한국수학사학회지 제18권 제3호(2005년 8월), 55-66

소수에 의한 실수 정의의 의미

광남고등학교 변희현
bhhhss@dreamwiz.com

현재 학교수학에서는 소수를 기초로 무리수와 실수를 지도한다. 이와 관련하여, 이 글에서는 역사적 분석을 통하여 무한소수에 의한 실수와 무리수 정의의 본질을 확인하였다. 역사적으로 실수의 형성은 모든 크기의 수치화, 무리수의 형성은 통약불가능한 양의 수치화라는 의미를 가지고 있다. 이러한 역사적 분석에 기초하여 실수 개념에의 의미있는 접근을 기대할 수 있는 구체적 지도 방안을 제안하였다.

주제어 : 소수, 실수, 무리수, 통약불가능성

0. 서론

현재 학교수학에서 실수는 소수를 기초로 9-가 단계에서 도입된다. 이는 $\sqrt{2}$ 와 같은 제곱근을 다루면서 분수로 표현할 수 없는 즉, 유리수가 아닌 수의 존재를 보인 후, 유리수가 아닌 수로 무리수를 다룬다. 그리고 무리수의 정의는 소수를 중심에 두고 8-가 단계에서 다룬 유리수와 소수와의 관계를 바탕으로 유리수가 아닌 곧, 유한소수도 순환소수도 아닌 순환하지 않는 무한소수로 하고, 실수로의 수 체계 확장을 꾀한다. 이는 전체집합이 소수들의 집합임을 전제로 하여 유리수의 여집합으로 무리수를 정의하는 것이다. 그러나, 교과서에서는 실수인 전체집합을 왜 소수들의 집합으로 두는지를 명확히 하지 않고, 순환하지 않는 무한소수에 의한 무리수 정의 역시 소수 표현을 바탕으로 한 언어 논리적인 범주화의 측면에서 다루어지는 경향이 강하다. 이즈음에서 다음과 같은 질문을 제기할 수 있다.

무한소수에 의한 무리수 및 실수 정의는 단순한 언어 논리적 범주화인가? 아니면 소수에 의한 정의 이면에 범주화 이상의 어떠한 본질이 존재하는가?

이 글에서는 위의 질문에 답을 하기 위해 소수의 역사적 분석을 시도함으로써, 소수에 의한 실수 정의가 갖는 의미를 고찰하고 그 안에 내재된 실수와 무리수의 본질을 드러내고자 한다. 그리고, 이에 기초하여 현재 학교수학에서 소수에 의한 실수 지도의 개념적 보완을 위한 방안을 구체화시키고자 한다.

1. 소수의 역사적 분석

역사적으로 소수에 관한 명확한 설명이 이루어진 것은 1585년 Stevin에 의해서이다. Stevin은 자신의 저서 ≪*Arithmetique*≫에서 소수를 '모든 계산과 측정이 분수없이 완벽해질 수 있는 산술의 종류'로 정의한다[15, p.161]. 모든 계산과 측정을 분수없이 가능하게 한다는 것은, 일견 분수의 십진법화를 통해 소수가 분수를 대신하여 분수의 또 다른 표현 정도로 소수를 정의한 것으로 생각할 수도 있다. 그런데, Stevin의 소수 정의를 단지 분수의 십진법화로 가정한다면 인류에게 분수 개념과 그 표기법이 필요하게 된 청동기 시대[9, p.19]와 소수 정의 사이에 왜 그렇게 긴 시간이 필요했을까하는 의문이 든다. 이에 Stevin의 소수 정의가 갖는 역사적 의의를 면밀하게 살피고자 한다.

먼저, 정수 부분의 십진기수법을 분수 부분까지 확장한 최초의 수학자는 Stevin이 아니고, 그보다 더 일찍 al-Kashi(?-1436), Rudolff(1500-1545)와 Viete(1540-1603) 등에 의해서 그러한 시도가 있었다[12, p.30] 그러나, 일반인과 수학을 실용적으로 사용하는 사람들에게 소수가 널리 알려지게 된 것은 사람이 사는 데 필요한 계산을 분수없이 정수만으로 쉽게 하는 방법의 대중적인 사용을 원했던 Stevin 이후이다[9, p.516]. 이는 정수 부분의 십진법의 아이디어가 소수 부분까지 명확하게 확장되고 종합된 것은 Stevin에 의한 것을 의미한다.

