한국수학사학회지 제18권 제3호(2005년 8월), 67-78

라이프니츠의 무한과 무한소의 개념과 무한의 연산*

숙명여자대학교 수학통계학부 이진호
jhlee@sookmyung.ac.kr

17세기에 고안된 미적분학의 방법은 그 획기적인 창의성이나 유용성에도 불구하고 논리적 엄밀성에 있어 많은 논란이 되었다. 그 근본적인 이유는 무한(infinite)과 무한소(infinitely small)의 개념과 이들을 수학적으로 어떻게 다룰 것인지에 대한 견해가 정립되어있지 않았기 때문이라고 볼 수 있다. 본 논문에서는 라이프니츠의 무한과 무한소에 대한 개념을 갈릴레오의 무한개념과 대비하여 알아보고 라이프니츠가 무한소의 개념에 기초한 불가분량의 방법으로 보인 연속인 곡선의 적분가능과, 무한 무한소에 대한 연산규칙들을 수학사적인 관점에서 고찰해 보고자 한다.

주제어 : 라이프니츠, 무한소, 무한, 불가분량의 방법

0. 서론

17세기 뉴턴(Isaac Newton, 1642~1727)과 라이프니츠(Gottfried Wilherm Leibniz, 1646~1716)에 의해 고안된 미적분학은 수학사에 있어 커다란 전환점이 되었다. 그 이전 수학이 정적인 대상들을 다루었다면 뉴턴과 라이프니츠 이후의 수학은 물체의 운동을 포함하여 그 연구와 응용의 분야가 비약적으로 증가하였다. 그러나 이와 같이 현대수학의 커다란 부분을 차지하고 있는 미적분학과 해석학의 기본개념인 극한과 연속의 기본개념은 19세기에 이르러 코시(Augustin Louis Cauchy, 1789~1857)를 비롯한 여러 수학자들에 의하여 논리적이고 엄밀하게 정의되기까지 다소 무분별하고 직관적으로 사용되어졌다.

미분의 개념이 17세기에 고안된 것과는 대조적으로 적분의 개념은 무한의 문제와 함께 고대 그리스 시대부터 그 유래를 찾을 수 있다. 현재의 적분법에 가장 근접한 방법을 사용한 사람으로는 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287~212)를 생각할 수 있는데, 그는 면적 또는 부피를 구하는데 있어 그것을 매우 얇은 조각으로 가르는 방법

* 본 논문은 숙명여자대학교 교내 연구비의 지원을 받았음.

을 사용하였다. "아르키메데스의 평형법" 이라고 알려진 이러한 방법을 이용하여 그는 구의 부피를 계산하였다[4].

17세기에 들어 케플러(Johann Kepler, 1571~1630)가 원의 구적을 구한 방법이나 회전체의 부피를 구하는 문제에서 극한의 존재와 무한개념을 적극적으로 도입한 것을 알 수 있다. 카발리에리(Bonaventura Cavalieri, 1598~1647)는 1635년 출판된 "불가분량의 기하학(Geometria indivisibilibus)"에서 '불가분량의 방법(method of indivisibles)'을 사용하였는데 선은 그 불가분량인 점의 집합으로, 면은 그 불가분량인 선의 집합체로, 그리고 입체도형은 그 단면과 같은 무한히 많은 불가분량의 집합으로 이루어졌다고 간주하였다. 그의 방법들은 넓이와 부피를 계산하는 유용한 도구로 사용되었으나 불가분량에 대한 모호한 개념과 길이가 없는 점이 모여 선이 되고 부피가 없는 면이 모여 입체도형을 이루게 되는 근본적인 차이를 갖는, 차원이 다른 도형을 혼용하는 문제로 인해 많은 논란을 야기하였다([1], [3]). 그 당시 이와 같은 미적분학의 방법이 그 획기적인 창의성이나 유용성에도 불구하고 논리적 엄밀성에 있어 많은 논란이 되었던 것은 무한(infinite)과 무한소(infinitely small)의 개념과 이들을 수학적으로 어떻게 다룰 것인지에 대한 견해가 정립되어있지 않았기 때문이라고 볼 수 있다.

