

이동질량에 의한 중공축의 비틀림 진동해석

Torsional Vibration of a Hollow Shaft Subjected to a Moving Mass

박용석* · 홍성철*

Yong-Suk Park and Sung-Chul Hong

(2005년 5월 11일 접수 : 2005년 7월 4일 심사완료)

Key Words: Torsional Vibration(비틀림진동), Moving Mass(이동질량)

ABSTRACT

The analysis of a mechanical system, body traveling along the elastic structure, has been a topic of interest. The establishment of analytical method for the development and control of this system is required in the fields of many machine operations such as modern weapons and high-speed feed drive system for a machine tool. The dynamic equations are derived on the torsion of a cantilever hollow shaft induced by the spin-up of a moving mass and the displacement of the mass. Influences of design parameters such as the inertia ratio, the mass moving speed and the friction coefficient are discussed on the transient response of the system.

기 호 설 명

- G : 축의 전단탄성계수
- I : 축의 단위 길이당 질량관성모멘트
- J : 축의 극단면 2차 모멘트
- ϕ : 축의 비틀림각(twist angle)
- ψ : 이동물체의 회전각(spin angle)
- ρ : 축의 밀도
- s : 이동물체의 변위

1. 서 론

탄성 구조물을 따라 이동하는 물체에 관한 문제는 많은 연구자들의 관심 대상이 되어왔다. 이동하중을 받는 구조물은 정적하중을 받을 때 보다 큰 동적저장과 응력을 받게 되어 구조물의 안정성과 성능에 매우 중요한 문제로 대두하게 되었다.⁽¹⁻⁵⁾ 특히 오늘날 정

확도를 요구하는 최신의 병기나 고속 회전운동을 동반한 정밀기계분야에서도 성능 유지 및 개선을 위한 연구의 대상이 되고 있다.⁽⁶⁻⁹⁾

이러한 운동은 강내탄도학(interior ballistics)분야에서는 포신속에서 포탄이 고속으로 이동, 회전하면서 추진될때 나타나는 운동으로 강내 흔들림 운동(balloting motion)으로 알려져 있으며, 초기에 1940년대 Reno⁽⁶⁾와 Thomas⁽⁷⁾로부터 연구가 시작되었으며, USA Ballistic Research Lab.의 연구보고서^(8,9)등과 국내에서도 박관진⁽¹⁰⁾등과 같이 많은 연구가 진행되어 왔다. 이들의 대부분은 추진되는 탄과 포열과의 굽힘진동에 대한 동적상호작용에 관하여 실험적인 결과와 Dynacode-G/P 등의 프로그램을 개발하여 정량적인 연구를 수행하고 있다.

정밀기계분야에서는 고속으로 회전하는 스펀들축과 접촉하여 이동하는 질량과의 상호작용에 관한 연구가 정밀 로봇 아암 제어분야에서도 이러한 굽힘진동들을 다루고 있다.^(11,12)

고정 - 자유지지 조건의 중공축의 경우 1, 2차 굽힘진동주기보다 이동물체의 속도가 빠른 경우 비틀림진동의 영향을 받게 된다.⁽¹³⁾ 동적상호작용을 수반하

† 책임저자 : 정회원, 인하공업전문대학 기계과
E-mail : yspark@inhac.ac.kr
Tel : (032) 870-2136, Fax : (032) 870-2500
* 정회원, 한라대학교 기계자동차공학부

는 비틀림진동에 의한 영향은 구조물의 안정성과 이동물체의 성능설계에 매우 중요한 문제로 대두되고 있으나 이에 대한 연구가 매우 미진하며 필요성이 높아지고 있다.

이 연구에서는 비틀림진동을 해석할 수 있는 운동방정식을 유도하여 무차원화 함으로써, 주요 인자들이 비틀림진동에 어떠한 영향을 미치고 있는지를 알아봄으로써 고속으로 추진되며 회전하는 이동물체와 지지보와의 비틀림 진동 해석기법을 정립하고자 한다.

