〈 논문 〉

# 2 차원 평면응력 상태에서 되풀이 소성역이 피로균열 열림 현상에 미치는 영향에 관한 연구

최 현 창*

(2005 년 1 월 22 일 접수, 2005 년 7 월 9 일 심사완료)

# An Evaluation on the Effect of Reversed Plastic Zone on the Fatigue Crack Opening Behavior under 2-D Plane Stress

Hyeon Chang Choi

**Key Words :** Fatigue Crack Growth(피로 균열 진전), Finite Element Analysis(유한요소법), Crack Opening Behavior(균열 열림 거동), Prediction of Opening Level(열림점 예측), Reversed Plastic Zone Size(되풀이 소성역 크기)

**Abstract**

The relationship between fatigue crack opening behavior and the reversed plastic zone sizes is studied. An elastic-plastic finite element analysis (FEA) is performed to examine the opening behavior of fatigue crack, where the contact elements are used in the mesh of the crack tip area. The smaller element size than reversed plastic zone size is used for evaluating the distribution of reversed plastic zone. In the author's previous results the FEA could predict the crack opening level, which crack tip elements were in proportion to the theoretical reversed plastic zone size. It is found that the calculated reversed plastic zone size is related to the theoretical reversed plastic zone size and crack opening level. The calculated reversed plastic zone sizes are almost equal to the reversed plastic zone considering crack opening level obtained by experimental results. It can be possible to predict the crack opening level from the reversed plastic zone size calculated by finite element method. We find that the experimental crack opening levels correspond with the opening values of contact nodes on the calculated reversed plastic zone of finite element simulation.

기호설명

$a_0$ : 초기균열 길이
$\Delta a$ : 균열 면 위에서의 요소 크기
$H'$ : 선형 변형률 경화계수
$\Delta K$ : 응력 강도 계수 폭
$\Delta K_{eff}$ : 유효 응력 강도 계수 폭
$K_{op}$ : 균열 열림 응력 강도 계수
$L$ : 작용하중
$L_{max}$ : 최대 작용 하중
$\Delta L$ : 작용 하중 폭
R : 응력비
$\nu$ : 포아송비
$r_p$ : 소성역 크기
$\Delta r_p$ : 되풀이 소성역 크기
$\sigma_y$ : 항복 응력
$\Delta S_{eff}$ : 유효 응력비
$S_{max}$ : 최대 응력
U : 유효 응력 강도 계수 폭 비

* 회원, 동명정보대학교 메카트로닉스공학과
E-mail : hcchoi@tit.ac.kr
TEL : (051)610-8354 FAX : (051)610-8845

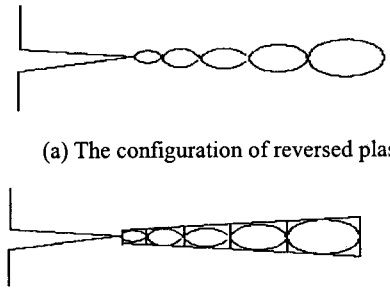
## 1. 서 론

피로균열 열림 거동을 정확히 예측하기 위해서 유한요소법은 필수적이다.[1] 잔류응력장에서 균열 열림 거동은 성공적으로 연구되었고[2,3] 수치적으로 좋은 결과를 주는 가장 적절한 요소 크기의 결정에 관한 연구도 이루어졌다.[4] Park 등[4]은 실험에 의해 측정된 열림 응력 값을 해석을 통해 잘 예측할 수 있는 적정 요소 크기가 존재하며, 단일방향 소성역(monotonic plastic zone)크기 및 되풀이 소성역(reversed plastic zone) 크기와의 일정한 값으로 유한요소 크기가 존재하는 것으로 보고하고 있다. 이를 통해 실제의 피로 균열 닫힘 거동을 정확하게 시뮬레이션 하는 방법을 제안하였다.

본 연구자는 Park 등이 제안한 방법을 개선하여 이들 논문에서 인용한 실험 결과를 바탕으로 피로 균열 닫힘 거동을 정확하게 예측하는 유한요소 해석 모델에 관하여 검토하였다.[5] 특히 다양한 요소 크기를 사용해 Park 등의 논문에서 제안한 균열 길이 고정법의 결과에서 간과한 소성영역 크기가 균열 열림점에 미치는 영향과 열림점 결정방법을 제안하였다.

