 말뚝-캡 상호작용을 효과적으로 나타낼 수 있었으며, 말뚝을 *FBPier 3.0*과 달리 말뚝두부 강성행렬을 이용하여 모델링하였어도 말뚝두부 및 교각 상단에서의 변위를 비교적 정확히 산정할 수 있음을 알 수 있었다. 단, 본 해석기법이 말뚝두부 강성행렬을 이용하여 말뚝을 모델링함에 따라 말뚝을 3차원 요소로 모델링한 *FBPier 3.0*에 비하여 말뚝두부의 수평변위가 다소 작게 산정되는 경향이 있었으며 수직변위는 거의 동일한 값이 산정되는 것으로 나타났다.

## 감사의 글

본 연구는 한국건설기술연구원 기본사업인 “Bridge 200 교량기초 장수명화 기술개발 과제”의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. 도로교설계기준 해설(하부구조편) (2001), *대한토목학회*, pp.268-272.
2. 원진오, 정문경, 박기석, 정상섭 (2004), “홍수시 충격하중 및 유수압을 고려한 교량기초 해석”, *대한토목학회지*, 제24권, 제1C호, pp.49-55.
3. 이완훈 (1995), *면내 회전자유도를 가진 변이 평면 셀요소의 개발과 이를 적용한 적응적 체논 세분화*, 박사학위논문, 한국과학기술원 토목공학과.
4. 정상섭, 서정주, 원진오 (2002), “Analysis of Piled Piers Considering Riverbed Scouring”, *한국지반공학회 논문집*, 제18권, 3호, pp.43-50.
5. Allen, M. B. and Isaacson, E. L. (1998), *Numerical analysis for applied science*, John Wiley & Sons.

6. Ashour, M. and Norris, G. (2003), “Lateral Loaded Pile Response in Liquefiable Soil”, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol.129, No.6, pp.404-414.
7. Chow, Y. K. (1987), “Three-Dimensional Analysis of Pile Groups”, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol.113, No.6, pp.637-651.
8. Clancy, P. and Randolph, M. F. (1993), “An Approximate Analysis Procedure of Piled Raft Foundations”, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.17, pp.849-869.
9. Coyle, H. M. and Reese, L. C. (1966), “Load Transfer for Axially Loaded Piles in Clay”, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol.92, No.SM2, pp.1-26.
10. Hoit, M. I., McVay, M., Hays, C., and Andrade, P. W. (1996), “Nonlinear Pile Foundation Analysis using Florida-Pier”, *Journal of Bridge Engineering*, Vol.1, No.4, pp.135-142.
11. Jeong, S. S. and Won, J. O. (2003), “Simplified 3D Analysis of Laterally Loaded Pile Groups”, *TRB 2003 Annual Meeting CD-ROM*.
12. Jeong, S. S., Chung S. H., and Won, J. O. (2001), “Analysis of Group Pile-Cap Interaction by Load Transfer Approach”, *Journal of the Korean Geotechnical Society*, Vol.17, No.3, pp.95-102.
13. Kitiyodom, P. and Matsumoto, T. (2002), “A Simplified Analysis Method for Piled Raft and Pile Group Foundations with Batter Piles”, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.26, pp.1349-1369.
14. Matlock, H. and Reese, L. C. (1962), “Generalized Solution for Laterally Loaded Piles”, *Transactions*, ASCE, Vol.127, part I, pp.1220-1251.
15. McVay, M. C., Townsend, F. C., Bloomquist, D. G., O'Brien, M., and Caliendo, J. A. (1989), “Numerical Analysis of Vertically Loaded Pile Groups”, *Proc. Found. Engrg.: Current Principles and Practices*, Vol. 1, ASCE, New York, pp.675-690.
16. O'Neill, M. W. and Murchison, J. M. (1983), “An Evaluation of p-y Relationship in Sands”, *A report to the American Petroleum Institute*, PRAC 82-41-1. University of Houston, Texas.
17. O'Neill, M. W., Ghazzaly O. I., and Ha, H. B. (1977), “Analysis of Three-Dimensional Pile Groups with Nonlinear Soil Response and Pile-soil-pile Interaction”, *9th Annual Offshore Technology conference in Houston*. Ex. May 2-5.
18. Reese, L. C. and Wang, S. T. (2004), “Group 6.0 for Windows, Analysis of a Group of Piles Subjected to Axial and Lateral Loading”, Ensoft, Inc., Austin, Tex.
19. Reese, L. C., O'Neill, M. W., and Smith, R. E. (1970), “Generalized Analysis of Pile Foundations”, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.96, No.SM1, pp.235-250.
20. Walsh, K., Houston, S. L., and Houston, W. N. (1995), “Development of t-z Curves For Cemented Fine-Grained Soil Deposits”, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.121, No.12, pp.886-895.
21. Zhang, L., McVay, M. C., and Lai, P. (1999), “Numerical Analysis of Laterally Loaded 3×3 to 7×3 Pile Groups in Sands”, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol.125, No.11, pp.936-946.
22. Zhang, H. H. and Small, J. C. (2000), “Analysis of Capped Pile Groups Subjected to Horizontal and Vertical Loads”, *Computers and Geotechnics*, Vol.26, pp.1-21.

(접수일자 2005. 3. 5, 심사완료일 2005. 7. 25)