2. 운동방정식

2.1 시스템의 운동방정식

중공축(hollow shaft)의 내부 강선을 따라 회전하면서 전진 이동하는 물체의 개략도는 Fig. 1과 같이 Holmberg⁽¹³⁾가 적용한 모델과 같다. 그림에서 m , I_b 는 이동물체의 질량과 질량관성모멘트를 나타내며, R_i , R_o 는 축의 내경과 외경을 나타낸다. 또한 α 는 강선의 경사각을 나타낸다.

파이프 내에서 질량 m 인 이동물체는 추진력 $P(t)$ 에 의해 추진되며, 강선을 따라 회전속도가 상승되며 추진된다. 이때 이동물체는 Fig. 1에서와 같이 강선을 따라 반력 N 과 마찰력 F 를 받게 된다. 따라서 이동물체의 병진운동 및 회전운동에 대한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹²⁾

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = P - D \tag{1}$$

$$I_b \frac{d^2 \phi}{dt^2} = R_i (N \cos \alpha - F \sin \alpha) = M_b \tag{2}$$

식 (1)에서 추진력 P 는 폭발에 의한 압력이나 이 질량에 작용하는 외력으로 발생되며 시간의 함수로 표현되고 D 는 추진의 저항력으로 다음과 같다.

$$D = F \cos \alpha + N \sin \alpha \tag{3}$$

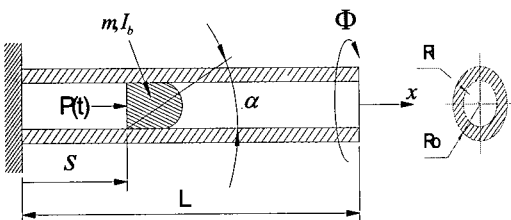


Fig. 1 System model

따라서 추진체의 저항력으로 인해 발생하는 축의 비틀림 운동방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + M_b \delta(x-s) = I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{4}$$

또한 축의 비틀림각 ϕ 와 이동질량의 회전각 ψ 와는 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\frac{ds}{dt} \tan \alpha = \left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\phi}{dt} \right) R_i \tag{5}$$

따라서 식 (5)와 식 (2)를 식 (4)에 대입 정리하면 식 (4)의 비틀림 운동방정식은 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{I_b}{I} \left(\dot{s} \tan \alpha / R_i + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right. \\ &\left. + 2 \dot{s} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \dot{s}^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dot{s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta(x-s) \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 로 축의 파동속도(wave speed)이다.

식 (1)과 식 (6)의 해를 구하면 회전하는 이동물체의 영향으로 인한 축의 비틀림 거동을 해석할 수 있다. 이 문제를 해석하기 위해 식 (1)의 추진력 P 는 이동물체가 받는 압력의 함수로 식 (7)과 같이 정의하고, 저항력 D 는 마찰에 의한 영향으로 식 (7)과 같이 단순히 가정한다.

$$P = \pi R_i^2 p_0 p(t), \quad D = \pi R_i^2 p_0 f \tag{7}$$

여기서 p_0 는 내부 최대압력이고, $p(t)$ 는 시간에 따른 압력 파형을 나타낸다. 또한 f 는 마찰계수이다.

2.2 시스템의 무차원 운동방정식

Fig. 1과 같은 계의 응답특성을 알아보기 위해 식 (1)과 식 (6)을 무차원 매개변수(nondimensional parameter)로 나타내어 그 무차원 매개변수별 계의 거동을 파악하고자 한다. 따라서 아래와 같이 무차원 매개변수를 정의한다.

$$\begin{aligned} \tau &= ct/L, \quad \eta = s/L, \quad \xi = x/L, \quad r = R_i/L \\ \mu &= \frac{\pi L^2 R_i}{m c^2} p_0, \quad \gamma = \frac{I_b}{IL} \end{aligned} \tag{8}$$

식 (8)의 무차원 매개변수를 사용하면 식 (1)과

식 (6)은 무차원 방정식으로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi - \Phi'' = \gamma \left(\frac{1}{r} \dot{\eta} \sin \alpha + \Phi + 2 \dot{\eta} \Phi' + \dot{\eta}^2 \Phi'' + \dot{\eta} \Phi' \right) \delta(\xi - \eta) \quad (9)$$

$$\dot{\eta} = \mu r (\rho(\tau) - f) \quad (10)$$

여기서 $(\dot{\cdot})$ 는 $\frac{\partial}{\partial \tau}$, (\cdot) 은 $\frac{\partial}{\partial \xi}$ 을 나타낸다.