또한, Stevin의 소수 정의는 연속량을 수로 나타내고 수에 연속성을 부여하여 수와 크기를 동일시하는 계기를 마련하게 된다고 한다[14]. 현재의 관점에서는 임의의 크기에 수값을 부여하는 것이 가능하고 따라서 수와 크기를 동일시하는 것이 너무도 자연스럽고 하등 이상할 것이 없는 일이나, 현재의 관점을 갖기까지 그 역사적 과정은 다음과 같다.

그리스 시대 Pythagoras 학파는 '만물의 근원은 수(자연수)'라는 신념을 가지고 있었으나, 정사각형의 한 변과 대각선의 길이와 같이 공통의 측정단위가 없는 즉, '통약불가능한(incommensurable)' 양의 발견으로 자연수의 비로 나타낼 수 없는 양의 관계가 존재함을 깨닫게 된다[1]. 이는 산술화를 통하여 수학을 통합하고자 했던 수학사 최초의 시도가 통약불가능한 양의 발견으로 좌절된 것으로[8, p.222], 이러한 위기를 극복하기 위해 그리스 수학은 양을 이산량과 연속량의 두 종류로 구분하고, 이를 각각 수와 크기의 개념에 대응시켜 산술과 기하의 영역에서 다루도록 하였다.

그리스 수학의 이러한 이원론적 구분을 좀 더 살펴보면, 수는 사물을 세어나가는

1) '통약불가능'의 사전적 의미는 '같은 표준으로 잴 수 없는' 또는 '공약수가 없는'이다. 이 글에서는 '통약가능'을 두 선분의 길이를 '같은 단위로 측정할 수 있다'는 의미로 사용한다. 두 선분의 길이를 같은 단위로 잰다는 것은 어떤 선분(e)가 존재하여 두 선분 a, b를 선분 e의 정수배, 즉 적당한 정수 p, q가 존재하여 $a=pe,\ b=qe$ 로 나타낼 수 있음을 뜻한다. 이는 $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ 로서 두 선분의 길이의 비가 $\frac{(\text{정수})}{(\text{정수})}$ 꼴로 표현될 수 있다는 뜻이다[4, p.644].

과정과 관련된 것으로 수를 생성하는 단위는 사물의 단독성(singularity)을 추상한 개념이었다. 따라서 그리스의 관점에서 수는 자연수를 의미하며, 단위의 분할은 무의미한 것이요, 그 본질을 잃게 되는 것으로 보았다. 이는 단위의 불가분성이 이산적인 양의 본질임을 나타내는 것으로, 이산적인 양은 단위보다 작은 것으로 나눌 수 없으므로 기껏해야 유한 번의 분할만이 가능하다. 반면, 연속양인 길이, 넓이, 부피와 같은 기하학적인 크기는 잠재적으로 무한히 분할할 수 있다. 또한, 그리스의 실재론적 인식론에 의하면, 연속량의 측정 단위는 '외적인' 실재를 갖지 않으므로 이산량의 산술 단위가 가졌던 것과 같은 '절대적인' 지위를 가질 수 없었다. 단위를 선택하는 것은 실재 자체의 속성이 아니라 측정자의 활동에 종속된 것이다[14, p.185]. 이와 같은 양의 이원론적 구분은 ≪Euclid 원론≫에서 극명하게 나타난다. 13권으로 이루어진 ≪Euclid 원론≫은 1권에서 6권은 평면기하, 11권에서 13권은 입체기하에 관한 것이고, 7권에서 9권은 산술에 관한 것이다. 10권을 제외한 나머지 책에서는 '수'와 '크기'란 용어가 같은 책에서 함께 나타나지 않으며, 현재의 관점에서는 똑같은 것으로 볼 수 있는 하나의 명제가 산술과 기하의 두 가지 방법으로 병행하여 증명되고 있다. 단, 10권에서 '통약가능한 크기는 수처럼 서로에 대한 비를 갖는다'를 명제를 밝힘으로써 통약가능한 크기의 경우 수와 크기 사이에 유사성이 존재함을 언급하고 있다[14, p.184]. 이러한 이산량과 연속량, 수와 크기의 분리라는 그리스적인 이원론적 관점은 Stevin의 소수 정의로 인해 전환된다.

