

라체팅 거동에 대한 점소성 구성방정식

호 광 수#

Viscoplastic Constitutive Equations for Ratchetting Behavior

Kwangsoo Ho

(Received April, 25, 2005)

Abstract

Inelastic deformation behavior of metals and alloys is considered rate dependent. Uniaxial ratchetting experiments performed by Ruggles and Krempl, and Hassan and Kyriakides exhibited that higher mean stress for a fixed stress amplitude resulted in higher ratchet strain within a rate independent framework and higher stress rate resulted in lower ratchet strain, respectively. These phenomena are qualitatively investigated by numerical experiments through unified viscoplasticity theory. The theory does not separate rate-independent plasticity and rate-dependent creep, and thus uses only one inelastic strain to describe inelastic deformation processes with the concept of the yield surface. The growth law for the kinematic stress, which is a tensor valued state variable of the constitutive equations, is modified to predict the linear evolution of long-term ratchet strain.

Key Words : Constitutive Equations, Ratchetting, Viscoplasticity Theory, Relaxation, Inelastic Deformation

1. 서 론

비탄성 변형 거동의 기계 구조물이 반복 하중을 받으면 변형이 점진적으로 누적되어 파손될 수 있으므로 이러한 구조물의 설계에서는 변형의 누적이 매우 중요하게 고려되어야 한다. 라체팅은 반복 응력의 조건에서 변형률의 누적을 고찰하는 전통적인 재료특성 시험의 하나로써, 일반적으로 속도에 의존적인 것으로 알려져 있다[1,3].

기계 구조물에서의 라체팅 거동이 중요하게 인식되면서 이에 대한 실험적인 연구가 속도에 독립적인 또는 의존적인 체계에서 활발히 수행되어 왔으며, 또한 이를 정확하게 예측할 수 있는 구성적 모델링(constitutive modeling)에 대한 연구가 비선형 이동경화 모델(nonlinear kinematic hardening model)의 범주에서 수행되어왔다[1~6].

Ruggles 와 Krempl[1]은 304 스테인레스 강에 대

한 응력 속도 제어(stress rate control)의 조건 하에서 일축 라체팅 시험을 상온에서 수행하였으며, 변형률 누적이 응력 속도가 증가 함에 따라 감소하는 시험 결과를 보고하였다.

Hassan 와 Kyriakides[2]는 속도에 독립적인 반복 소성(cyclic plasticity)의 범주에서 재료의 반복 강화 및 연화의 특성이 라체팅에 미치는 영향을 살펴보는 체계적인 시험을 수행하였다. 일정한 응력 진폭 하의 일축 라체팅 거동에서 누적된 변형률은 평균 응력이 증가할수록 증가하는 경향을 나타내었으며, 재료의 반복 강화 및 연화는 누적된 변형률의 감소 및 증가를 각각 나타내었다.

Chaboche[5], Ohno 와 Wang[6]은 비선형 이동경화 법칙에 근거한 다중의 임계면(critical surface)들을 중첩하는 구성적 모델링을 개발하여 일축 및 이축의 라체팅 거동을 설명하였다.

본 논문의 목적은 재료의 다양한 비탄성 거동

교신저자: 계명대학교 기계자동차공학부

을 모델링하기 위하여 개발된 점소성 이론[7~10]을 사용하여 라체팅 거동의 특성을 설명하는데 있다. 이때 Ruggles 와 Krempl 그리고 Hassan 와 Kyriakides 에 의해 수행된 일축 라체팅의 기본적인 특성들을 정성적으로 모델링 함으로써 제안된 구성방정식의 타당성을 입증하고, 라체트 변형률의 정의를 도입하여 라체팅 거동의 속도 의존성을 살펴볼 것이다. 이론의 상태변수인 동응력(kinematic stress)의 성장식으로 선형의 운동적 강화법칙이 사용된 경우에 재료의 단기(short-term) 라체팅 거동은 잘 설명되지만, 장기(long-term) 라체팅 거동에 대한 모델링에 있어서는 shakedown으로 명명된 변형률 누적의 정지 현상이 나타나게 된다. 이러한 단점을 개선하여 변형률 누적의 성장률이 일정한 라체팅의 일반적 거동을 설명할 수 있는 새로운 동응력에 대한 성장식이 제안될 것이다.