식 (9)의 해는 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi) q_i(\tau) \quad (11)$$

여기서 $\phi_i = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2i-1}{2} \pi \xi\right)$ 로 고정 자유단을 갖는 축의 경계조건을 만족하는 정규모드이다.

식 (11)의 해를 이용하여 Galerkin 방법을 적용하면, 식 (9)는 행렬로 표현되는 다음의 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & ([M] + \gamma [H]) \{\ddot{q}\} + 2\gamma \dot{\eta} [B] \{\dot{q}\} \\ & + ([K] + \gamma \dot{\eta}^2 [C] + \gamma \dot{\eta} [B]) \{q\} \\ & = \frac{\gamma}{r} \dot{\eta} \sin \alpha \{Y\} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 각각의 행렬의 요소는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \delta_{ij}, \quad K_{ij} = \left(\frac{2i-1}{2} \pi\right)^2 \delta_{ij}, \\ H_{ij} &= \phi_i(\eta) \phi_j(\eta), \quad B_{ij} = \phi_i(\eta) \phi_j'(\eta), \\ C_{ij} &= \phi_i(\eta) \phi_j''(\eta), \quad Y_i = \phi_i(\eta) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)와 식 (10)의 유도된 무차원 운동방정식을 동시에 해석하여 이동질량의 위치 및 축의 비틀림 거동을 매개변수 값에 따라 파악하여 계의 설계에 이용한다.

3. 수치해석

수치해석을 위해 이동물체에 작용되는 압력파형은 수정된 Lampel's 곡선⁽¹⁴⁾으로 아래와 같이 가정하였다.

$$\rho(\tau) = a \tau^2 [\exp(b - c\tau)]^2 \quad (14)$$

여기서 a, b, c 는 파형의 특성을 나타내는 상수이며,

이 연구에서 사용한 형상은 Fig. 2와 같다.

수치해석은 식 (11)에서 6개의 모드만을 사용하고 식 (12)와 식 (10)은 4차 Runge-Kutta 법으로 해를 얻었다.

Fig. 3은 주어진 매개변수에 대하여 수치 해석한 결과로 이동물체의 시간별 위치와 중공축의 위치별 비틀림 변형을 보여준다. Fig. 3에서 기호 \odot 는 시간 대별 이동물체의 위치를 도시하고 있다. Fig. 3에서 알 수 있는 바와 같이 이동물체가 축을 떠나기 전에 축의 비틀림 파(torsional wave)는 축 끝에 반사되고 있음을 알 수 있다. Fig. 3에서와 같은 조건하에서 이동 질량의 속력 및 변위는 Fig. 4와 같다. 이러한 결과는 중공축의 지지부 설계에 활용될 수 있으며, 이동체의 탈출속도 및 회전 각속도를 파악할 수 있어 탈출후의 운동해석의 초기조건으로 활용된다.

Fig. 5는 관성비 γ 의 크기에 따른 비틀림 거동의 비교 그림으로 값이 커짐에 따라 비틀림각도 커짐을 알 수 있다. 이동물체의 관성이 일정하다면 축의 질량관성모멘트는 R_o/R_i 의 함수로 나타내어지므로, 축의 두께가 얇을 수록 비틀림 각이 크게 나타남을 의미한다.