그리스 수학에서 양의 범주는 이산적인 것과 연속적인 것으로 구분되어 있었다. Stevin은 이러한 구분을 고려하지 않았다. 그에게 있어서 고립된 개체로서의 수는 Aristoteles의 의미에서 '연속적인' 것이었다. 왜냐하면 어떤 경우이든 무한히 나눌 수 있고, 모든 경우에 그 수가 양화하는 것의 연속성이나 이산성의 특징을 그대로 갖게 된다. 예를 들면, 말 한 마리라고 할 때, 수 '일'은 이산적이나, 일 야드라고 할 때 수 '일'은 연속적이다. 이러한 계통적인 조직화에 의하면, 연속적인 것과 이산적인 것은 더 이상 존재론적인 범주가 되지 않고, 양화되는 대상에 따른 성질이 될 뿐이다. Stevin이 도입한 십진기수법은 형(form)과 내용(content) 사이의 긴장에 의하여 제기된 문제를 해결할 수 있었다. 사실, 새롭게 고안된 이러한 양의 범주 안에서는 구별이 없었으므로, 산술의 연구 대상과 기하학의 연구 대상 사이의 구별도 있을 수 없었다. 이러한 새로운 상황을 다루기 위해 필요한 표현 방법은 이산적인 양의 문제와 가분성에 관한 문제를 동시에 다룰 수 있을 만큼 유연해야 했다. 개체(unity)의 부분에 대하여 말할 때, 소수 표기는 수단이 된다. 이 표현은 새로운 수 개념과 깊이 연결되어 있었다. 이것은 적절한 기호적 표현이 어떻게 수학적 개념을 탐구할 때의 도구가 되는지를 보여주는 가장 좋은 예 중의 하나이다[14, pp.186-187].

즉, Stevin은 연속량과 이산량을 단지 양화되는 사물의 부수적인 특성으로 파악할

뿐 더 이상 존재론적인 범주로 구분하지 않으면서 단일한 양 개념을 설정하였다. 이를 위해서는 연속량을 수로 다룰 수 있는 수단이 필요했고, 여기서 소수가 결정적인 역할을 한 것이다. 실제로 Stevin은 단위의 가분성의 기원이 수와 크기를 관련짓는 측정 문맥에 있다고 보고, 이러한 실제의 체계화에 기초하는 이론적인 구조를 제안하였다.

모든 측정은 세분될 수 있는데, 10분의 1씩 계속 나누는 것에 의한 길이, 액체, 돈 등의 측정이 그러하다[Stevin, 1585, 221 : 14, pp.187-188에서 재인용].

이는 연속량의 측정시 단위보다 작은 나머지가 생기는 경우 단위의 계속적인 10등분에 의하여 측정될 수 있음을 나타내는 것으로, 모든 연속량의 측정은 소수로 표현될 수 있음을 내포하는 것이다. 이 때, Stevin은 임의의 크기를 측정하는 과정에서 이론상 무한소수가 나타난다는 것을 부인하지는 않으나, 이는 경험적인 측정 활동으로부터 알 수 있는 것은 아님을 분명히 한다[14].

이상의 역사적 고찰로부터 Stevin에 의한 소수 정의는 단순히 분수의 십진법화를 이룩한 것이 아니라, 그리스 시대 통약불가능한 양의 발견 이후 분리되었던 수와 크기 개념을 통합하여 동일시하였고, 이 때부터 양의 개념과 그 기호 표현이 분리되지 않게 된 것임을 알 수 있다.