2. 구성방정식

재료의 속도에 의존적인 비탄성 거동을 모델링하기 위하여 사용된 구성방정식은 소성 및 크리프 거동을 각각의 독립적인 재료거동으로 인식하지 않고, 총체적으로 단일하게 표현하는 방법을 사용하는 통합된 점소성 이론(unified viscoplasticity theory)의 하나이다. 과응력(overstress)에 기초하여 개발된 점소성 이론은 본 저자에 의해 동적변형 시효에서 나타나는 유동응력이 하중 속도가 증가함에 따라 감소하는 특성, 즉 음성의 속도민감도 및 응력이완의 속도 의존성을 일관성 있게 설명할 수 있도록 일반화되었다[8,10]. 일반화된 구성방정식은 유동법칙과 상태변수들 그리고 이들의 성장식들로 구성된다. 상태변수의 역할은 재료 미세구조의 현재 상태를 표현하는 것이며, 변형에 따른 미세구조의 변화를 상태변수의 성장식으로 표현하게 된다.

등온의 조건 하에서 등방성 재료의 미소변형 및 비압축성의 비탄성 거동을 가정한다. 이 조건에서의 전체 변형률 속도는 탄성 변형률 속도와 비탄성 변형률 속도의 합으로 정의되며, 이들의 편차 성분들은

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{el} + \dot{\epsilon}_{ij}^{in} \quad (1)$$

의 관계를 갖는다. 탄성 및 비탄성 변형률속도의 편차 성분에 대한 정의는 각각 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{el} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{in} = \frac{3}{2} B \left\langle \frac{J(\sigma_{ij} - H_{ij}) - R}{D} \right\rangle^m \frac{(s_{ij} - g_{ij})}{J(\sigma_{ij} - G_{ij})} \quad (3)$$

여기서 s_{ij} 는 편차응력, E 는 탄성계수, ν 는 프와송 비 그리고 B , D 와 m 은 재료상수이다. $\langle \rangle$ 는 Macauley의 괄호로서 $\langle x \rangle = x$ if $x > 0$ 와 $\langle x \rangle = 0$ if $x \leq 0$ 을 의미하고, $J(\sigma_{ij} - H_{ij})$ 와 $J(\sigma_{ij} - G_{ij})$ 은 각각 $\sigma_{ij} - H_{ij}$ 와 $\sigma_{ij} - G_{ij}$ 의 제 2차 불변량으로 정의된다.

식 (3)에서 g_{ij} 은 상태변수인 역응력(back stress) G_{ij} 의 편차성분이다. 편차성분이 h_{ij} 로 표현되는 상태변수 H_{ij} 는 이동경화(kinematic hardening)를 나타내고, 변수 R 은 등방경화(isotropic hardening)를 나타낸다. 이들의 경화가 조합된 항복조건은 $f = J(\sigma_{ij} - H_{ij}) - R \leq 0$ 으로 정의된다.

상태변수들의 성장식들에 대한 정의는 다음과 같다:

$$\dot{g}_{ij} = \psi \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{in} - \frac{(g_{ij} - h_{ij})}{R} \dot{\phi} \right] + \dot{h}_{ij} \quad (4)$$