이 논문에서는 라이프니츠의 무한소량에 대한 개념을 갈릴레이(Galileo Galilei 1564~1642)의 무한소량에 대한 개념과 대비하여 알아보고 이 개념을 기초로 라이프니츠가 곡선으로 둘러싸인 영역의 적분 가능함을 불가분량의 방법으로 보인 것과 무한소, 무한대에 대한 연산규칙과 그 활용을 알아보고자 한다.

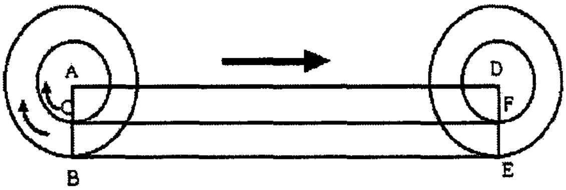
1. 갈릴레오의 '양이 없는' 무한(소량)의 개념

갈릴레이는 코페르니쿠스(Nicolas Copernicus, 1473~1543)의 견해를 지지한 천문학에 관한 연구서 "두 개의 주요한 우주 체계에 관한 대화 (Dialogue Concerning the Two Chief World Systems)(1632)"와 역학과 물체의 강도에 관한 연구서 "두 가지 새로운 과학(The Two New Sciences)(1638)"을 썼는데 이 저서들의 내용에서 갈릴레이의 무한대와 무한소의 개념을 알아볼 수 있다[4]. 이 저서들에서 갈릴레이는 수학적 또는 물리적인 예로부터 자신의 이론을 전개해 나가고 있는데 그 중 무한의 개념과 관계가 있는 다음의 두 가지 문제를 생각해 볼 수 있다.

한 가지 문제는 아리스토텔레스의 바퀴의 역설문제이다.

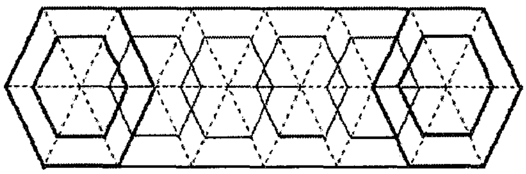
아래 그림의 큰 원을 B부터 E까지 한바퀴 회전시키면 BE는 큰 원의 원주의 길이와 같고 거기에 고정되어있는 작은 원도 한바퀴 회전하므로 CF는 작은 원의 원주와 같다. 따라서 둘 다 똑같은 거리를 움직인 게 되어 두 원의 원둘레의 길이가 같다. 더

나아가서 '모든 원의 원주의 길이는 같다.' 는 결론을 얻을 수 있다.



[그림 1]

아리스토텔레스(Aristoteles, B.C. 384~322)의 바퀴의 역설문제를 해결하기 위하여 갈릴레오는 커다란 다각형 안에 작은 다각형이 함께 굴러가는 모형을 생각하였다. 그리고 원을 무한히 많은 변을 가지는 다각형으로 이해함으로써 이 문제를 해결하려고 하였다.



[그림 2]

다각형의 변의 수가 유한인 경우와 무한인 경우에 대한 수학적 분석을 위하여 그는 다각형의 한 변이 그 길이를 더 작게 나눌 수 있는, 유한의 변을 갖는 다각형인 경우와 다각형의 한 변이 그 길이를 더 이상 나눌 수 없는, 무한히 많은 변을 갖는 다각형인 경우로 나누어 생각하였는데 이 과정에서 갈릴레이는 다음과 같은 중요한 문제를 고려하였다.

1) 다각형의 변의 수를 늘려 가는 과정에서 양(길이)이 있고 나눌 수 있는 유한개의 변에서 양이 없는(따라서 나눌 수 없는) 무한개의 변으로 가는 과정을 어떻게 다룰 것인가?

이 과정은 단계별로 진행되어서는 마지막단계에 이를 수 없다. 따라서 갈릴레이는 변의 길이를 나누는 단계에서 무한히 많은, 불가분량이 되는 마지막 나누는 과정은 전혀 새로운 과정으로 생각하였다.

2) 이 유한에서 무한으로의 전이의 과정은 새로운 영역이다. 무한으로 가는 과정에서 무한히 큰 차이를 만나게 된다. 여기에서 갈릴레이는 무한히 많은 변으로 이루어진 다각형의 한 변은 나눌 수 없는(불가분) 즉, 양(길이)이 없는 것으로 생각하였다.