Fig. 1(a)에 나타낸 바와 같이 균열 선단에서 되풀이 소성역의 크기는 균열이 진전함에 따라 점점 커지는 경향을 나타낸다. 저자의 이전 연구[6,7]에서 Fig. 1(b)와 같이 되풀이 소성역의 크기에 비례하는 균열 선단 요소를 사용하여 균열 열림점 예측을 수행하였다. 또한 상용 유한요소 프로그램인 ANSYS 를 이용하여 접촉요소를 사용하여 되풀이 소성역 크기의 균열 선단요소는 균열 열림점을 정확히 예측함을 보여 주었다.[6] 아울러 각각 다른 균열 선단 요소 크기의 유한요소법 해석을 4~5 회 수행하고 계산된 결과들의 최소자승법을 이용해 균열 열림점 예측을 수행하여 균열 열림점을 예측하는 연구를 수행하였다.[7]

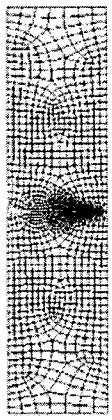
본 연구에서는 균열 열림 거동과 되풀이 소성역 크기 사이의 관계를 알아볼 예정이다. 앞의 연구[5-7]와는 달리 되풀이 소성역 크기 보다 훨씬 작은 균열선단 요소를 이용하여 계산을 수행한다. 이전 연구결과에서 계산된 되풀이 소성역 크기가 균열 열림점 레벨에 대응하는 것으로 밝히고, 실험에 의해 구해진 균열 열림점으로 결정된 되풀이 소성역 크기와 유한요소법에 의해 계산된 되풀이 소성역 크기 사이의 관계도 비교 평가할 예정이다.



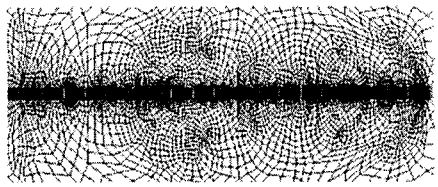
(a) The configuration of reversed plastic zone

