

# 페널티화된 LMI를 이용한 구조적 제약이 있는 제어기 설계

## Structured Controller Synthesis Using a Penalized LMI Method

김 석 주\*, 권 순 만, 천 종 민, 문 영 현

(Seog-Joo Kim, Soonman Kwon, Jong-Min Cheon, and Young-Hyun Moon)

**Abstract** : This paper is concerned with an iterative linear matrix inequality (LMI) approach to the design of a structurally constrained output feedback controller such as decentralized control. The structured synthesis is formulated as a novel rank-constrained LMI optimization problem, where the controller parameters are explicitly described so as to impose structural constraints on the parameter matrices. An iterative penalty method is applied to solve the rank-constrained LMI problem. Numerical experiments are performed to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** : linear matrix inequality (LMI), penalty method, static output feedback, structured synthesis

### I. 서론

구조적 제약 조건이 있는 제어기 문제는 분산제어기 (decentralized controller)나 PID 제어기와 같이 구조적으로 이미 결정되어 있는 제어기를 설계하는 것을 말한다. 이 문제는 실질적인 제어기 설계에서 많이 등장하기 때문에 예로부터 많은 관심을 받아왔다. 분산제어기와 PID 제어기 외에도 저차원 제어기 설계나 정적출력피드백(Static Output Feedback: SOF) 제어기 문제도 행렬의 차원을 제약으로 가지는 구조적 제약이 있는 제어기 문제로 볼 수 있다.

구조적 제약이 있는 제어기 설계는 이 문제가 가지고 있는 비볼록성(non-convexity)때문에 아직까지도 풀기 어려운 문제로 남아 있다[1]. 하지만 같은 종류의 문제인 SOF 제어기 설계에 관해서는 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality: LMI) 분야에서 비교적 많은 연구가 있었다[2]. SOF 제어기 설계 문제를 잘 알려진 바와 같이 소거정리(e.g. [2])를 이용하여 나타내면 두 개의 Lyapunov 행렬이 서로 역행렬 관계가 있는 결합된(coupled) LMI로 표현할 수 있다. 또한 결합된 LMI는 비록 비볼록(non-convex)이지만 반복법을 이용하면 비교적 효율적으로 그 해를 구할 수 있다[3-5].

하지만 PID 제어기와 같이 일반적인 구조적 제약이 있는 제어기 설계 문제에는 제어기 행렬이 제거되는 소거정리를 사용할 수 없고 제어기 행렬이 LMI에 직접 나타나는 형태의 정식화가 필요하다. 최근에 이러한 형태의 수식화와 그 해에 관한 몇 가지 방법이 제시된 바 있다[6-9]. 하지만 초기치에 민감하거나[6] 최적해를 구하기 위해서는 초기에 가능해(feasible solution)가 필요하는[7] 등 개선해야 할 점이 있다.

본 논문에서는 구조적 제약이 있는 제어기를 설계하기

위해서 먼저 새로운 형태의 계수(rank)조건이 있는 LMI로 표현되는 정식화 방법을 제시한다. 그리고 계수조건이 있는 LMI 최적화 문제를 풀기 위해서 최근 제안된 페널티 방법 [10-12]을 이용하고자 하며 선행 연구와 결과를 비교하고자 한다. 본 논문에서 제안하고 있는 방법의 특징은 일반적인 구조적 제약을 다룰 수 있으며 최적화 문제에 직접 적용이 가능하다는 것이다.

본 논문에서 사용하는 주요 표기법은 다음과 같다.  $\overrightarrow{R}^{n \times m}$ ,  $\overrightarrow{S}^n$ 은 각각  $n \times m$  행렬과  $n \times n$  대칭행렬의 집합을 나타낸다.  $I_n$ 은  $n \times n$  단위행렬을 나타내고  $A^T$ 는 행렬  $A$ 의 전치행렬을,  $\text{tr}(A)$ 와  $\text{rank}(A)$ 는 각각 행렬  $A$ 의 대각합(trace)과 계수를 나타낸다.  $A > 0$ (또는  $A \geq 0$ )은 행렬  $A$ 가 대칭이고 양한정(positive definite)(또는 양반한정: positive semidefinite)이라는 것을 표시한다.  $A^\perp$ 는  $A$ 의 직교행렬(orthogonal complement matrix)로  $A^\perp A = 0$ ,  $A^\perp A^{\perp T} > 0$ 이다. 또한  $(\star)^T A X$ 는  $X^T A X$ 를 나타낸다.

### II. 구조적 제약조건이 있는 제어기 설계 문제

여기서는 먼저 본 논문에서 핵심이 되는 보조정리에 대해서 서술하고 구조적 제약이 있는 제어기 설계 문제에 적용하는 것에 대해서 설명한다.