3) 이 두 과정에서 양이 있는 것은 나눌 수 있는 것이고 양이 없는 것은 나눌 수 없는 것이라고 구별하고 전자의 마지막 단계를 terminated quantity라는 용어를 사용하여 무한(infinite)이라는 용어와 구별하였다. 이는 다각형의 한 변이 양(길이)이 있는 경우와 양(길이)이 없는 경우로 생각한 것이다.

두 번째 문제는 자연수의 집합과 제곱수의 집합의 비교문제이다.

갈릴레이는 두 집합의 원소간의 일대일 대응으로부터 '제곱수 전체의 개수는 자연수 전체의 개수보다 적지 않으며, 자연수 전체의 개수는 제곱수 전체의 개수보다 많지도 않다.' 라고 언급하며 무한집합의 영역에서는 '전체는 부분보다 크다'는 유클리드(Euclid)의 공리가 성립하지 않는다는 것과 무한이란 '같다', 또는 '크다' '작다'와 같은 양(quantity)의 개념을 갖지 않는다고 하였다[8].

갈릴레이의 이러한 '무한(infinite)'개념은 '크기'로 특정되는 성질을 갖지 않을 뿐 아니라 갈릴레이는 무한집합의 일대일 대응으로부터 유한집합의 성질과 대비되는 무한집합의 특성이나 무한집합간의 구별을 이끌어내지 못하고 있다.

2. 라이프니츠의 무한개념

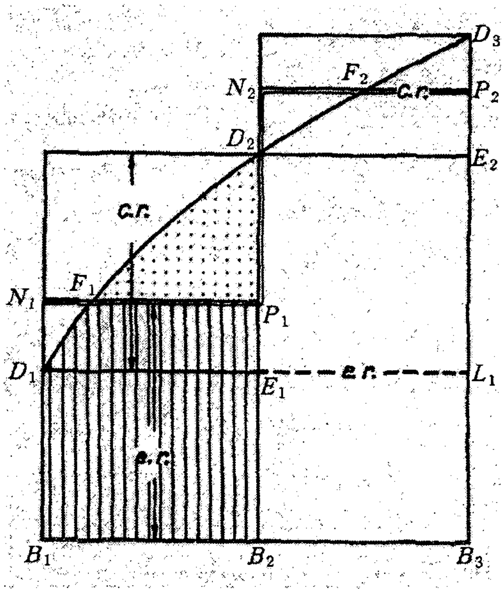
갈릴레이가 양이 없는 개념으로 불가분량을 생각한 것과 달리 라이프니츠는 무한소량을 다음과 같이 정의하였다. '무한소량(infinitely small quantity)이란 임의의 주어진 양보다 적으나 0보다는 큰 양이다. 마찬가지로 무한대량 (infinitely large quantity)은 어떤 주어진 양보다 큰 양이다.' 라이프니츠는 무한소량과 무한대량을 변량으로 간주하였으며 무한인 변량에 대하여 성립하는 법칙들은 유한인 변량에 대해서도 성립하여야 한다고 하였다[8].

라이프니츠는 연속인 곡선으로 둘러싸인 영역의 적분가능성을 보인 그의 정리 "The integrability of certain curves"에서 곡선으로 둘러싸인 영역의 면적을 무한소량의 개념에 기초한 '불가분량의 방법(method of indivisibles)'을 이용하여 구할 수 있음을 보이고 있다. 여기에서 그는 선을 1차원의 면적이 없는 선이 아니라 부정의 소량(indefinite smallness)의 폭을 가지는 사각형으로 설명하고 있다. 즉 면적을 불가분량인 선(무한소량의 면적을 가지는 직사각형)들의 합으로 이해하여 직선을 누적하여(sums of lines) 구할 수 있음을 보이고 있다[7].

이 증명과정을 통하여 라이프니츠의 무한소량의 개념과 그 활용을 구체적으로 알아볼 수 있다. 증명과정은 현재 사용되고 있는 리만합(Riemann sum)을 이용하여 적분가능을 정의하는 방법과 거의 일치하며 곡선으로 둘러싸인 영역의 면적과 누적된 사각형들의 면적과의 차이를 임의의 작은 값보다 작게 만들 수 있음을 보이고 있다.