(b) The mesh pattern at crack tip region

**Fig. 1** The configuration of reversed plastic zone and mesh pattern along crack line



(a) Overall configuration

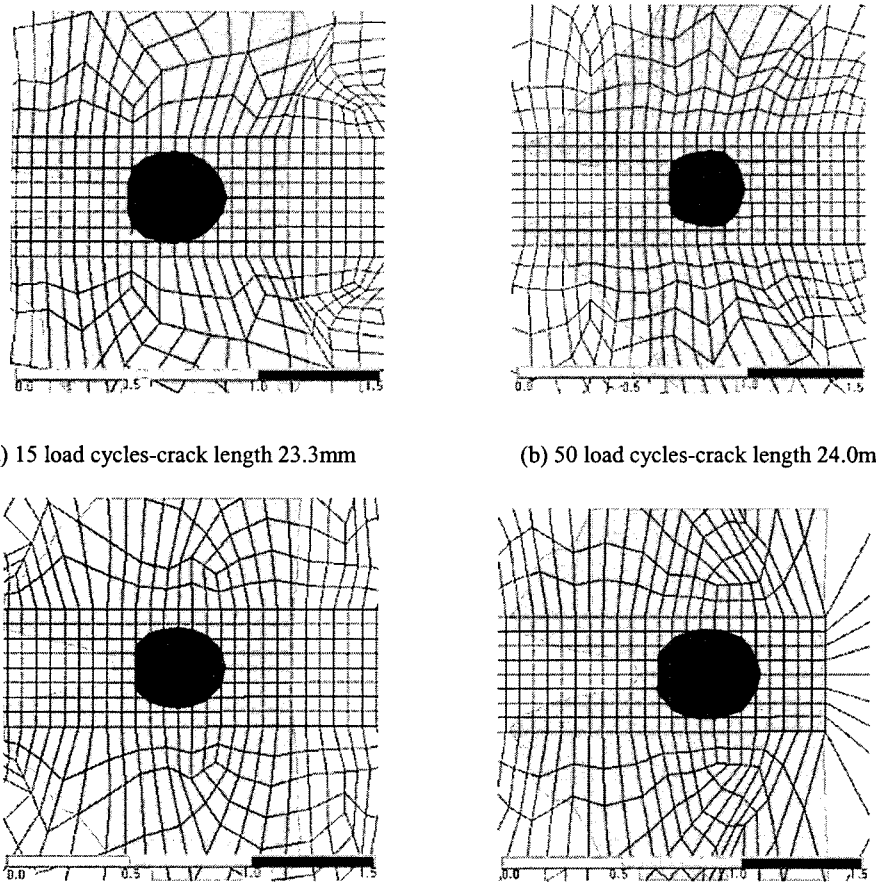


(b) Typical fine mesh along crack surface

**Fig. 2** Typical increasing fine mesh along crack line used in this study

## 2. 균열 열림 예측을 위한 유한요소법

균열 열림 예측을 위해 사용한 유한요소 프로그램은 상용 프로그램인 ANSYS 를 사용하였다. 균열 열림과 닫힘을 나타내기 위해 접촉요소를 사용하였다. 항복조건으로는 Von Mises 기준을 사용하였다. 되풀이 소성 거동을 재현하기 위하여 가공경



(a) 15 load cycles-crack length 23.3mm

(b) 50 load cycles-crack length 24.0mm

(c) 100 load cycles-crack length 25.0mm

(d) 145 load cycles-crack length 25.9mm

**Fig. 3** Stress comparison ratio (stress intensity/yield stress) distribution under the applied minimum load for reversed plastic zone

화(isotropic workhardening)방법을 채용한다. 응력-변형률(stress-strain) 관계는 두 개의 직선으로(bilinear) 나타내는 방법을 사용한다. 균열 열림과 닫힘은 균열 면의 접촉 요소에 의해 자동으로 결정된다. 균열 진전은 1 사이클 마다 균열 선단의 반력 크기 부호가 변할 때 풀어 주는 방법으로 해석하였다. 균열열림점의 정의는 저자의 연구 결과[5-7]에 자세히 나타나 있다. 유한 요소 해석 결과와 실제 실험에서 얻은 결과와의 비교가 매우 중요하다. 이를 위해 저자의 이전 연구에서 비교한 실험 데이터인 Kurihara 등[8]의 피로 균열 닫힘 실험 결과와 직접 비교할 예정이다. 실험과 관련된 상세한 내용은 다음과 같다. 재료는 구조용 강재인 JIS SM50B 이다. 이 재료의 화학 조성(wt. %)은 Si 0.33, C 0.14, Mn 1.45, P 0.018, S 0.019, 나머지는 Fe 이다. 항복응력 $\sigma_y$ 은 367MPa, 인장 강도 526 MPa, 연신율 29% 이다.

유한 요소 모델과 같은 시험편의 크기는 초기 균열 길이는 23.0mm 이고 두께 10.0mm, 길이 184.0mm, 폭 70.0mm 인 CCT 시편이 사용되었다. 시험편의 1/2 이 접촉요소를 사용하기 위해 해석에 사용된다. Fig. 2 는 해석 모델의 전체 형상과 전형적인 균열 선단 부위의 미세 요소망(mesh) 형상을 나타낸다. 이전에 연구에서 사용했던 요소망 형상, 즉 균열 진전에 따라 변하는 되풀이 소성역의 크기와 같이 선형적으로 증가하는 모양을 사용하는 대신 여기 해석에서는 되풀이 소성역 크기 보다 훨씬 작은 요소인 15μm 와 20μm 의 일정 크기를 사용하였다.

## 3. 유한요소 해석 결과

McClung[9~11]은 균열 열림을 고려한 피로 균열 진전 시 되풀이 소성역의 크기를 예측하는 방법을 소개하였다. 균열 선단의 되풀이 소성 유동은 균열 선단이 열려 있으면, 단일 응력장으로 형성된다. 균열 선단이 닫히면 특이성은 사라지고 되풀이 소성역은 가해진 응력에 의해 발생된다. 되풀이 소성역의 크기는 처음 균열이 닫혔을 때 다음 식과 같이 나타난다.

$$\Delta r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K_{eff}}{2\sigma_y}\right)^2 \qquad (1)$$

여기서 $\Delta K_{eff}$ 는 유효 응력강도 계수 폭이다.