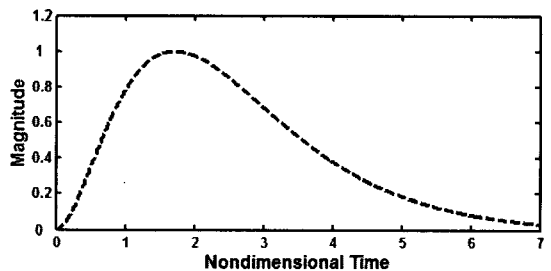


Fig. 2 Pressure profile ($a = 1/2.9727, b = 1, c = 0.58$)

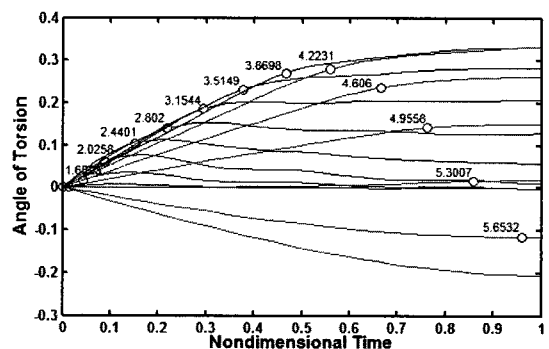


Fig. 3 The angle of torsion along the length ($\mu = 20, r = 4/700, \gamma = 1/100, f = 0.1, a = 5.6^\circ$)

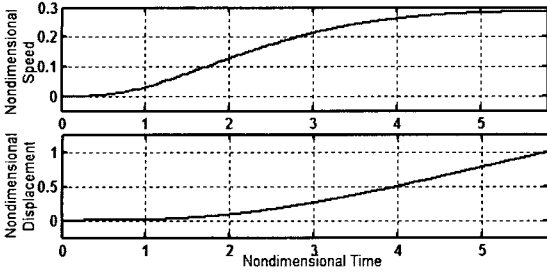


Fig. 4 The speed and displacement of the mass ($\mu = 20, r = 4/700, f = 0.1, \alpha = 5.6^\circ$)

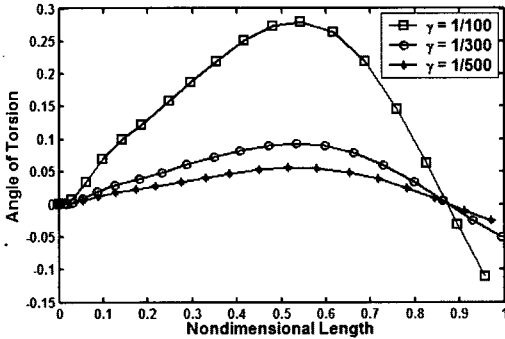


Fig. 5 Plots for angle of torsion along the length ($\mu = 20, r = 4/700, f = 0.1, \alpha = 5.6^\circ$)

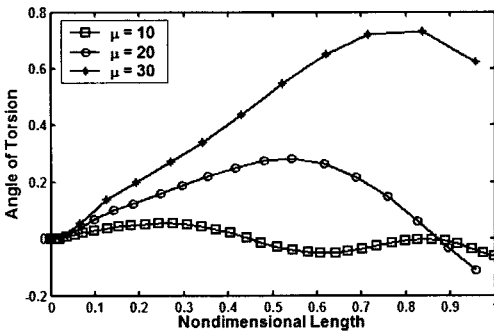


Fig. 6 Plots for angle of torsion along the length ($r = 4/700, \gamma = 1/100, f = 0.1, \alpha = 5.6^\circ$)

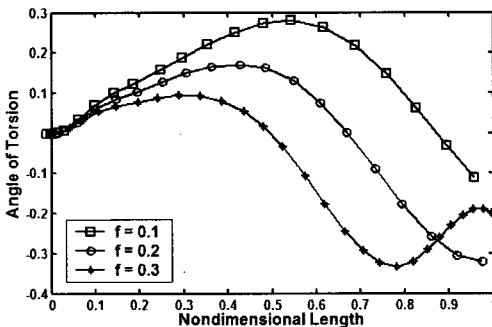


Fig. 7 Plots for angle of torsion along the length ($\mu = 20, r = 4/700, \gamma = 1/100, \alpha = 5.6^\circ$)

μ 에 따른 비틀림 진동해석의 결과는 Fig. 6과 같다. μ 가 커짐에 따라 물체의 이동속력은 커지고 비틀림 진동이 매우 크게 발생함을 확인 할 수 있다. $\mu = 10$ 의 경우 접촉하고 있는 축의 2차 비틀림 진동 모드양상을 따른 비틀림 운동이 나타나고 있음을 알 수 있었다.

