

불확실성을 갖는 MIMO 시스템을 위한 선형행렬부등식 기반 PID 제어기 설계 방법

An LMI-based PID Control Design Method for Uncertain MIMO Systems

이 재 관, 최 한 호*

(Jae Kwan Lee and Han Ho Choi)

Abstract : This paper deals with the design problem of multivariable PID controllers guaranteeing the closed-loop system stability and a prescribed H_∞ norm bound constraint. We reduce the problem to the static output feedback stabilization problem. We derive a necessary and sufficient condition for the existence of PID controllers and we give an explicit formula of PID controllers. We also give an existence condition of PID controllers guaranteeing a prescribed decay rate. Finally, we give an LMI-based design algorithm, together with a numerical design example.

Keywords : linear matrix inequality(LMI), PID control, H_∞ control, uncertain system

I. 서론

PID 제어기는 가장 많이 쓰이는 제어 알고리즘으로 대상 시스템이 1차나 2차의 SISO 시스템으로 분리(decouple)될 수 있다는 가정하에 PID 제어기 이득을 쉽게 구하기 위한 매우 다양한 방법들이 제시되었다[1-4]. 많은 시스템이 이러한 가정을 잘 만족시키지만 또한 이 가정을 만족시키지 않는 시스템도 많이 존재한다. 최근에 [5]에서는 이러한 점을 고려하여 MIMO 시스템을 위한 PID 제어기 설계 방법이 제시되었다. [5]에서 다변수 PID 제어기 설계문제는 비선형 구속조건을 갖는 정적출력케환문제로 환원되었다. [5]에서는 외란 입력으로부터 측정 출력이나 제어 출력으로의 feedthrough 항의 값이 0이 된다는 구속조건이 채용되었다. 실제의 시스템에서 이러한 구속조건은 종종 만족되지 않는다. 특히 측정 출력은 잡음에 노출되어 있기 때문에, 즉 외란입력으로부터 측정 출력으로의 feedthrough 항의 값이 0이 아니기 때문에 [5]의 방법의 성능과 적용범위는 제한적일 수 밖에 없다. 측정 출력이 잡음에 노출되게 마련인 실제의 경우에 PID 제어기는 출력값을 1차의 저역통과필터(low pass filter)로 걸러 잡음의 증폭으로 인한 악영향을 줄일 수 있다. 이러한 점을 고려하여 저역통과필터를 포함하는 실제적인 PID 제어기 설계방법을 제안한다. 제안된 방법은 [5]에 채용된 외란입력으로부터 측정 출력이나 제어 출력으로의 feedthrough 항의 값이 0이 된다는 구속조건을 요구하지 않는다. 우리는 실제적인 PID 제어기 설계문제를 정적출력케환문제로 환원하고 PID 제어기가 존재할 필요충분조건을 LMI를 사용하여 유도한다. 그리고 제시된 존재조건을 해를 사용하여 PID 제어기의 공식을 제시한다. 제안된 PID 제어기는 폐회로 시스템의 안정도와 미리 설정된

H_∞ 성능 구속조건을 보장한다. 본 논문에서 제시된 방법은 LMI에 기반하였기 때문에 일반적인 제어기 설계를 위한 LMI 기반 방법들처럼 LMI Control Toolbox[6]와 같은 매우 효율적인 convex 최적화 기법을 통해 PID 제어기의 존재유무를 확인할 수 있으며 극배치조건, LQ/H_2 성능조건, covariance 성능조건, L_∞ 성능조건 등과 같이 LMI로 표현 가능한 성능지수들을 설계시에 고려해 넣을 수 있는 융통성을 제공한다[7]. 본 논문에서는 일례로 미리 설정된 감쇠율(decay rate)을 보장하는 PID 제어기의 존재조건을 제시한다. 마지막으로 제어기 설계를 위한 LMI기반 알고리즘을 예제와 함께 제시한다.