Fig. 3 은 최소하중 상태에서 응력비 R=0 인 경우 균열 선단영역에서 응력비교비(응력강도/항복응력:SCR)를 나타낸 것이다. 그림에서 1 을 넘는 값은 소성영역을 의미한다. 여기서 소성영역은 최소 하중 상태에서의 되풀이 소성역을 나타낸다. 균열 선단의 최소 요소 크기는 20μm 이다. 하지만 그림에서는 요소 모서리에서 응력비교비를 보간하여 10μm 의 사각형으로 나타내고 있다. Fig. 3(a)는 15 사이클 균열이 진전한 균열 길이 23.3mm 의 SCR 이다. 그림에서 검은 원형 부분은 균열 진전 방향의 되풀이 소성역으로 크기는 0.07mm 이다. 초기 균열 길이에 따른 이론적인 단일 방향 소성역(*monotonic plastic zone*)의 크기는 다음 식 (2)에 따라 계산하면 0.445mm 이다.

$$r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{max}}{\sigma_y}\right)^2 \qquad (2)$$

균열 길이 23.3mm 는 단일 방향 소성역 크기 영역 내에 위치 한다. 유한요소법을 이용해 구한 균열 열림 거동이 안정화되지 않은 영역이다.[9] Fig. 3(b)는 균열길이 24.0mm 의 50 사이클에서의 SCR 을 나타낸다. 균열진전 방향을 따라 되풀이 소성역의 크기는 0.054mm 이다. 이 값은 Fig. 3(a)의 경우보다 작은 값을 나타낸다. 본 연구 논문에서 나타내지 않았지만 되풀이 소성역의 크기는 45 사이클과 50 사이클 사이에서 대략 0.054mm 크기로 수렴됨을 보여주고 있다. Fig. 3(c)는 균열길이 25.0mm 의 100 사이클에서의 SCR 을 나타낸다. 균열진전 방향을 따라 되풀이 소성역의 크기는 24.0mm 균열 길이 때 보다 0.008mm 증가한다. Fig. 3(d)는 균열길이 25.9mm 의 145 사이클의 SCR 을 나타낸다. 균열진전 방향을 따라 되풀이 소성역의 크기는 0.072mm 이다. 균열진전 방향을 따라 되풀이 소성역의 크기는 25.0mm 균열 길이 때 보다 0.01mm 증가한다. 되풀이 소성역의 모양은 균열 진전 초기에는 거의 원형과 비슷하게 나타나지만, 균열이 안정화 진전에 따라 되풀이 소성역의 모양은 타원형으로 변해감을 알 수 있다.

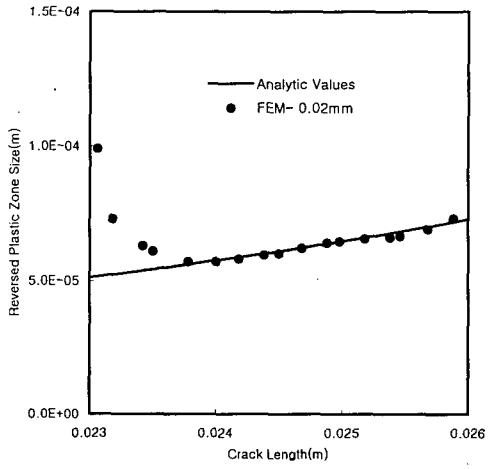



**Fig. 4** Variation of the sizes of the reversed plastic zone as a function of crack length for the minimum element size of 20μm