$$\dot{h}_{ij} = \frac{2}{3} E_i \dot{\epsilon}_{ij}^{in} \quad (5)$$

$$\dot{A} = A_r (A_f - A) \dot{\phi} ; A(t=0) = A_0 \quad (6)$$

ψ 는 초기 순수 탄성 영역으로부터 완전히 진전된 비탄성 유동영역으로의 천이 거동을 모델링하기 위하여 도입된 재료상수이고, $\dot{\phi}$ 는 유효 비탄성 변형률속도로서 $(\dot{\phi})^2 = (2/3) \dot{\epsilon}_{ij}^{in} \dot{\epsilon}_{ij}^{in}$ 으로 정의된다. E_i 는 전체 변형률에 기초한 비탄성 계수인 \hat{E}_i 와 $\hat{E}_i = E_i / (1 + E_i/E)$ 의 관계를 갖는 재료상수이며, A_r 와 A_f 는 재료 상수로서 등방응력(isotropic stress) A 의 성장속도와 점근치를 각각 정의한다.

재료의 등방경화를 나타내는 R 의 정의는 다음과 같다:

$$R = r_c + \langle A + \beta J(\sigma_{ij} - G_{ij}) \rangle \quad (7)$$

여기서 r_c 와 β 는 재료상수이다. 응력과 역응력의 차로 정의되는 과응력의 제2차 불변량 $J(\sigma_{ij} - G_{ij})$ 은 비탄성 거동이 충분히 진전된 유동응력 영역에서 하중 속도가 증가함에 따라 증가한다[9~10]. 따라서 $\beta < 0$ 의 조건 하에서 변수 R 은 하중 속도가 증가함에 따라 크기가 감소하는 음성의 속도민감도를 보이며, 그 결과 완전히 진전된 비탄

성 영역에서의 역응력도 속도에 의존적인 음성의 속도민감도를 나타낸다. 이러한 특성에 의하여 구성방정식은 동적 변형시효에서 나타나는 유동응력의 음성의 속도민감도 및 이완된 응력의 크기가 응력이완 시험 이전에 경험된 변형률속도에 의존하게 되는 재료의 비탄성 거동을 설명할 수 있게 된다[10].

재료의 반복 강화 또는 연화(cyclic hardening or softening)의 현상은 상태변수인 A 의 성장식에 의해 설명된다. 라체팅은 재료가 일련의 반복 하중에 대하여 강화 또는 연화의 특성을 나타내고 안정화된 다음에도 발생되므로, 라체팅의 기본적인 특성에 대한 구성방정식의 연구에서는 반복 중립(cyclic neutral)의 거동을 대상으로 진행하는 것이 필수적이다[4]. 따라서 본 연구에서는 $A=0$ 이 사용되어, 등방응력은 성장하지 않고 항상 일정하게 유지되도록 한다.

3. 라체팅 해석

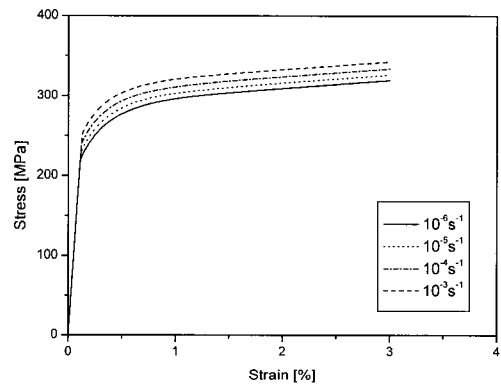
재료의 점소성적 특성에 대한 시험 방법에는 변형률 제어(strain control)와 응력제어(stress control)가 있다. 따라서 이러한 제어 방법에서 구성방정식에 대한 다양한 하중 속도 하에서 유동응력의 비선형 속도 의존성의 특성을 살펴보고, 단축 라체팅에서 나타나는 기본적인 성질들에 대한 수치 시험(numerical experiment)을 수행하여 구성방정식의 모델링 특성을 고찰하고자 한다. 수치시험에 사용된 재료상수들의 값은 Table 1에 나타나있다.