2. 학교수학에서 소수로 정의되는 실수 및 무리수의 본질

수학적으로 실수를 정의하는 방법은 크게 두 가지이다. 하나는 완비순서체로서 공리적으로 정의하는 것이고, 다른 하나는 유리수의 Cauchy 수열의 동치류 또는 Dedekind의 절단 개념 등을 통하여 구성적으로 정의하는 것이다. 그러나, 이는 매우 추상적인 것으로 학교수학에서 실수를 교육적으로 의미있게 가르치기 위해서는 이러한 실수론의 완성 이전에 존재했던 실수 개념이 무엇인지를 확인하는 것이 필요하다. 이는 [1, pp.71-72]에서 밝힌 바와 같이, '선분이나 넓이의 양은 무제한적으로 정확하게 측정될 수 있다'는 무한 소수 관념이 현대적인 수 개념 즉, 실수 개념의 시작임을 알 수 있었다[16, p.14]. 즉, 현대적인 수 개념의 시작은 Stevin의 소수 정의로 모든 크기의 수치화가 가능해지고, 이에 따른 수와 크기의 동일시로 인해 이루어진 것이다. 그러므로, 무한소수에 의한 실수 정의에는 임의의 크기의 수치화라는 본질이 존재하는 것으로, Stevin의 소수 정의에 기원한 것이다. 이로 인해 오늘날 학교수학에서와 같이 수직선 위의 모든 점과 유한 및 무한소수 사이에 대응관계를 생각할 수 있게 되고, 이러한 생각은 19세기까지 수의 연속체인 실수 체계에 대한 만족스런 설명으로 받아들여졌다[10, p.63].

그러나, 이러한 실수에 관한 이해는 단지 직관에 의한 것으로 엄밀하게 정의된 개념은 아니다. 또한, 선분의 길이와 관계없는 물리적인 문맥에서 수가 사용되기 시작했을 때, 예를 들어 계산이 포함되는 미분상(differential), 함수의 연속성 등과 관련된 근본적인 문제는 해결하지 못한다. 이에 기하학적인 직관에 기초하지 않은 새로운 수 이론의 확립이 필요하게 되었고, 19세기 말 Weierstrass, Dedekind, Cantor 등은 실수 체계를 '산술화'하여 이 문제를 해결하였다. 실수 체계의 '산술화'는 실수 개념이 기하의 도움 없이 자연수와 그 연산 등의 산술에 기초함을 뜻한다. 실수 체계의 산술화는 실수 체계에 기초한 해석학에서 기하학적 직관을 제거할 수 있게 한다는 점에서 매우 중요하다[17, pp.128-129]. 실수 체계의 산술화를 통해 미적분학은 실수 연속체의 개념에 기초하여 순전히 산술적으로 다루어지고 기하학적 포장을 버릴 수 있게 된다[17, pp.106-107]. 즉, 19세기 말 추상적인 실수론으로 형식화되기 이전의 실수 개념은 바로 수와 크기를 동일시할 수 있는 무한소수 관념이었음을 알 수 있다.

그러면 이제는 모든 크기의 수치화라는 관점에서 무한소수에 의한 실수 정의를 생각할 때, 비순환 무한소수에 의한 무리수에는 어떤 본질이 존재하는지 살펴보기로 한다.

Klein은 Euclid가 정의한 임의의 선분사이의 비인 λόϒος는 현대 무리수 이론을 강하게 암시함을 알 수 있다고 하면서, 무리수(irrational)의 의미가 '이치에 맞지 않는'이라는 의미에서 無理數로 잘못 이해되는 것은 번역하는 과정에서 생긴 오해라고 보면서 다음을 언급한다.

" 'irrational'이라는 단어는 분명히 그리스어 "αλoϒoς"를 라틴어로 번역한 것이다. 그리스어로 이것은 아마도 '표현 불가능한'이라는 의미였을 터인데, 이는 새로운 수 즉 유리수와는 달리 두 정수의 비로 표현할 수 없는 선분사이의 비를 나타냈다. 그런데, 라틴어 'ratio'는 '이치 reason'라는 의미만을 갖고 있었고 이로부터 'irrational'은 '이치에 맞지 않는, 또는 불합리한'이라는 의미로 잘못 이해되어서 지금껏 무리수(無理數)라는 용어로 고정된 것 같다[13, p.32]."