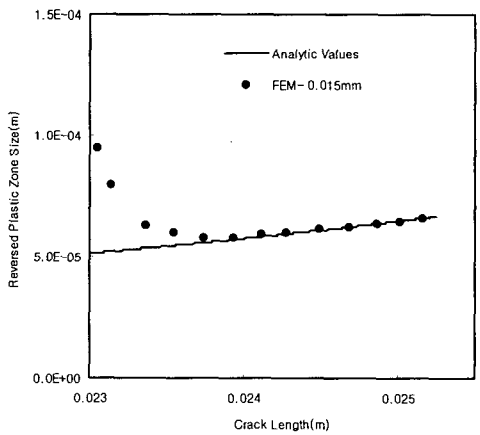



**Fig. 5** Variation of the sizes of the reversed plastic zone as a function of crack length for the minimum element size of 15μm

Fig. 4 는 균열 길이 23.0mm 부터 26.0mm 까지 총 150 사이클 동안의 되풀이 소성역 크기의 변화를 나타낸 그림이다. 균열 선단 영역에서의 최소 요소 크기 20μm 를 여기 해석에 사용하였다. 그림에서 닫힌 원형 기호는 균열 진전 방향을 따른 소성역 크기를 나타낸다. 직선은 식 (1)로부터 계산된 해석 되풀이 소성역 크기를 나타낸다. 식 (1)의 $\Delta K_{eff}$ 는 Kurihara et al. 의 JIS SM50B 실험에서 얻은 것이다. Kurihara et al. 의 실험결과는 유효응력강도 계수 폭 비, U 와 응력비, R 의 관계가 U=1/(1.5-R)으로 나타남을 보여 주었다. Fig. 4 에서 균열 길이 24.0mm 근처에서 되풀이 소성역의 크기가 안정되고 있음을 보여준다. 균열 길이 24.0mm 에서 26.0mm 사이에서는 수치해석을 통해 얻어진 되풀이 소성역 크기가 이론적 해석으로부터 얻어진 값과 거의 일치함을 보여준다. 계산의 신뢰성 제고를 위해 위의 경우 보다 작은 요소 크기의 해석도 수행하였다. Fig. 5 는 균열 선단 최소 요소 크기 15μm 인 경우에 대한 균열 길이 23.0mm 에서 25.5mm 사이의 되풀이 소성역크기 비교 결과이다. 이 결과도 20μm 의 경우와 비슷한 경향을 보여준다. 비록 연구 결과에는 나타내지 않았지만 균열 선단 최소 요소 크기가 25μm 의 경우에도 유사한 결과를 보여 주었다.

일반적으로 유한요소 해석을 이용한 균열 열림점 해석에서 균열 선단의 요소 크기는 균열 열림점 레벨에 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 그러나 수치해석으로부터 얻어진 되풀이 소성역 크기는 균열 선단 요소 크기의 영향을 받지 않는 것으로 나타난다.

Fig. 6 는 Kurihara et al.의 실험 결과로부터 얻은 값과 균열 선단 최소 요소 크기 20μm 인 경우에 대하여 수치해석으로 계산된 되풀이 소성역 크기를 이용해 식 (3)으로부터 구한 균열 열림 레벨 (level) 비를 나타낸 결과이다.

$$\frac{L}{L_{\max}} = 1 - \frac{\sqrt{\pi \Delta r_p}(2\sigma_y - \Delta S)\Delta S}{\Delta K - \Delta S\sqrt{\pi \Delta r_p}} \qquad (3)$$

여기서 $\Delta S$, $L$ 및 $L_{\max}$ 는 각각 하중 폭, 작용하중 및 최대 작용하중을 나타낸다.

앞에서도 잠시 기술한 바와 같이 균열 열림 레벨은 초기 균열 길이 $a_0 = 23.0mm$ 에 의해 생성된 단일 소성영역을 지난 영역부터 안정된 값을 나타냄은 알려져있다.[7]