변형률 제어에서 변형률 속도가 $10^{-6} \sim 10^{-3} s^{-1}$ 일 때의 응력-변형률 곡선이 Fig. 1(a)에 나타나있다. 유동응력은 변형률 속도가 증가함에 따라 증가하는 양성의 속도 민감도를 나타내고, 속도 의존성은 변형률 속도가 10 배 증가할 때 유동응력이 이에 비례해서 선형적으로 10 배 증가하지 않는 비선형성을 보여준다. Figure 1(b)는 응력 제어에 의한 $10^{-1} \sim 10^2 MPas^{-1}$ 의 응력 속도에 대한 응력-변형률 곡선으로 Fig. 1(a)와 같이 양성의 속도 민감도를 보여준다. Figures 1(a), 1(b)에서 사용된 재료상수 β 는 양성의 속도 민감도를 나타내기 위하여 $-1 < \beta < 0$ 의 조건을 만족하도록 선택되었으며, 실제적인 재료의 비탄성 거동을 모델링할 때에는 릴렉세이션 시험을 고려함으로써 계산되어진다[8].

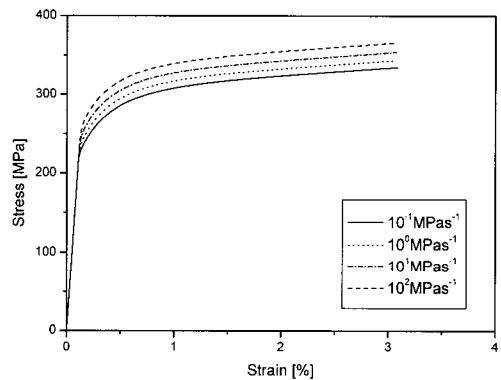
재료의 라체팅 거동을 설명하기 위해 제안된 구성방정식의 타당성 검토는 Ruggles 와 Kremp[1],

Table 1. Material constants

	Hypothetical mat.	316FR
$B[s^{-1}]$	3×10^{-5}	1×10^{-2}
$D[MPa]$	100	190
m	15	10
β	-0.5	-0.6
$\psi[MPa]$	100×10^3	100×10^3
$E[MPa]$	200×10^3	196×10^3
$E_r[MPa]$	1×10^3	3×10^3
$r_c[MPa]$	1	1
$A_0[MPa]$	250	212



(a)

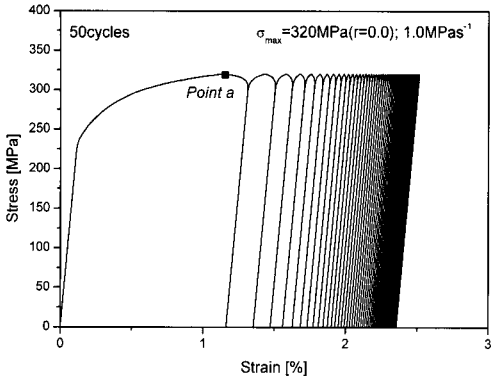


(b)

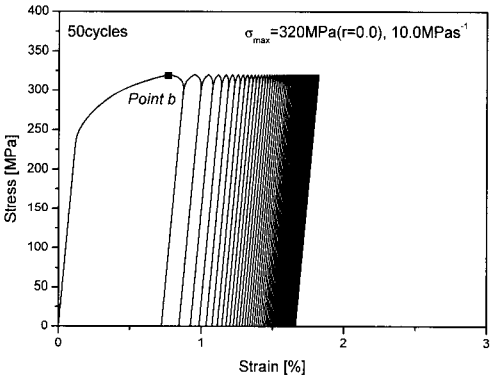
Fig. 1 Stress-strain curves for different loading rates: (a) strain control; (b) stress control

Hassan 와 Kyriakides[2]에 의해 수행된 일축 라체팅의 기본적인 특성들을 정성적으로 고찰함으로써 수행된다.