II. 문제 설정과 보조정리들

다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_1w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 $A, B, B_1, C, D, C_1, D_{11}, D_{12}$ 는 적절한 차원을 갖는 행렬이고, $x(t) \in R^n$ 은 상태, $u(t) \in R^m$ 은 제어 입력, $y(t) \in R^p$ 는 측정 출력, $z(t) \in R^q$ 는 제어 출력, $w(t) \in R^r$ 는 외란 입력이다. [5]의 논문에서는 $D = D_{11}$ 이라고 가정했고 아래와 같은 이상적인 PID 제어기가 고려되었다.

$$U(s) = (F_1 + \frac{1}{s} F_2 + sF_3) Y(s) \quad (2)$$

통상적인 PID 제어기는 미분기가 유한차분(finite difference)에 의하여 구현된다는 것을 고려하고 잡음의 제어기에 대한 영향을 제한하기 위하여 출력값을 알려진 시상수를 갖는 1차 저역통과필터(low pass filter)를 포함하여 다음의 형태가 쓰이는 경우가 많다[1,2]

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2004. 5. 3., 채택확정 : 2005. 6. 16.

이재관 : 삼성 SDS(jaegwuan.lee@samsung.com)

최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@donguk.edu)

$$\begin{aligned}
 U(S) &= (F_1 + \frac{1}{s} F_2 + sF_3)Y'(s) \\
 Y'_i(s) &= \frac{\zeta_i}{s + \zeta_i} Y_i(s)
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기에서 ζ_i 는 양수로 ζ_i^{-1} 는 저역통과필터의 시상수값이다. 저역통과필터 $\zeta_i/(s + \zeta_i)$ 는 저주파에서는 이상적인 PID 제어기와 비슷한 응답특성을 주지만 고주파에서는 이득을 줄여주어 잡음의 영향을 줄인다. 본 논문에서는 [5]에서와 달리 (3)에 주어진 실제적인 PID 제어를 고려할 것이다. 그리고 저역통과필터의 시상수값이 알려져 있으면 간편성을 위해 $\zeta_i = \zeta$ 라고 가정할 것이다.

다음에 주어지는 보조 정리들은 주요 결과를 유도하는데 필수적인 것들이다.

보조정리 1 [7]: 주어진 하나의 행렬 N 와 두 개의 대칭행렬 Q 와 R 에 대하여 다음의 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} Q & M \\ N^T & R \end{bmatrix} > 0$$

위의 LMI가 성립할 필요충분조건은 다음과 같다.

$$R > 0, \quad Q - NR^{-1}N^T > 0$$

그리고 다음의 LMI를 고려할 때

$$\begin{bmatrix} Q & M \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$$

필요충분조건은 다음과 같다.

$$R \geq 0, \quad Q - NR^{\#}N^T > 0, \quad N(I - RR^{\#}) = 0$$

여기에서 $R^{\#}$ 는 R 의 Moore-Penrose inverse이다.

보조정리 2 [7]: 주어진 두개의 행렬 G, N 와 한 개의 대칭행렬 W 에 대하여 다음의 행렬 부등식을 만족시키는 해 행렬 K 를 찾는 문제를 생각하자.

$$W + G^T K^T N^T + NKG < 0$$

만약 \mathcal{T}^T 와 N 의 행들이 행렬 G 와 N^T 의 널 공간의 기저(bases of the null spaces)들로 이루어진 행렬들이라고 할 때 위의 문제가 해 행렬을 존재할 필요충분조건은 다음 행렬 부등식이 성립하는 것이다.

$$\mathcal{T}^T W \mathcal{T} < 0, \quad N^T W N < 0$$

여기에서 만약 $\mathcal{T}^T = 0$ 거나 $N = 0$ 이면 거기에 대응하는 부등식은 자동적으로 성립하는 것으로 간주된다. 주어진 G 와 N 에 대하여 \mathcal{T}^T 와 N 이 유일하게 주어지지 않고 여러 개가 될 수 있는데 이들 중 어떤 것을 취해도 위의 사실은 성립된다.