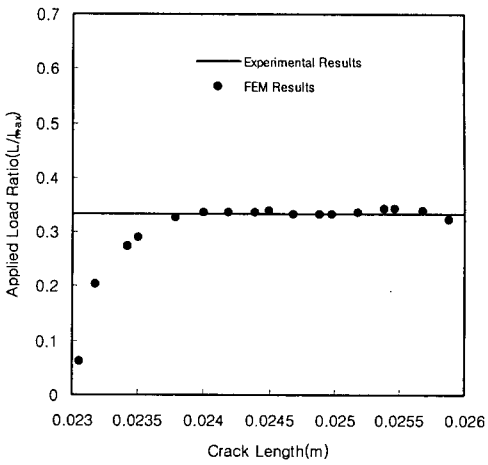



**Fig. 6** Comparison between the experimental and numerical results obtained from the reversed plastic zone size

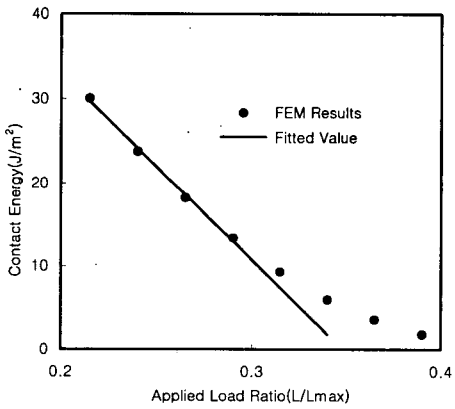



**Fig. 7** Changes in the contact energy as a function of applied load ratio

앞의 계산으로부터 단순 소성역의 값 $r_p$ 는 0.445mm 가 얻어지고, 이 경우 균열 열림 거동이 실험 값과 유사하게 되는 24.0mm 부근은 단순 소성영역의 가장자리 $a_0 + 2r_p$ 와 거의 일치하고 있다. 이는 Fig. 4 와 Fig. 5 의 되풀이 소성역 크기 변화에서도 같은 경향을 보여준다. 위의 결과를 근거로 되풀이 소성영역의 크기와 균열 열림점 레벨은 초기 균열에 의해 형성된 단일 소성역 이상, 즉 $a \geq a_0 + 2r_p$ 와 같이 균열이 진전 했을 때 안정된 값을 얻을 수 있다는 사실은 되풀이 소성역 크기 보다 작은 균열 선단 요소로 해석하였을 때 같은 경향을 나타낸다.

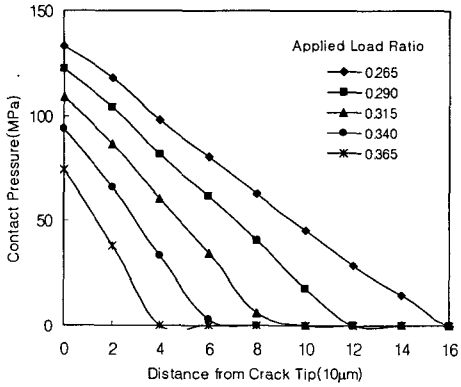



**Fig. 8** Variations of contact pressure as a function of the distance from crack tip for respective load level at crack length 25.9mm in the minimum mesh size of 20μm

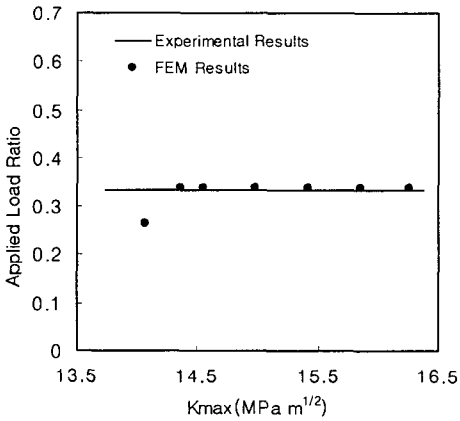



**Fig. 9** Comparison between the experimental and numerical results

위 사실로부터 되풀이 소성역보다 작은 균열 선단요소를 이용한 유한요소 법으로 결정한 되풀이 소성역으로 계산된 균열 열림점 레벨은 실험 값과 잘 일치함을 보여주고 있고 이 방법이 매우 유용함을 알 수 있다.