Figure 2는 응력속도에 의존적인 라체팅 거동을 살펴보기 위하여, $r = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ 으로 정의되는 응



(a)



(b)

Fig. 2 Hysteresis loops for 50 cycles under stress control: (a) $\dot{\sigma} = 1.0 MPas^{-1}$; (b) $\dot{\sigma} = 10 MPas^{-1}$

력비 $r = 0.0$ 및 $\sigma_{max} = 320 MPa$ 을 사용한 응력속도 1.0 와 $10 MPas^{-1}$ 에서의 50 사이클에 대한 응력-변형률 곡선이다. 사이클 수가 증가함에 따라 변형률 누적의 증가율은 감소하고 응력속도가 큰 경우의 변형률 누적량이 작게 나타나는데, 이러한 특성은 Ruggles 와 Krempl 의 시험 결과와 정성적으로 잘 일치한다.

Fig. 3은 다양한 응력속도에 대한 최대응력(σ_{max}) 점에서의 변형률인 ϵ_{max} 을 사이클 수에 대하여 나타낸다. 사이클 수가 증가함에 따라 최대 변형률의 증가율은 초기에 급격히 감소한 후, 점진적으로 감소한다. 응력속도의 영향은 Fig. 2에서 살펴본 바와 같이, 응력속도가 증가함에 따라 최대 변형률은 감소함을 보인다.

일정한 응력진폭, $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$, 하에서 평균응력, $\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$, 의 변화에 따른

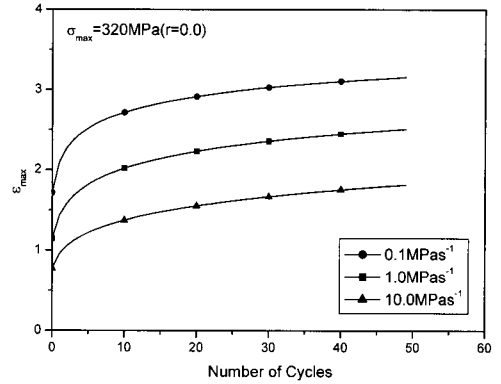


Fig. 3 Maximum strain versus number of cycles for different stress rates

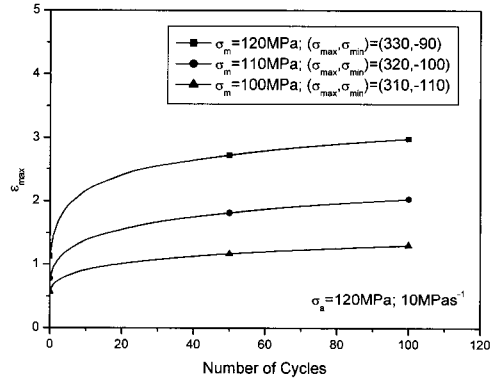


Fig. 4 Maximum strain versus number of cycles for different mean stresses

라체팅 거동이 $10 MPas^{-1}$ 의 응력속도에 대하여 Fig. 4 에서 설명된다. $\sigma_a = 120 MPa$ 의 일정한 조건 하에서 평균응력이 증가할 때 최대변형률은 반복 하중이 진행됨에 따라 증가하는, Hassan 와 Kyriakides 의 탄소강 1020 에 대한 시험 결과와 정성적으로 일치된 특성을 구성방정식은 잘 나타내고 있다.

Fig. 1 의 Point a 와 Point b 에서 보는 바와 같이 응력속도가 다른 경우, 초기 $\sigma_{max} = 320 MPa$ 에 도달했을 때의 변형률은 매우 다르게 된다. 따라서 응력속도에 의한 변형률 누적의 영향을 정확히 평가하는 것은 지금까지 사용되었던 최대 변형률을 대신하여, 첫번째 사이클 이후의 매 사이클에서의 최대변형률과 첫번째 사이클에서의 최대변형률의 차($\epsilon_{rat} = \epsilon_{max}^* - \epsilon_0$)로 정의되는 라체트 변형률을 사용할 때 가능하게 된다. Fig. 5 는 ϵ_0 와