III. PID 제어기의 존재 조건

실제적인 PID 제어기 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u &= F_1 y^f + F_2 \int_0^t y^f dt + F_3 \dot{y}^f \\
 \dot{y}^f &= Zy - Zy^f
 \end{aligned} \tag{4}$$

여기에서 $Z = \text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ 이다. 다음과 같이 상태벡터 $v^T = [v_1^T, v_2^T, v_3^T]$ 를 정의하도록 하자.

$$v_1 = x, \quad v_2 = \int_0^t y^f dt, \quad v_3 = y^f \tag{5}$$

그러면 시스템(1)과 입력(4)를 (5)의 상태벡터를 사용하여 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= Av_1 + B_1 w + Bu \\
 \dot{v}_2 &= y^f = v_3 \\
 \dot{v}_3 &= \dot{y}^f = Zy - Zy^f = ZCv_1 - Zv_3 + ZDw \\
 z &= C_1 v_1 + D_{11} w + D_{12} u \\
 u &= F_1 v_3 + F_2 v_2 + F_3 (ZCv_1 - Zv_3 + ZDw)
 \end{aligned}$$

그리고 위의 식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= \bar{A}v + \bar{B}_1 w + \bar{B}u \\
 z &= \bar{C}_1 v + D_{11} w + D_{12} u \\
 u &= \bar{F}Cv + \bar{F}Dw
 \end{aligned} \tag{6}$$

간편성을 위해 $\zeta_i = \zeta$ 라고 가정하면 $Z = \zeta I$ 이고 $\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}, \bar{C}_1, \bar{F}, \bar{C}, \bar{D}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \zeta C & 0 & -\zeta I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \zeta D \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \bar{C}_1 &= \begin{bmatrix} C_1^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ \zeta C & 0 & -\zeta I \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta D \end{bmatrix}, \\
 \bar{F} &= [F_1 \quad F_2 \quad F_3]
 \end{aligned} \tag{7}$$

결국 시스템 (1)에 대하여 실제적인 PID제어기 (3)을 설계하는 것은 (6)의 시스템에서 출력 제한 이득 F 를 찾는 것으로 환원됨을 알 수 있다. 그리고 (6)은 모든 PID제어기 이득 F 를 다음의 리아푸노프 행렬식을 만족시키는 리아푸노프 행렬 Y 를 사용하여 매개변수화할 수 있음을 의미한다.

$$YA + A^T Y < 0, \quad Y > 0 \tag{8}$$

여기에서 $A = \bar{A} + \bar{B}F\bar{C}$ 이다. 그리고 (6)의 시스템 식은 외란입력 w 에서 제어출력 z 로의 전달함수 $H_{zw}(s)$ 가 다음과 같음을 의미한다.

$$H_{zw}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{9}$$

여기에서 A, B, C, D 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 A &= \bar{A} + \bar{B}F\bar{C}, \quad B = \bar{B}_1 + \bar{B}F\bar{D} \\
 C &= \bar{C}_1 + D_{12}F\bar{C}, \quad D = D_{11} + D_{12}F\bar{D}
 \end{aligned} \tag{10}$$

결국 [7]과 같은 표준적인 결과들로부터 H_{∞} 성능 구속 조건인 $\|H_{zw}(s)\|_{\infty} < \gamma$ 를 만족시킬 필요충분 조건은 다음을 만족시키는 리아푸노프 행렬 Y 가 존재하는 것임을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} YA + * & * & * \\ B^T Y & -\gamma I & * \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad Y > 0 \tag{11}$$

여기에서 *는 대칭성에 의해 쉽게 유추할 수 있는 행렬 블록을 의미한다. (11)의 왼쪽 LMI는 다음과 같이 고쳐쓰일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Y\bar{A}+* & * & * \\ \bar{B}_1^T Y & -\gamma I & * \\ \bar{C}_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \\ D_{12} \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} \bar{C}^T \\ \bar{D}^T \\ 0 \end{bmatrix}^T + * < 0$$

그러므로 보조정리 1과 2를 사용하여 (11)이 다음의 LMI (12)와 비선형 구속조건 (13)과 동치임을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \aleph_1^T & \begin{bmatrix} Y\bar{A}+* & * & * \\ \bar{B}_1^T Y & -\gamma I & * \\ \bar{C}_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \aleph_1 < 0, \\ \aleph_2^T & \begin{bmatrix} \bar{A}X+* & * & * \\ \bar{B}_1^T & -\gamma I & * \\ \bar{C}_1 X & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \aleph_2 < 0, \\ & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$X = Y^{-1} \tag{13}$$