이 증명에서 라이프니츠는 '같다(equality)'의 새로운 정의를 사용하는데 두 값의 차이가 임의의 값보다 작게 될 때 두 값을 '같다'고 하였다.

연속인 곡선으로 둘러싸인 영역의 적분가능성을 보인 증명에서 불가분량의 방법을 다음과 같이 사용하였다.



[그림 3]

점 D_1, D_2, D_3 를 지나는 연속인 곡선과 직선 D_1B_1, B_1B_3 , B_3D_3 로 둘러싸인 영역의 면적을 S 라 하면 S 를 다음과 같은 과정으로 구할 수 있음을 보이고 있다.

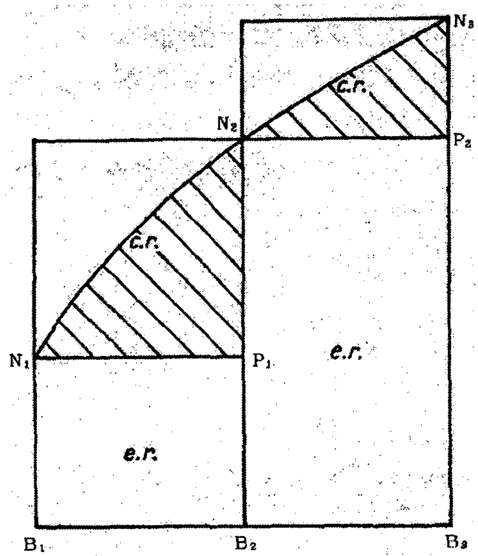
1. 적분하려는 영역([그림 3]에서 구간 B_1B_3)을 유한개의 구간으로 분할한다. 여기에서는 두 개의 구간으로 나누면 위의 [그림 3]과 같게 된다. 분할된 각 구간에 대하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 영역(위 그림에서 $D_1B_1B_2D_2$)과 사각형 ($N_1B_1B_2P_1$)을 만들 수 있다.
2. 영역 $D_1B_1B_2D_2$ 과 사각형 $N_1B_1B_2P_1$의 면적의 차이를 계산하자.
   두 영역에서 $D_1E_1P_1F_1$은 공통이므로 두 영역의 차 는
   $| D_1B_1B_2D_2 - N_1B_1B_2P_1 | = |F_1P_1D_2 - F_1N_1D_1|$
   $\leq | D_1E_1D_2 | \leq \overline{D_1E_1} \times \overline{E_1D_2}$ 이다.
3. 분할에 의하여 만들어진 사각형 $N_1B_1B_2P_1$, $N_2B_2B_3P_2$ 을 합하여 계단형 도형

$N_1B_1B_3P_2N_2P_1N_1$을 만들고 이 도형의 면적을 S_1 이라 하면 과정2 를 이용하여 $|S-S_1| \le \overline{D_1E_1} \times \overline{E_1D_2} + \overline{D_2E_2} \times \overline{E_2D_3}$ 을 얻는다. 분할된 구간의 길이중 가장 큰 값을 h라 두면 $\overline{D_1E_1} \times \overline{E_1D_2} + \overline{D_2E_2} \times \overline{E_2D_3} \le L_1D_3 \cdot h$ 가 성립한다. 따라서 $|S-S_1| \le L_1D_3 \cdot h$ 를 얻는다.

4. 점 D_1, D_2, D_3 를 지나는 곡선이 연속이므로 h를 임의의 값보다 작은 값(infinitely samall quantity)으로 잡을 수 있다.
5. 과정 3 과 과정 4 에 의하여 $|S-S_1|$를 임의의 값보다 작게 만들 수 있고 S의 값은 S_1으로 구할 수 있다.

이와 함께 라이프니츠는 위의 증명보다 좀 더 간단한 경우에 해당하는 'common methods of indivisibles' 을 소개하고 있다. 이 는 [그림 4] 의 점 N_1, N_2, N_3 를 지나는 연속인 곡선과 직선 N_1B_1, B_1B_3 , B_3N_3 로 둘러싸인 영역의 면적을 구하는 방법으로 이 면적을 계단형 도형 $N_1B_1B_3P_2N_2P_1N_1$의 면적으로 구할 수 있음을 보이고 있다.