마찰의 영향은 Fig. 7에 나타내었다. 마찰이 커질수록 물체의 이동속력은 감소하며 중공축 내부를 이동 중에 축의 비틀림 진동의 영향을 많이 받게 된다.

4. 결 론

압력으로 추진되어 회전하며 이동하는 질량체의 운동과 그것으로 인한 중공축의 비틀림 거동을 매개변수의 변화에 따라 수치해석 하여 얻은 결과는 다음과 같다.

(1) 이동 질량의 이동위치별 중공축의 비틀림운동을 파악 할 수 있었으며, 이로부터 이동체의 탈출속도 및 회전 각속도의 정보를 얻을 수 있어 이동체가 탈출하고 난 후의 운동해석의 초기조건으로 사용할 수 있다.

(2) 매개변수 변화의 영향을 고찰하여 설계시 발생하는 설계변수의 선택에 대한 기초자료를 마련하였다.

후 기

이 논문은 2004년도 인하공업전문대학 교내연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Ting, E. C., Genin, J. and Ginsberg, J. H., 1974, "A General Algorithm for Moving Mass Problems," J. of Sound and Vibration, Vol. 33, No. 1, pp. 49~58
- (2) Akin, J. E. and Mofied, M., 1989, "Numerical Solution for Response of Beam with Moving Mass," Journal of Structure Engineering, Vol. 115, No. 1, pp. 120~131.
- (1) Reno, F. V., 1943, "The Motion of the Axis of a Spinning Shell

Inside the Bore of a Gun," BRL Report No. BRL-R-320.

(3) Cifuentes, A. O., 1989, "Dynamic Response of a Beam Excited by a Moving Mass," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 5, pp. 49~58.

(4) Stanisc, M. M., 1985, "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses," Ingenieur-Archive, Vol. 56, pp. 175~185.

(5) 손인수, 윤희익, 2002, "이동질량을 가진 유체 유동 외팔 파이프의 동특성," 한국소음진동공학회 논문집, 제 12 권, 제 7 호, pp. 550~556.

(6) Reno, F. V., 1943, "The Motion of the Axis of a Spinning Shell Inside the Bore of a Gun," BRL Report No. BRL-R-320, (AD# 491839).

(7) Thomas, L. H., 1945, "The Motion of the Axis of a Spinning Shell Inside the Bore of a Gun," BRL Report No. BRL-R-544.

(8) Ansari, K. A. and Baugh, J. W. Jr., 1986, "Dynamics of a Balloting Projectile in a Moving

Gun Tube," BRL-CR-605.

(9) Soifer, M. T. and Becker, R. S., 1984, "Projectile Motion in a Flexible Gun Tube," BRL-CR-536.

(10) 박관진, 1992, "날개 안정 철갑탄의 강내 거동에 관한 연구," 국과연 보고서.

(11) Lee, H. P., 1995, "Dynamic Response of a Rotating Timoshenko Shaft Subjected to Axial Forces and Moving Loads," Journal of Sound and Vibration Vol. 181, No. 1, pp. 169~177.

(12) Yau, D. T. W. and Fung, E. H. K., 2002, "Dynamic Response of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass," Journal of Sound and Vibration Vol. 257, No. 1, pp. 107~117.

(13) Holmberg, B. R., 1982, "Vibration of a Taut String and Torsional Vibration of a Gun Barrel Under the Influence of a Moving Mass," Journal of Sound and Vibration Vol. 89, No. 3, pp. 325~334.

(14) 정봉수, 1980, 병기공학편람, 홍릉기계공업회사.