이는 무리수라는 용어의 어원은 '두 정수의 비로 표현 불가능하다'라는 것으로, 비순환 무한소수에 의한 무리수 정의는 통약불가능한 크기의 수치화라는 문제와 직결됨을 시사한다. 그러나, 임의의 크기를 측정하는 과정에서 무한소수가 나올 수 있다는 것을 인정한다 해도, 경험적인 측정 활동으로부터 통약불가능한 크기의 측정이 비순환 무한소수로 정리되는 것을 알 수 있는 것은 아니다. 이러한 인식론적 입장을 Stevin은 다음과 같이 밝힌다.

경험에 의해서는 주어진 두 크기의 통약불가능성을 결코 알 수 없다. 첫째로는 눈과 손의 실수 때문에, 통약가능한 크기와 크기를 모두 통약가능하다고 결론을 지을

것이다. 둘째로는, 비록 주어진 수들이 통약불가능하여 우리가 큰 양에서 보다 작은 양을 십만 번 빼고, 이런 식으로 십만 년 동안 계속하는 것이 가능하다고 해도, 마지막에 얻게 될 것이 무엇인지 모르는 가운데 계속 끝없이 하게 된다. 따라서, 이러한 인지 형태는 적절하지 않다[Stevin, 1585, p.215 : 14, p.188에서 재인용].

또한, Klein은 무리수에 대한 일반적인 아이디어는 나눗셈에 의하여 분수를 소수로 나타내는 과정에서 순환소수를 인식하게 되고, 이로부터 비순환소수를 자연스럽게 떠올리는 과정에서 생기는 것임을 다음과 같이 밝히고 있다.

무리수에 대한 일반적인 아이디어는 16세기 말 소수 도입의 결과로 처음 나타난다. 유리수를 소수로 바꾸면 유한소수뿐만 아니라 무한소수도 얻게 되지만 이 무한소수는 항상 순환하게 될 것이다. 가장 간단한 예는 소수점 바로 아래부터 한 숫자가 반복되는 $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ 이다. 이제는 우리가 비순환소수를 만드는 법칙이 무엇이든 간에 이에 대해 생각하는 것을 방해하는 것은 없으며 누구나 직관적으로 그것이 명확하게 非유리수인 것으로 받아들일 수 있을 것이다. 이것은 소수를 고찰함으로써 어느 정도 자동적으로 발생한다. 그래서 역사적으로 음수에서 발생했던 것과 동일한 일이 무리수에서도 발생하였다. 계산은 새로운 개념을 그에 대한 본질, 동기 등에 대한 깊은 고려 없이 도입하도록 하였고, 그 개념이 대단히 유용하다는 것이 종종 증명되었기 때문에 더욱 더 사람들은 그것으로 연산을 수행하였다[13, pp.32-33].

이상의 논의로부터 비순환 무한소수에 의한 무리수 정의는 통약불가능한 양의 수치화라는 본질을 가지나, 이는 경험적인 측정 활동으로부터 알 수 있는 것이 아니다. 따라서, 통약가능한 양의 수치화 즉 분수로 표현될 수 있는 양의 소수 측정을 나눗셈이라는 산술적 조작의 결과로부터 아는 것이 필요함을 시사한다. 그러면, 이론적으로 모든 크기의 측정으로 파악될 수 있는 무한소수 즉 실수들의 집합에서 통약가능한 양의 소수 측정시 나타나는 유한 및 순환소수를 제외한 나머지 즉, 비순환 무한소수를 자동적으로 통약불가능한 양의 소수 측정으로 이해할 수 있다. 역사적으로도 이러한 과정을 통해 무리수에 대한 일반적인 아이디어가 생겨난 것임을 알 수 있다.

요약하면, 역사적으로 실수 및 무리수 개념의 발생에는 Stevin에 의한 소수 정의가 결정적인 역할을 하였으며, 소수에 의한 실수 및 무리수의 정의에는 모든 크기의 수치화 및 통약불가능한 양의 수치화라는 본질이 존재함을 알 수 있다.