[그림 4] 는 [그림3]에서 점 N과 점 D 일치하는 경우로 볼 수 있으며 증명과정은 본질적으로 같다. 라이프니츠가 불가분량의 방법을 이용하여 임의의 곡선의 적분가능을 보인 방법은 현재 미적분학의 적분가능 개념에서 쓰이는 리만합 또는 상합 하합의 개념과 본질적으로 같은 방법을 사용하였음을 알 수 있다



[그림 4]

라이프니츠는 이와 같이 불가분량의 방법을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 영역의 면적을 선분들(실제로는 높이가 충분히 작은 직사각형들)을 누적하여 구할 수 있음을 보였다.

3. 라이프니츠의 무한에 대한 연산법칙과 그 활용

라이프니츠는 그의 논문 "On the arithmetical quadrature of the circle, the ellipes and the hyperbola."에서 무한에 대한 다음의 법칙들을 대부분의 경우 증명 없이 사용하고 있다[10].

(1) 유한값(finite) + 무한대(infinite) = 무한대 (infinite)

(2) 유한값 ± 무한소(infinitely small) = 유한값

x 와 y 가 유한값이고, $x=y+z$, (z 는 무한소)이면

$$x - y \approx 0 \text{ (not assignable difference)}$$

(3) x_1, x_2 가 무한대이고 $x_1 > x_2$ 이면 $x_1 - x_2 =$ 무한대

(4) 무한대 ± 무한소 = 무한대

(5) 유한값 × 무한소 = 무한소

(6) 무한대 × 무한소 = 무한대 또는 유한값 또는 무한소

(각 경우에 대한 증명 필요)

(7) 무한대 × 무한대 = 무한대

또한 x^n이 무한대이면 x 도 무한대이다.

(8) 무한대 ÷ 무한대 = 무한대 또는 유한값

(각 경우에 대한 증명 필요)

(9) x가 무한소, $y > 0$, $y < x$ 이면 y 는 무한소이다.

(10) 유한값 ÷ 무한소 = 무한대 ÷ 유한값 = 무한대

(11) 무한소 ÷ 유한값 = 유한값 ÷ 무한대 = 무한소

(12) 무한소인 z_1, z_2 에 대하여 $x \div y = (x+z_1) \div (y+z_2)$

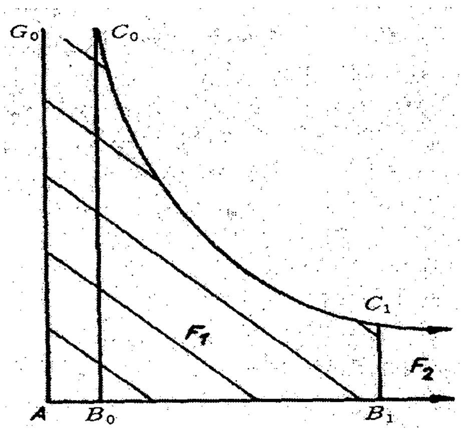
라이프니츠가 이런 연산법칙을 어떻게 활용하였는지를 라이프니츠의 사후, 정리되어 발간된 논문에 실린 다음의 정리들과 그의 응용을 통하여 알 수 있다[10].

정리 20. 세 값 X, Z, V에 대하여 $\dfrac{V+X}{V+Z}=m$, $(m \neq 1)$ 일 때

1) 만일 X, Z가 유한값이면 V도 유한값이다
2) 만일 X 또는 Z가 무한대이면 V도 무한대이다.

정리 21. 쌍곡선 $y^m x^n = a$ 에서 AB_0가 무한소이고 $(AB_0)^n \cdot (B_0C_0)^m = a$ 일 때 $AB_0 \cdot B_0C_0$ 은 $m < n$ 이면 무한대, $m > n$ 이면 무한소, $m = n$ 이면 유한값이다.