## 4. 토 론

이전의 연구와 앞 장에서 나타낸 바와 같이 균열선단 영역에서 요소 크기가 작아질수록 피로균열 닫힘 거동 해석에서 정확한 결과를 항상 나타내지 않는 것으로 나타나 있다. 균열 열림점을 고려한 되풀이 소성역의 크기와 비례하는 요소의 요소망으로 유한요소 해석을 수행한 균열 열림 거동은 실험 결과와 잘 맞는 것으로 알려졌다.[5~7]

일반적으로 균열 선단 영역에 작은 요소를 사용할수록 높은 열림점을 얻는 것으로 알려져 있다.[12~15] 이는 유한요소 해석 시 균열 선단 열림점을 균열 선단 직전의 절점이 열리기 시작할 때의 하중으로 정의하였기. 때문이다. 따라서 균열 선단 요소가 작을수록 열림점이 높게 나오고, 대부분의 유한요소 해석이 조밀한 요소가 정확한 해에 접근하는 것에도 일치하게 된다. 그러나 이전의 연구에서 균열 선단 요소가 작은 경우에도 균열 열림점 실험결과와 잘 맞지 않는다는 결과를 보여 주었다. 본 연구에서는 균열선단 요소 크기가 15, 20 및 25μm 의 균열 선단 요소를 사용하였다. 여기의 해석에서 균열 열림점을 고려한 되풀이 소성역의 크기는 대략 50-75 μm 정도 이다. Fig. 6 에서 나타낸 방법은 조밀한 균열 선단 요소를 사용해 얻어진 되풀이 소성역의 크기를 이용한 균열 열림점 거동의 예측이 매우 유용함을 보여 주었다. 이 결과로부터 균열 열림 거동과 되풀이 소성역의 크기와의 관계에는 매우 중요한 점이 있다는 것을 알 수 있다.

Fig. 7 은 하중이 가해지는 상태에서 하중 레벨의 함수에 대해서 균열 접촉면의 접촉에너지 변화를 나타낸 그림이다. 낮은 하중 레벨 즉 균열이 열리기 시작하는 단계에서는 하중이 증가 함에 따라 접촉에너지의 값은 선형적으로 감소한다. 접촉에너지는 하중 레벨 0.3 부근에서 선형 변화에서 급격히 벗어 난다. 여기에서 이 하중을 천이 하중이라 한다. 천이 하중은 물리적 변화의 존재를 의미하고 균열 열림점 측정 실험에서 자주 활용되는 하중-변위곡선으로부터 결정되는 균열 열림 레벨과 비슷하다. 천이하중보다 큰 하중 영역에서의 접촉에너지 소비는 천이 하중 이하의 영역의 경우보다 적은 것으로 나타난다. 천이하중 이하에서 에너지 변화는 균열 선단에서의 변형에너지의 변화를 의미한다. 따라서 천이하중에서 균열 선단 변형에너지 값이 급격히 변화한다는 의미는 천이 하중이 균열 열림 하중임을 의미한다.

Fig. 8 은 최소 요소 20μm 의 해석에서 균열 길이 25.9mm 에서 각각의 하중 레벨에 대한 균열 선단으로부터의 거리의 함수에 대한 접촉압력의 변화를 나타낸 결과이다. 그림에서 x 축의 20μm 단위는 균열 선단 위의 요소 크기를 나타낸다. 균열 열림 하중 레벨 0.34 의 닫힘 원형 기호는 균열 선단으로부터 60-80μm 사이 영역에서 요소가 열리기 시작한다. Fig. 4 에서 보여준 바와 같이 이 경우의 계산된 되풀이 소성역의 크기는 72μm 이다. 하중레벨 0.34 에서 요소가 열리는 지점과

되풀이 소성역의 크기가 일치하여, 이 하중을 균열 열림점으로 간주할 수 있다. 이 방법을 사용하여 계산된 열림점 레벨과 실험 값을 비교한 결과는 Fig. 9 에 나타내었다. 되풀이 소성역 크기의 경계 점에 위치하는 요소가 열리는 하중 레벨이 실험에서 얻은 결과와 잘 맞는 것을 알 수 있다.

## 5. 요약 및 결론

되풀이 소성역보다 작은 균열 선단 요소로 계산한 유한요소 법으로 결정한 되풀이 소성역으로 계산된 균열 열림점 레벨은 실험 값과 매우 잘 일치함을 보여주고 있고 이 방법이 매우 유용함을 알 수 있다.