\aleph_1, \aleph_2 는 각각 $[\bar{C}, \bar{D}, 0], [\bar{B}^T, 0, D_{12}^T]$ 의 널공간(null space)를 형성하는 기저벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬들, 즉 $[\bar{C}, \bar{D}, 0]^T, [\bar{B}^T, 0, D_{12}^T]^T$ 의 orthogonal complement들이다. 결국 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1: 시스템 (1)과 주어진 필터 시상수값 ζ 를 갖는 실제적인 PID 제어기 (3)의 폐회로 시스템을 고려해보자. 양수 γ 가 주어져 있다고 가정하자. 그러면 H_∞ 성능 구속 조건인 $\|H_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 를 만족시킬 PID 제환 이득 행렬 F 가 존재할 필요충분조건은 행렬부등식 (11)을 만족시키는 해가 존재하는 것이며 제환 이득 행렬 F 는 행렬부등식 (11)의 해로 주어진다. 그리고 행렬 부등식 (11)의 해가 존재할 필요충분조건은 LMI (12)와 구속조건(13)를 만족시키는 해 행렬 (X, Y) 쌍이 존재하는 것이다.

주 1 : 안정한 전달함수의 H_∞ norm은 유한한 rms 입력신호에 대한 rms 입출력 이득을 의미하고 크기가 1인 임의의 정현파입력 신호에 대한 정상상태출력의 최고값으로 해석될 수 있다. 그리고 구속조건인 $\|H_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 는 $\|d(t)\| \leq 1/\gamma$ 를 만족시키는 임의의 외란 $w = d(t)z$ 에 대하여 폐회로 시스템 응답이 안정한 상태를 유지하는 것을 보장한다.

주 2: 보조정리 1과 2를 사용하여 (8)이 다음의 LMI (14) 그리고 비선형 구속조건 $X = Y^{-1}$ 과 동치임을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \aleph_{s1}^T (Y\bar{A} + \bar{A}^T Y) \aleph_{s1} < 0, \\ \aleph_{s2}^T (\bar{A}X + X\bar{A}^T) \aleph_{s2} < 0, \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

여기에서 \aleph_{s1}, \aleph_{s2} 는 각각 \bar{C}, \bar{B}^T 의 널공간(null space)를 형성하는 기저벡터(basis vector)들을 열로 갖는 임의의 행렬들, 즉 \bar{C}^T, \bar{B} 의 orthogonal complement들이다. 결국 시스템

(1)과 주어진 필터 시상수값 ζ 를 갖는 실제적인 PID 제어기 (3)의 폐회로 시스템을 안정화시키는 PID 제환 이득 행렬 F 가 존재할 필요충분조건은 LMI (14)와 비선형 구속 조건 $X = Y^{-1}$ 을 만족시키는 해 행렬 (X, Y) 쌍이 존재하는 것임을 쉽게 보일 수 있다.

주 3: 본 논문에서 제시된 방법은 LMI에 기반하였기 때문에 극배치조건, LQ/H_2 성능조건, covariance 성능조건, L_∞ 성능조건 등과 같이 LMI로 표현가능한 성능지수들을 설계시에 고려해 넣을 수 있는 융통성을 제공한다. [7]의 결과와 (8)을 참조하면 시스템 (1)과 주어진 필터 시상수값 ζ 를 갖는 실제적인 PID 제어기 (3)의 폐회로 시스템 응답이 미리 설정된 감쇠율(decay rate) α 이상이 되도록 보장하는 PID제어기 이득 F 를 다음의 리아푸노프 행렬식을 만족시키는 리아푸노프 행렬 Y 를 사용하여 매개변수화할 수 있음을 의미한다.