3. 실수의 개념적 지도를 위한 구체적 방안

현재 7차 교육과정에 따른 교과서에서는 분수 중심으로 유리수를 지도하며 무리수는 9-가 단계에서 제곱근 곧, 방정식 $x^2-2=0$의 근의 첨가 방식으로 무리수를 도입한다. 여기서 유리수가 아닌 수 곧, 분수로 나타낼 수 없는 수, 따라서 소수로 나타내면 유한소수이거나 순환무한소수가 될 수 없는 수를 무리수로 정의하여 다루고 있다[2, pp.11-17 : 3, pp.9-16 : 6, pp.11-17 : 7, pp.11-17]. 즉, 무한소수에 의한 실수 정의가 모든 크기의 수치화이며, 특별히 비순환 무한소수에 의한 무리수의 정의는 단위와 통약불가능한 양의 수치화라는 측면을 명시적으로 설명하지는 않고 있다. 이러한 접근 방식은 방정식의 근의 첨가라는 형식적인 접근과 논리적 범주화 과정으로서는 문제가 없지만, 비순환 무한소수로의 수 개념의 확장이 왜 필요하며 그것은 개념적으로 무엇인가 라는 근본적인 의문을 적절히 다루지 않고 있다는 점에서 실수 개념에의 의미 있는 접근을 기대하기는 어려울 것으로 판단된다.

이에 이 절에서는 소수에 의한 실수 지도가 그 본질을 드러내면서 개념적으로 지도되기 위한 세 가지 방안을 구체화시켜보았다.

첫째, 무한소수에 의한 실수 정의는 모든 크기의 수치화에 기초한 것으로, 소수는 실제적인 방식으로 단위보다 작은 양의 측정을 가능하게 한다는 관점이 보강될 필요가 있다. 측정의 과정은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

단위 e를 정하고 이를 이용해 측정하여 $m_1 e \le a < (m_1+1)e$인 자연수 m_1을 선택하고, 남은 부분을 측정하기 위해 단위 $\frac{1}{10}e$을 이용해 측정하여

$$(m_1+\frac{m_2}{10})e \le a < (m_1+\frac{m_2+1}{10})e$$

인 자연수 m_2을 선택하는 것과 같은 과정을 거듭하여 근사값 $m_1.m_2m_3\cdots$을 얻는다[5, p.189].

비교하여, 단위보다 작은 양의 분수에 의한 측정은 다음과 같다.

단위 (e)를 선택하고 그 다음에 해야 할 일은 전체양 (a)안에 e가 유한번 포함되는 지를 조사하는 것인데 이는 옳다. 그러나 만약 이것이 성립되지 않는다면, 이론적 규정에 따라 e의 모든 정수 부분 $\frac{1}{n}\cdot e$를 시도하고, 어떤 정수 m에·대하여

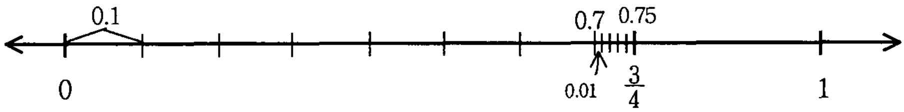
$Q^+ \cdot e$를 a에 대응하는 절단을 형성하는 두 부분으로 나누기 위해 $\frac{m}{n} \cdot e$와 a의 크기를 비교해야 할 것이다. 물론 어떤 정수 m, n에 대하여 $\frac{m}{n} \cdot e = a$ 이면, 계속할 필요는 없다. 사실 이것은 측정에서 사람들이 하는 것이 아니다[11, p.202].

Freudenthal은 분수를 이용한 측정은 단위(e)를 임의로 n등분하여 $\frac{1}{n} \cdot e$ 가 a를 이루는 횟수 m을 구하는 것으로, 측정 과정에 주목할 때 분수는 실제적인 측정수가 아님을 주장하는 것이다. 그러므로, 소수는 연속적인 단위의 10등분에 의한 실제적인 측정을 표현할 수 있다는 점이 분수와 구별되어 지도될 필요가 있다. 이는 실수 지도시 수직선 위의 점들의 소수화를 모든 크기의 수치화로 이해할 수 있는 발판을 마련할 것이다.