균열 열림 거동과 되풀이 소성역의 크기와의 관계에는 매우 중요한 점이 있다는 것을 알 수 있다. 접촉에너지는 특정 하중레벨부근에서 선형 변화에서 급격히 벗어 난다. 이 하중을 천이하중이라 한다. 천이 하중은 물리적 변화의 존재를 의미하고 실험에서 하중-변위곡선으로부터 결정되는 균열 열림 레벨과 비슷하다. 천이하중보다 큰 하중 영역에서의 접촉에너지 소비는 천이 하중 이하의 영역의 경우보다 적은 것으로 나타난다. 천이하중 이하의 에너지 변화는 균열 선단에서의 변형에너지의 변화를 의미한다. 따라서 천이하중에서 균열 선단 변형에너지 값이 급격이 변화한다는 의미는 천이 하중이 균열 열림 하중임을 의미한다. 되풀이 소성역 크기의 경계 점에 위치하는 요소가 열리는 하중레벨이 실험 값에서 얻은 결과와 잘 맞는 것을 알 수 있다.

## 후 기

본 논문은 2005 학년도 동명정보대학교 학술연구비 지원에 의하여 이루어진 것임.

## 참고문헌

(1) Solanki, K., Daniewicz, S .R. and Newman Jr., J.C., 2004, "Finite Element Analysis of Plasticity-induced Fatigue Crack Closure: an Overview," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 149~171.

(2) Choi, H.C. and Song, J.H., "Finite Element Analysis of Closure Behaviour of Fatigue Cracks in Residual Stress Fields," *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol.18(1), 1995, pp. 105~117.

(3) Choi, H. C. 1994, "Finite Element Analysis of Closure Behaviour of Fatigue Cracks in Residual Stress Fields," *Ph. D. dissertation*, Korea Advanced Institute of Science and Technology.

(4) Park, S. J., Earmme, Y. Y. and Song, J. H., 1997, "Determination of the most Appropriate Mesh Size for a 2-d Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure Behaviour," *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 20(4), pp. 533~545.

(5) Choi, H. C., 2000, "A Study on the Determination of Closing Level for Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure," *KSME International Journal*, Vol. 14(4), pp. 401~407.

(6) Choi, H.C., 2003, "Finite Element Analysis for Fatigue Crack Closure Behavior Using Reversed Plastic Zone Size," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 27, No. 10, pp. 1703~1711.

(7) Choi, H. C., 2004, "Numerical Analysis for Prediction of Fatigue Crack Opening Level," *KSME International Journal*, Vol. 18(11), pp. 1991~1997

(8) Kurihara, M., Katoh, A. and Kawahara, M., 1987, "Effective of Stress Ratio and Step Loading on Fatigue Crack Propagation Rate," *Current Research on Fatigue, Tanaka, T., Jono, M. and Komai, K., Eds.*, Elsevier Applied Science, pp. 247~265.

(9) McClung, R. C., 1991, "Crack Closure and Plastic Zone Sizes in Fatigue," *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 14(4), pp. 455~468.

(10) McClung, R. C. and Sehitoglu, H., 1989, "On the Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure -1. Basic Modeling Issues," *Engng Fract. Mech.*, 33, pp. 237~252.

(11) McClung, R. C. and Sehitoglu, H., 1989, "On the Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure -2. Numerical Results," *Engng Fract. Mech.*, 33, pp. 253~272.

(12) Oliva, V., Cseplo, L., Materna, A. and Blahova, L., 1997, " FEM Simulation of Fatigue Crack Growth," *Materials Science and Engineering*, A234-236, pp. 517~520.

(13) Ohji, K., Ogura, K. and Ohkubo, Y., 1974, "On the Closure of Fatigue Cracks under Cyclic Tensile Loading," *Int. J. Fract.*, 10, pp. 123~134

(14) Newman, Jr., J. C., 1976, "A Finite-element Analysis of Fatigue Crack Closure," *Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590*, pp. 280~301.

(15) Newman, Jr., J. C., 1977, "Finite-element Analysis of Crack Growth under Monotonic and Cyclic Loading," *Cyclic Stress-Strain and Plastic Deformation Aspects of Fatigue Crack Growth, ASTM STP 637*, pp. 56~80.