정리 22. 쌍곡선 $y^m x^n = a$ $(m \neq n)$에 의하여 만들어지는 무한히 긴 두 영역 F_1 과 F_2에 대하여 $m < n$ 이면 영역 F_1 의 면적은 무한대이고, $m > n$ 이면 영역 F_1 의 면적은 유한하다.



[그림 5]

증명) 증명을 다음과 같은 단계로 나누어 생각하자.

1. 우선 AB_0 가 무한소(infinitely small)이면 B_0C_0는 무한대(infinite)이다.

AB_1 은 유한값이고 AB_0는 무한소이므로 연산법칙(10)에 의해 $\dfrac{(AB_1)^n}{(AB_0)^n}$ 은 무한대이다.

$(B_1C_1)^m \cdot (AB_1)^n = a$, $(B_0C_0)^m \cdot (AB_0)^n = a$이므로

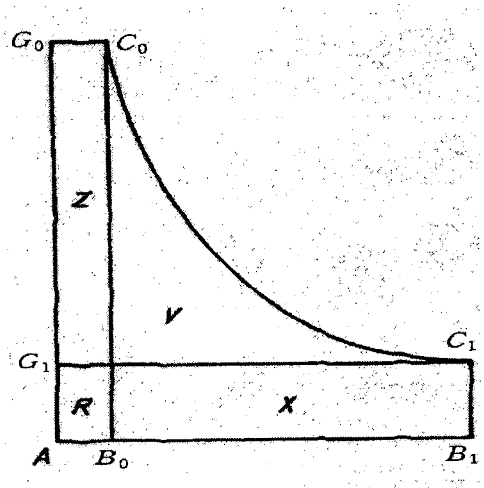
$\dfrac{(AB_1)^n}{(AB_0)^n} = \dfrac{(B_0C_0)^m}{(B_1C_1)^m}$ 이다.

B_1C_1은 유한값이고 $\dfrac{(B_0C_0)^m}{(B_1C_1)^m}$ 은 무한대이므로 연산법칙(10)에 의해 $(B_0C_0)^m$ 은 무한대이고 (7)에 의해 B_0C_0도 무한대이다.

2. 길이가 유한값인 두 직선 AB_1, B_1C_1 곡선 C_1C_0, 길이가 무한소인 직선 C_0G_0, 직선 AG_0 로 둘러싸인 도형의 면적을 F 라 하자.

직선 C_0G_0의 길이는 AB_0의 길이와 같으므로 증명 1.에 의해 직선 AG_0의 길이는 무한대임을 알 수 있다. 이 도형을 [그림6]과 같이 4개의 부분으로 나누고 $F = V + X + Z + R$ 이라 두자.

만일 $Z + R$ 이 무한대이면 F도 무한대이므로 $Z + R$ 이 무한대가 되는 경우를 생각하자.



[그림 6]

3. $m \neq n$이면 $\dfrac{V + X}{V + Z} = \dfrac{m}{n}$ 과 정리 2로부터 X가 유한값일 때 Z가 무한대이면 V도 무한대가 되고, Z가 유한값이면 V도 유한값임을 알 수 있다.

$R = AB_0 \cdot AG_1$이고 AB_0가 무한소이면 연산법칙(5) 에 의해 R은 무한소이다. 따라서 Z가 무한대이면 $F = V + X + Z + R$도 무한대이고 Z가 유한값이면 $F = V + X + Z + R$도 유한값임을 알 수 있다.

4. R이 무한소이므로 연산법칙(2)에 의해 Z가 유한값이면 $Z + R$도 유한값이고 Z가 무한대이면 $Z + R$도 무한대이다. 3에 의하면 F가 무한대인 경우를 알기

위해서는 $Z+R$가 무한대인 경우를 조사하면 된다.

5. $m<n$이면 정리 21에 의해 $Z+R$은 무한대이고 R이 무한소이므로 연산법칙 (4)에 의해 Z는 무한대이다.

   따라서 과정 3에 의해 $F=V+X+Z+R$는 무한대이다.

   $m>n$이면 정리 21에 의해 $Z+R$은 무한소이다.

6. $Z+R$은 무한소이면 V가 유한값임을 보이자.

   1) 만일 V가 무한소이면 $V+Z$도 무한소이다.