$$Y(\bar{A} + \alpha I) + (\bar{A}^T + \alpha I)Y < 0, \quad Y > 0 \tag{15}$$

보조정리 1과 2를 사용하여 (15) 식이 다음의 LMI (16) 그리고 비선형 구속조건 $X = Y^{-1}$ 과 동치임을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \aleph_{s1}^T (Y[\bar{A} + \alpha I] + *) \aleph_{s1} < 0, \\ \aleph_{s2}^T ([\bar{A} + \alpha I]X + *) \aleph_{s2} < 0, \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

주 4: PI형 제어기 설계를 할 때는 (7)에 정의된 행렬에서 F 를 다음으로 대체해야 한다.

$$F = [F_1 \quad 0 \quad F_3]$$

그리고 PD 제어기 설계를 할 때는 (7)에 정의된 행렬 $\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}, \bar{C}_1, F, \bar{C}, \bar{D}$ 는 다음으로 대체해야 한다.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ \zeta C & -\zeta I \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ \zeta D \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_1 &= \begin{bmatrix} C_1^T \\ 0 \end{bmatrix}^T, \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \zeta C & -\zeta I \end{bmatrix}, \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta D \end{bmatrix}, \\ F &= [F_1 \quad F_3] \end{aligned}$$

IV. PID 설계 알고리즘

PID 제어기 이득을 구하기 위해서는 주어진 존재조건들 (8)이나 (11), (15) 등을 풀어야 하는데 이들은 비선형적이라 풀기 어렵다. 최근에 출력 제환 이득을 찾는 문제에서 마주치게 되는 행렬부등식을 풀기 위한 LMI기반 알고리즘들이 많이 소개되었다. 그 중에서 [8]의 cone complementary linearization 알고리즘에 기반하여 설계 알고리즘을 제안할 것이다.

정리 1에 따라 (11)은 LMI (12) 그리고 비선형 구속조건 $X = Y^{-1}$ 과 동치이다. 그리고 다음의 최적화 문제 Σ 가 최적값 $n + 2p$ 를 가지면 (11)의 해가 존재함을 알 수 있다[8].

$$\begin{aligned} \Sigma: \text{minimize} \quad & \text{Tr}(XY) \\ \text{subject to} \quad & (12) \end{aligned} \tag{17}$$

위의 최소화 문제 Σ 의 구속조건 (12)는 LMI이고 목적함수 $\text{Tr}(XY)$ 는 임의의 주어진 feasible 값 (X_0, Y_0) 에서 다음과 같이 선형화할 수 있다[8].

$$\text{Tr}(XY) \approx \text{constant} + \text{Tr}(Y_0X + X_0Y)$$

결국 선형화 방법으로 위의 최소화 문제 Σ 에 대하여 근사해를 구하는 방식으로 존재조건 (11)을 풀고 PID 제어기 이득 행렬 F 를 설계할 수 있다.

PID 제어기 설계 알고리즘:

Step 1: 주어진 $A, B, B_1, C, D, C_1, D_{11}, D_{12}$ 를 가지고 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{C}_1, \overline{D}$ 를 구한다.

Step 2: $k=0, X_{-1}=Y_{-1}=I$ 로 놓고 다음 최적화 문제의 해 (X_0, Y_0) 을 구한다.

$$\Sigma_k : \text{minimize } N_k = \text{Tr}(Y_{k-1}X + X_{k-1}Y) \text{ subject to (12)}$$

만약 해가 존재하지 않으면 제안된 방법으로 구할 수 없으므로 빠져나온다.

Step 3: $k=k+1$ 로 하고, 최적화 문제 Σ_k 의 해 (X_k, Y_k) 를 구한다

Step 4: 만약 $k>1$ 이고 최적값 N_k^* 가 주어진 작은 값 δ 에 대해 $|N_k^* - N_{k-1}^*| \leq \delta$ 가 만족되면 Step 5로 가고, 아니면 Step 3으로 가라.

Step 5: 만약 최적값 N_k^* 가 $N_k^* \approx 2(n+2p)$ 이면 $Y=Y_k$ 로 놓고 Step 6으로 가라. 조건이 충족되지 않으면 제안된 방법으로 구할 수 없으므로 빠져나온다.