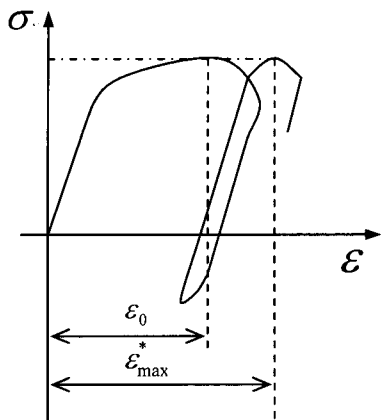


Fig. 5 Schematic illustration of ϵ_0 and ϵ_{max}^* under stress control

ϵ_{max}^* 의 정의를 보여준다.

라체트 변형률을 사용하여 Fig. 3의 특성을 다시 평가하면, Fig. 6과 같이 응력속도가 감소함에 따라 라체트 변형률에 대한 응력속도의 영향이 감소하게 된다. 그러나 변형률 누적이 응력속도가 증가함에 따라 감소하는 특성은 변하지 않고 유지된다.

라체팅 거동에 대한 재료상수 ψ 의 영향을 고찰하기 위하여 응력속도 $10MPas^{-1}$ 하에서의 수치시험이 Fig. 7에 보여진다. ψ 의 크기가 증가하면 순수 탄성영역에서 비탄성 영역으로의 천이가 빠르게 진행됨으로써 역응력의 열림효과[11]가 둔화되어 라체트 변형률은 감소하게 된다.

지금까지 고려된 라체팅 거동은 단기 반복사이클에서 변형률 누적의 변화율이 점진적으로 감소하다 거의 일정한 수준에 도달되는 것으로 해석되었을 뿐, 라체팅이 정지(shakedown)하거나 선형적으로 성장하는 특성[5]은 설명되지 않았다. 장기 반복사이클에서의 이러한 특성을 설명하기 위하여, 이동응력에 대한 성장식인 식 (5)는 비선형 이동 경화법칙을 사용하여 다음과 같이 수정된다:

$$\dot{h}_{ij} = \frac{2}{3} E_r \dot{\epsilon}_{ij}^m - \alpha h_{ij} \dot{\phi} \quad (8)$$

여기서 α 는 재료상수이다. $\alpha = 0.0$ 은 선형 이동 경화법칙을 의미하며, 이 경우 장기 반복 하중인 1000 사이클에 대한 라체트 변형률은 Fig. 8(a)에서 보는 바와 같이 라체팅의 정지 현상을 나타낸다.