   X가 유한값이므로 연산법칙(2)에 의해 $V+X$는 유한값이다. 연산법칙(10) 에 의해 $\frac{V+X}{V+Z}=\frac{m}{n}$ 에 모순이 되므로 V는 무한소가 아니다.

   2) 만일 V가 무한대이면 $V+X$와 $V+Z$는 모두 무한대이고 연산법칙(3)에 의해 $(V+X)-(V+Z)$는 무한대이다.

   그러나 $(V+X)-(V+Z)=X-Z$ 는 유한값이므로 모순이 된다.

   따라서 1), 2)에 의해 V는 유한값이다.

7. $m>n$ 이면 $Z+R$은 무한소이고 과정 6에 의해 V는 유한값이므로 $F=V+X+Z+R$는 유한값이다.

8. 과정 2~과정 7에서 $m<n$이면 영역 F_1의 면적은 무한대이고 m과 n의 위치를 바꾸어 생각할 수 있으므로 $m>n$이면 영역 F_1의 면적은 유한값임을 알 수 있다.

4. 결론

뉴톤과 라이프니츠에 의해 고안된 미적분학의 개념은 수학의 여러 분야에 있어 강력하고 효과적인 도구로 사용되었으나 엄밀한 개념의 정립 없이 사용되기도 하였다. 라이프니츠는 갈릴레이의 "양이 없는" 무한소 개념과 근본적으로 다른 무한소와 무한대의 개념을 정의하면서 "수학은 양(quantity)을 다루는 과학"이고 따라서 무한소와 무한대도 양을 가지는 값으로 이들도 수학자가 엄밀한 방법으로 다룰 수 있어야 한다고 강조하였다. 무한소와 무한대에 대한 라이프니츠의 정의는 이들을 엄밀한 방법으로 다룰 수 있는 기초를 제공하였고 무한에 대한 연산을 가능하게 하였으며 본문에서

본 바와 같이 그가 사용한 불가분량의 방법은 현대의 적분가능을 정의하는 개념에 거의 그대로 사용되는 등 근현대 수학의 발전에 큰 영향을 주었다.

감사의 글 본 논문을 심사하신 심사위원의 지적과 조언에 감사 드립니다.

참고 문헌

1. 김용운, 김용국(1997), 수학사의 이해, 도서출판 우성
2. G. MacDonald Ross/문창옥 (2000), 라이프니츠, 시공사.
3. Howard eves/이우영,신항균(1995), 수학사, 경문사.
4. Howard eves/ 허민, 오혜영(1994), 수학의 위대한 순간들, 경문사
5. Baron, Margaret E.(1987) The origin of the infinitesimal calculus. New York. Dover
6. Boyer, Carl.(1959) *The history of the Calculus and its conceptual development.* New York. Dover
7. Eberhard Knoblock.(2002) *"Leibniz's rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums."* Synthrses. 133 , 59-73
8. Eberhard Knoblock.(1999) *"Galileo and Leibniz : different approach to infinity."* Archive for the history of the exact science. 54 , 87-99
9. Eberhard Knoblock.(1994) *"The infinite in Leibniz's Mathematics-The historiographical method of comprehension in context."* Boston studies in the Philosophy of science 151, 87-99
10. Leibniz, Gottfried, Wilhelm.(1993) *"On the arithmetical quadrature of the circle, the ellipes and the hyperbola."* Klasse 3 . 43

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 18 No. 3 (Aug. 2005), 67-78

Leibniz's concept of infinite and infinitely small and arithmetic of infinite

Division of mathematics and statistics, Sookmyung Women's Univ. **Jin Ho Lee**

In this paper we deals with Leibniz's definition of infinite and infinitely small quantities, infinite quantities and theory of quantified indivisibles in comparison with Galileo's concept of indivisibles. Leibniz developed 'method of indivisible' in order to introduce the integrability of continuous functions. also we deals with this demonstration, with Leibniz's rules of arithmetic of infinitely small and infinite quantities.

Key words : Leibniz, infinitely small quantity, infinite, method of indivisible

2000 Mathematics Subject Classifications : 01A45

ZDM Subject Classifications : A30

논문 접수 : 2005년 7월 4일, 심사 완료 : 2005년 8월