Step 6: Step 5에서 구해진 $Y=Y_k$ 를 (11)에 대입하면 (11)은 PID 이득 F 에 대하여 LMI이므로 이를 풀어 F 를 구한다.

주 4: 만약 (12)의 해가 존재한다고 가정하자. $k>1$ 일 때 (X_k, Y_k) 은 최적화 문제 Σ_k 의 해이므로 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$N_{k-1}^* \geq \text{Tr}(Y_{k-1}X_k + X_{k-1}Y_k) = N_k^*, \quad \forall k>1$$

그리고 [8]을 참조하여 수열 N_k^* 가 $N_k^* \geq 2(n+2p)$ 로 크기가 아래로 제한되어 있고 수렴함을 알 수 있다.

주 5: 위 알고리즘의 Step 2, 매 Step 3 그리고 Step 6는 풀기 쉬운 LMI 문제들이므로 [6]의 LMI control toolbox와 같은 LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 아주 쉽고 효율적으로 해를 구할 수 있다.

주 6: 만약 극배치조건, LQ/H_2 성능조건, L_∞ 성능조건, covariance 성능조건 등과 같이 LMI로 표현가능한 성능조건들을 설계에 고려해 넣으려면 위의 설계 알고리즘에서 최적화 문제 Σ_k 의 구속조건에 고려해 넣을 성능조건에 해당되는 LMI식을 부가하기만 하면 된다. 예를 들어 폐회로 시스템 응답이 H_∞ 성능 구속조건 $\|H_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 이외에 미리 설정된 감쇠율(decay rate) α 이상이 되도록 보장하는

PID제어기 이득을 구하려 한다면 위의 설계 알고리즘에 주어진 최적화 문제 Σ_k 의 LMI 구속조건 (12)를 (12)와 (16)으로 대체하면 된다. 즉 Σ_k 를 다음으로 대체시키기만 하면 된다.

$$\Sigma_k : \text{minimize } N_k = \text{Tr}(Y_{k-1}X + X_{k-1}Y) \text{ subject to (12), (16)}$$

V. 수치적 예

예 1: 다음의 데이터를 갖는 시스템 (1)을 고려하자.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [1 \ 1 \ 0], \quad D_{11} = 0, \quad D_{12} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

위의 시스템은 F4E 팬텀 전투기의 5000피트에서의 동역학이라 생각할 수 있다[9]. $\|H_{zw}(s)\|_\infty < 0.2$ 를 만족시키는 PD 제어기 설계가 요구된다고 가정하자. 기존의 방법 [5]는 $D \neq 0$ 이므로 위의 시스템에 적용불가능하다. 본 논문에서 제안된 방법인 지역통과필터를 포함하는 PD 제어를 설계하도록 하자. 지역통과필터의 시상수 ζ^{-1} , 외란 입력 w , 초기조건 $x(0)$ 가 각각 다음처럼 주어졌다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \zeta &= 1, \quad w = 0.2e^{-0.02t} \sin 2\pi t, \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = -1 \end{aligned}$$

앞장에서 주어진 알고리즘과 주4를 참조하여 다음과 같은 지역통과필터를 포함하는 실제적인 PD 제어를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= [0.109, 1.379]y^f + [0.026, 1.314]\dot{y}^f \\ \dot{y}^f &= y - y^f \end{aligned} \quad (19)$$

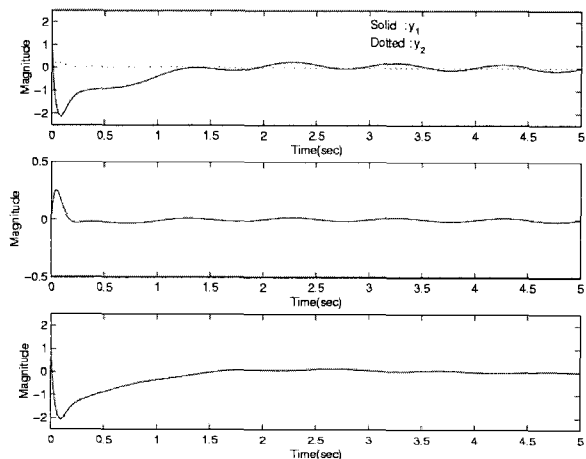


그림 1. 폐회로 응답(위 : 측정출력 y , 가운데: 입력 u , 아래: 제어 출력 z).