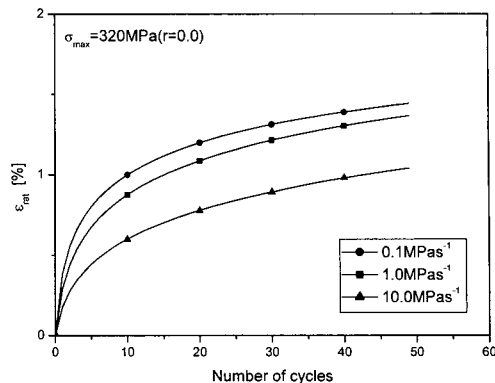


Fig. 6 Ratchet strain versus number of cycles for different stress rates

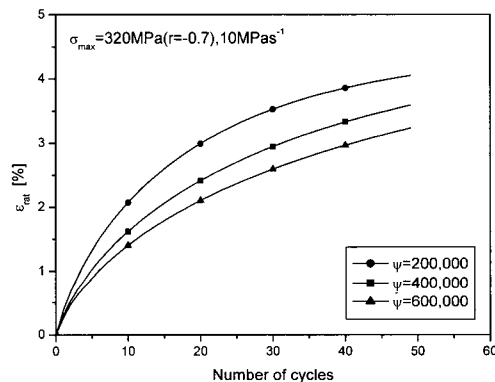


Fig. 7 Ratchet strain versus number of cycles for different values of ψ

Fig. 8(a)는 $10MPas^{-1}$ 의 응력속도 및 $r = -0.7$ 의 응력비 하에서 라체트 변형률의 선형적인 성장률이 α 가 증가함에 따라 증가함을 보여준다. 응력-변형률 곡선에 대한 α 의 영향은 Fig. 8(b)에 나타나 있다. $5 \times 10^{-7} \sim 5 \times 10^{-3} s^{-1}$ 의 변형률속도 제어에서 응력-변형률 곡선에 대한 α 의 영향은 무시할 수 있을 정도로 작게 나타난다. 따라서 구성방정식은 응력제어 하의 장기 사이클에 대한 라체팅 거동 및 변형률제어 하의 응력-변형률 곡선을 정확하게 모델링하는 것이 가능하게 된다.

Mizuno et al.[11]이 상온에서 실시한 316FR 스테인레스 강에 대한 시험 결과가 Fig. 9에 나타나 있다. 다양한 변형률속도에 대한 유동응력의 속도 의존적 특성 및 $10MPas^{-1}$ 의 응력속도 하에서 단기 사이클에 대한 변형률 누적 현상이 각각 Fig. 9(a)와 9(b)에 나타나 있다. Table 1의 재료상수를 사

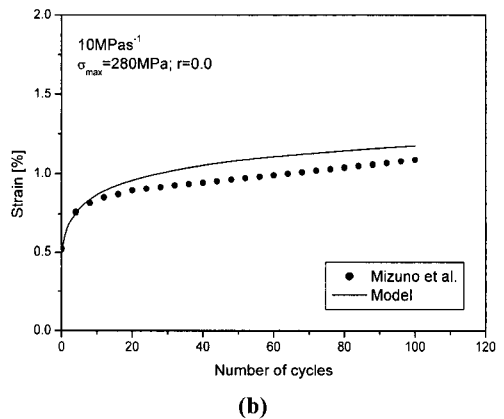
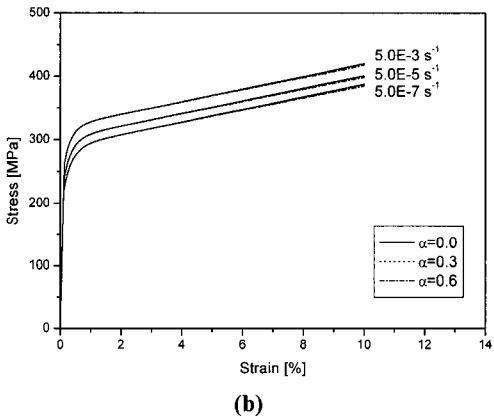
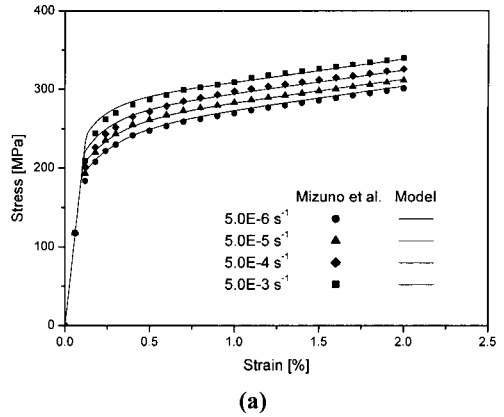
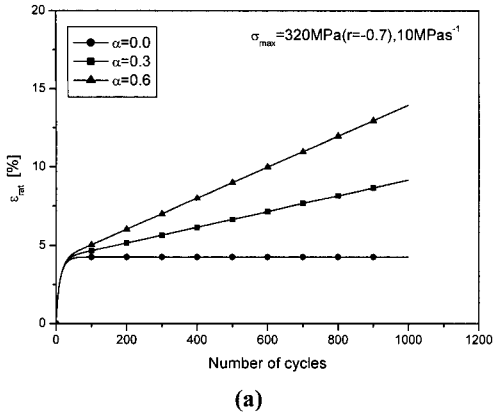