둘째, '분수로 표현되지 않는 수'라는 무리수 정의 이면에는 통약불가능성의 문제가 있음을 드러내는 것이 필요하다. 그런데, 두 선분 사이에 공통단위가 존재하지 않음을 보이는 것은 경험적인 측정활동으로부터 알 수 있는 것이 아니다. Stevin 역시 우리의 눈과 손의 실수로 인해 통약가능한 크기와 통약불가능한 크기를 모두 통약가능하다고 결론지을 것이라고 보았다[14, p.188]. 그러므로, 통약불가능성의 문제는 기하학적 증명을 통해 공통의 측정단위가 존재하지 않는 선분을 보이는 것이 적절할 듯하다. 이에 관해 [14, pp.4-6]에서 다루어지고 있는 것은 유클리드 호제법에 따라 정사각형의 한 변과 대각선 사이의 공통단위를 구하는 과정이 무한히 계속됨을 보인 후 이러한 경우 공통단위가 존재한다고 가정하면 모순이 생김을 보이는 것이다. 이와 같은 기하학적 증명을 통해 무리수 개념 발생의 기원으로 볼 수 있는 통약불가능성의 문제를 인식할 수 있을 것이다.

셋째, 분수의 소수화를 측정의 관점에서 파악하는 것이 필요하다. 현재 교과서에서 분수의 소수 표현은 분모를 10의 거듭제곱의 형태로 만드는 방법이나 나눗셈과 같은 형식적 조작의 산물 정도로 다룰 뿐, 이를 측정의 맥락과 연결짓지는 않는다. 측정의 관점에서 분수의 소수화를 파악한다는 것은 다음을 의미한다.

예를 들어, $\frac{3}{4} = 0.75$ 를 수직선 위에서 생각해보자.



여기서, $\frac{3}{4}$ 의 소수화는 원점에서 $\frac{3}{4}$ 에 대응하는 점 사이의 선분을 소수로 측정

하는 것으로 생각할 수 있다. 즉, 주어진 선분의 길이에 $\frac{1}{10}$ -단위는 7번 포함되고 약간의 나머지가 생기며, 이 나머지에는 $\frac{1}{100}$ -단위가 5번 포함되며 더 이상 나머지가 생기지 않는 것으로 이해할 수 있다.

나아가, $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ 과 같이 무한소수로 표현되는 분수의 소수화 역시 같은 방법으로 접근할 수 있다. 이는 임의의 크기를 측정하는 과정에서 이론상 무한소수가 나타난다는 것을 구체적으로 인식하도록 해준다. 그리하여, 소수에 의한 실수 정의를 크기의 측정과 관련하여 다음과 같이 이해할 수 있다.

$$\text{임의의 크기 측정(실수)}\begin{cases}\text{단위와 통약가능한 크기(유리수)} - \begin{cases}\text{유한소수}\\ \text{순환소수}\end{cases} \\ \text{단위와 통약불가능한 크기(무리수)} - \text{비순환 무한소수}\end{cases}$$

이상의 3가지 방안은 학생들이 무한소수로 정의되는 실수를 동형인 양들 가운데 하나의 수직선 위에 동시에 구체화할 수 있는 모든 길이류들의 수치화라는 관점에서 파악할 수 있게 할 것이다. 또한, 통약불가능한 양의 인식은 이론적으로 분수로 표현할 수 없는 측정이 존재하며, 이는 나눗셈 알고리즘에 의한 분수의 소수 표현을 측정의 관점에서 볼 때 분수로 표현할 수 없는 통약불가능한 양의 측정이 순환하지 않는 무한소수로 정리됨을 이해할 수 있도록 할 것이다. 즉, 무한소수에 의한 실수 및 무리수의 정의 이면에 있는 본질을 이해할 수 있도록 도와줄 것이다.

4. 결론

실수는 중등학교 과정에서 다루어지는 가장 핵심적인 수 개념이라고 말할 수 있다. 왜냐하면, 중등과정에서 다루어지는 많은 수학적 개념 또는 주제들이 실수를 그 바탕에 두고 있기 때문이다. 예를 들어, 수직선, 방정식의 실근, 도형의 방정식, 그리고 특별한 언급이 없는 한 대부분의 함수와 그 그래프 등이 그러하다.

그러나, 서론에서 밝힌 바와 같이 중등 수학이 바탕으로 하는 실수를 현행 교과서에서는 단지 분수의 소수 표현을 기초로 유리수 범위에 속하지 않는 비순환 무한소수들을 무리수로 범주화하고, 유한 및 무한소수들의 집합을 실수로 정의함을 알 수 있다. 이러한 접근 방식은 학생들에게 무리수란 유리수가 아닌 수 정도의 관념만을 허

락한 채 순환하지 않는 무한소수는 범주 구분의 일부 요소로만 기억될 것이다.