Fig. 1. Closed-loop responses(Top : measured output y , Center: input u , Bottom: controlled output z).

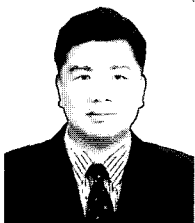
그림 1은 시스템 (18)과 PD제어기 (19)의 폐회로 응답을 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 제안된 방법이 성공적으로 다변수 시스템에 적용될 수 있음을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 폐회로 시스템의 안정도와 미리 설정된 H_∞ 성능 구속조건을 보장하는 다변수 PID 제어기를 설계 문제를 고려했다. 측정 출력이 잡음에 노출되게 마련인 실제의 경우에 PID 제어기는 출력값을 1차의 저역통과필터(low pass filter)로 걸러 잡음의 증폭으로 인한 악영향을 줄이는 점을 고려하여 저역통과필터를 포함하는 실제적인 PID 제어기 설계방법을 제안했다. 제안된 방법은 이전의 방법[5]와 달리 외란입력으로부터 측정 출력이나 제어 출력으로의 feedthrough 항의 값이 0이 된다는 구속조건을 요구하지 않는다. 설계문제를 정적출력회환문제로 환원하고 PID 제어기가 존재할 필요충분조건을 유도하고 PID 제어기의 공식을 제시했다. 부가적으로 미리 설정된 감쇠율을 만족시키는 PID 제어기의 존재조건도 제시했다. 마지막으로 제어기 설계를 위한 LMI기반 알고리즘을 예제와 함께 제시했다.

참고문헌

[1] E. Graassi, K. S. Tsakalis, S. Dash, S. V. Gaikwad, W. MacArthur, and G. Stein, "Integrated system identification and PID controller tuning by frequency loop-shaping," *IEEE Trans. Control System Technology*, vol. 9, pp. 285-294, 2001.

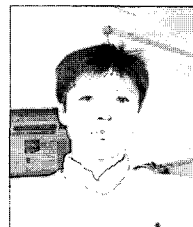


이재관

1968년 1월 18일생. 1991년 2월 서울대학교 기계설계학과 준우등 졸업(공학사). 1993년 2월 서울대학교 기계설계학과(공학석사). 1999년 2월 서울대학교 기계설계학과(공학박사). 1999년 3월~2001년 2월 서울대학교 정밀기계설

계공동연구소 연구원. 2002년 3월~현재 삼성 SDS 책임 컨설턴트. 관심분야는 반도체 관련 설비 및 제어시스템 개발, 유전 알고리즘 및 최적화 알고리즘.

- [2] H. Panagopoulos, K. J. Astrom and T. Haggund, "Design of PID controllers based on constrained optimisation," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 149, pp. 32-40, 2002.
- [3] A. J. Isaksson and S. F. Graebe, "Derivative filter is an integral part of PID design," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 149, pp. 41-45, 2002.
- [4] P. Cominos and N. Munro, "PID controllers: recent tuning methods and design to specification," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 149, pp. 46-53, 2002.
- [5] F. Zheng, Q.-G. Wang, and T.H. Lee, "On the design of multivalabel PID controllers via LMI approach," *Automatica*, vol. 38, pp. 517-526, 2002.
- [6] P. Gahinet, A. Nemirovski and A. J. Laub, *LMI Control Toolbox User's Guide*, Natic, MA: The MathWorks Inc., 1995.
- [7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory*, Philadelphia, SIAM, 1994.
- [8] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami, "A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, pp. 1171-1176, 1997.
- [9] U. Shaked, "An LPD approach to robust H_2 and H_∞ static output-feedback design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, pp. 866-872, 2003.



최한호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략

기술 연구소 연구원. 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수. 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상 현실 및 로봇틱스.