Fig. 8 Effect of α on ratcheting behavior: (a) ratchet strain; (b) stress-strain curves

Fig. 9 Simulations of 316FR stainless steel: (a) stress-strain curves; (b) ratchet strain

용하여 수행된 모델링 결과는 변형률제어 하의 시험 결과와 정량적으로 잘 일치함을 보여준다. 이때 α 는 단기 사이클에 대한 라체팅 시험을 예측하기 위하여 $\alpha = 0.0$ 이 사용되었다. Figure 9(b)에서 제안된 구성방정식은 변형률 누적의 시험결과를 잘 예측한다.

의존성을 살펴보았다. 수정된 이동응력의 성장식은 비선형 이동경화 법칙을 사용하여 장기 라체팅의 정지 현상 및 선형적인 성장을 설명할 수 있었으며, 제안된 구성방정식을 316FR 스테인레스강의 시험 결과에 적용함으로써 구성방정식의 타당성을 입증하였다.

4. 결론

참고 문헌

재료의 속도 의존적 비탄성 거동을 모델링하는 통합된 점소성 이론의 체계 하에서 제안된 구성방정식은 하중 속도가 증가함에 따라 유동응력이 비선형적으로 증가하는 양성의 속도민감도를 변형률 및 응력 제어에서 잘 설명할 수 있었다. 라체팅 거동의 기본적인 특성들을 구성방정식은 정성적으로 잘 설명할 수 있었으며, 새로이 정의된 라체트 변형률을 사용하여 라체팅의 속도

[1] M. B. Ruggles, E. Krempl, 1990, The interaction of cyclic hardening and ratcheting for AISI type 304 stainless steel at room temperature: I. Experiment, Journal of the Mechanics and physics of Solids, Vol. 38, pp. 575~585.
 [2] T. Hassan, S. Kyriakides, 1992, Ratcheting in cyclic plasticity, Part I: Uniaxial behavior, International

- Journal of Plasticity, Vol. 8, pp. 91~116.
- [3] O. U. Colak, E. Krempl, 2003, Modeling of uniaxial and biaxial ratcheting behavior of 1026 carbon steel using the simplified viscoplasticity theory based on overstress (VBO), Acta Mechanica, Vol. 160, pp. 27~44.
- [4] S. Bari, T. Hassan, 2000, Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation, International Journal of Plasticity, Vol. 16, pp. 381~409.
- [5] J. L. Chaboche, D. Nouailhas, 1989, Constitutive modeling of ratcheting effects: I. Experimental facts and properties of the classical models, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 111, pp. 384~392.
- [6] N. Ohno, J. Wang, 1993, Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery: I. Formulation and basic features for ratcheting behavior, International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp. 375~390.
- [7] K. Ho, E. Krempl, 2000, Modeling of positive, negative and zero rate sensitivity by using the viscoplasticity theory based on overstress (VBO), Mechanics of Time-Dependent Materials, Vol. 4, pp. 21~42.
- [8] K. Ho, E. Krempl, 2001, The modeling of unusual rate sensitivity inside and outside the dynamic strain regime, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 123, pp. 28~35.
- [9] K. Ho, E. Krempl, 2002, Extension of the viscoplasticity theory based on overstress (VBO) to capture non-standard rate dependence in solids, International Journal of Plasticity, Vol. 18, pp. 851~872.
- [10] 호광수, 2004, 점소성 이론에 의한 변형률 속도 민감도에 대한 연구, 한국소성가공학회지, 제 13 권 7 호, pp. 600~607.
- [11] M. Mizuno, Y. Mima, M. Abdel-Karim, N. Ohno, 2000, Uniaxial ratcheting of 316FR steel at room temperature-Part I: Experiments, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 122, pp. 29~34.