이 글에서 살펴본 바와 같이 역사적으로 Stevin에 의한 소수 정의는 수와 크기의 통합, 즉 모든 크기의 수치화를 가능하게 하였고, 이로부터 현대적인 수 개념 즉, 실수 관념이 발생하였다. 그리고, 통약불가능한 양의 측정이 비순환 무한소수로 정리됨을 인식하게 됨에 따라 비로소 무리수의 일반적 아이디어가 발생한 것임을 알 수 있다. 즉, 실수 개념의 역사 발생 과정에서 소수는 결정적인 역할을 한 것이며, 이러한 과정에서 드러나는 소수에 의한 무리수 및 실수 정의의 본질을 다룰 때에야 비로소 실수 개념에의 의미 있는 접근을 기대할 수 있을 것으로 판단된다. 다시 말해, 학교수학에서 무한소수에 의한 실수 지도시 유리수에서 실수로의 확장의 필요성을 제기하는 통약불가능성의 문제를 드러내고, 실제적인 측정수로서의 소수 개념을 바탕으로 모든 크기의 수치화라는 관점에서 접근하는 것이 필요하다고 생각된다.

참고 문헌

1. 강흥규 · 변희현 (2003). 소수의 역사적 기원과 의의. 한국수학사학회지 16(3), 69-76
2. 고성은 외 5인 (2003). 중학교 수학 9-가. (주)블랙박스
3. 박두일 외 4인 (2003). 중학교 수학 9-가. (주)교학사
4. 변희현 · 박선용(2002) 무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안: '통약불가능성'을 통한 무리수 고찰. 대한수학교육학회지 학교수학 4(4), 643-655.
5. 우정호(1998) 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
6. 이준열 외 4인 (2003) 중학교 수학 9-가. (주)도서출판 디딤돌
7. 조태근 외 4인 (2003) 중학교 수학 9-가. (주)금성출판사
8. Bourbaki, N.(1950), "The Architecture of Mathematics", *The American Mathematical Monthly*, Vol.57, No.4, pp.221-232.
9. Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). *A History of Mathematics*, 『수학의 역사』, 양영오 · 조윤동 (공역), 서울: 경문사
10. Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics?*. New York: Oxford University Press.

11. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht -Holland: D. Reidel Publishing Company.

12. Hitchcock, G. (1996). Dramatizing the Birth and Adventures of Mathematical Concepts: Two Dialogues. In Calinger, R. (Ed), *VITA MATHEMATICA : Historical Research and Integration with Teaching*, Washington : The Mathematical Association of America..

13. Klein, F. (1924). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint.* New York: Dover Publications

14. Moreno-Armella, L. E. & Waldeg, G. C. (2000). An Epistemological History of Number and Variation. In Katz, V. J. (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective.* Washington : Mathematical Association of America.

15. Sarton, G. (1935). *The first explanation of decimal fractions and measures*, Isis, 23.

16. Toeplitz, O. (1963). *The Calculus: A Genetic Approach*, The University of Chicago Press.

17. Wilder, R. L.(1968). *Evolution of Mathematical Concepts: An Elementary Study.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 18 No. 3 (Aug. 2005), 55-66

The Meaning of the Definition of the Real Number by the Decimal Fractions

Kwang-nam High School **Hee-Hyun Byun**

In our school mathmatics, the irrational numbers and the real numbers are defined and instructed on the basis of decimal fractions. In relation to this fact, we identified the essences of the real number and the irrational number defined by the decimal fractions through the historical analysis. It is revealed that the formation of real numbers means the numerical measurements of all magnitudes and the formation of irrational numbers means the numerical measurements of incommensurable magnitudes.

Finally, we suggest instructional plan for the meaninful understanding of the real number concept.

Key words : decimal fractions, real number, irrational number, incommensurability.

MSC2000 classification : 97-03

논문 접수 : 2005년 6월 15일, 심사 완료 : 2005년 7월