**보조정리 1** :  $Q \in \overrightarrow{S}^n$ 와  $B \in \overrightarrow{R}^{n \times m}$ 에 대해서 다음은 등가이다.

$$(i) B^\perp Q B^{\perp T} < 0$$

(ii) 다음을 만족하는  $W \in \overrightarrow{S}^{n+m}$ ,  $W \geq 0$ 와 실수  $\mu > 0$ 가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} Q & B \\ B^T & \mu I_m \end{bmatrix} < W \quad (1)$$

$$\text{rank}(W) = m \quad (2)$$

**증명** : 조건 (i)은 Finsler의 정리에 의해서 다음을 만족하는  $\mu > 0$ 가 존재하는 것과 등가이기 때문에

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 4. 20., 채택확정 : 2005. 6. 20.

김석주, 권순만, 천종민 : 한국전기연구원 계속제어그룹

(sjkim@keri.re.kr/smkwon@keri.re.kr/jmcheon@keri.re.kr)

문영현 : 연세대학교 전기전자공학부(moon@yonsei.ac.kr)

$$Q - \frac{1}{\mu} BB^T < 0 \tag{3}$$

(3)과 조건 (ii)가 등가인 것을 증명한다. 먼저, (3)이 성립한다고 하고  $W$ 를 다음과 같이 정하자.

$$W = \begin{bmatrix} Q & B \\ B^T & \mu I_m \end{bmatrix}$$

여기서  $Q = \frac{1}{\mu} BB^T$  로 하면 (1)과 (2)가 성립하는 것을 알 수 있다. 비슷한 방법으로 (1)과 (2)가 성립하면 (3)이 성립함을 보일 수 있다. □

이 정리에서는 계수조건이 추가되고 LMI 변수가 늘어나는 단점이 있지만 모든 변수가 LMI에 나타나기 때문에 구조적 제약이 있는 제어기 설계에 이용할 수 있다.

이제 구조적 제약이 있는 제어기 설계 문제에 대해서 알아보기로 한다. 구조적 제약이 있는 제어기 문제는 구조적 제약이 있는 제어기 행렬을 구하는 문제로 표현할 수 있다. 예를들어 분산제어의 경우는 제어기 행렬이 블록대각 행렬이 되며 PID 제어는 PID 제어기의 상태방정식으로 표현되는 행렬이 된다. 또한 일반적인 구조적 제약이 있는 문제는 시스템 첨가(augmentation)기법[3]을 이용하면 구조적 제약이 있는 SOF 제어기 문제로 나타낼 수 있다. 따라서 본 논문에서는 구조적 제약이 있는 SOF 제어기 문제만을 다루기로 하고 다음과 같은 시스템을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ 는 각각 시스템의 상태, 제어입력 및 출력벡터이고  $A, B, C$ 가 주어지는 시스템 행렬이다.

SOF 안정화 제어기 설계 문제는 다음과 같은 정적출력력 환 제어기로

$$u = Ky \tag{5}$$

시스템 (4)의 폐루프 극점을 다음과 같은 영역으로 위치시키는 것이다.

$$D(p, q, r) = \{s \in \mathbb{C} : p + qs + q^*s^* + r|s|^2 < 0\} \tag{6}$$

예를 들면  $D(0, 1, 0)$ 은 연속 시스템의 좌반면(left-half plane)을 의미하고  $D(-1, 0, 1)$ 은 이산시간 시스템의 단위 원(unit circle)에 해당하는 영역을 나타낸다. 이때 다음 보조정리는 시스템 (4)에서 폐루프 시스템의 극점이 (6)을 만족하는 제어기가 존재할 조건에 관한 것이다.

**보조정리 2 :** 시스템 (4)에서 제어기 (5)에 의한 폐루프 시스템이 영역 (6)에 극점을 가지고 있을 필요충분조건은 다음 LMI와 계수조건을 만족하는  $P \in \mathbb{S}^n$ ,  $W \in \mathbb{S}^{3n}$ 와 실수  $\mu$ 가 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} pP & qP & (A+BKC)^T \\ q^*P & rP & -I_n \\ A+BKC & -I_n & \mu I_n \end{bmatrix} < W \tag{7}$$

$$P > 0, W \geq 0, \mu > 0 \tag{8}$$

$$\text{rank}(W) = n \tag{9}$$

**증명 :** Lyapunov 안정도 이론에 따르면 폐루프 시스템의 극점이 (6)의 영역 내에 있을 조건은 다음 LMI를 만족하는  $P \in \mathbb{S}^n$ ,  $P > 0$ 이 존재하는 것이고

$$(\star)^T \begin{bmatrix} pP & qP \\ q^*P & rP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A+BKC \end{bmatrix} < 0$$

여기에 보조정리 1을 적용하면 (7),(8),(9)를 얻을 수 있다. ■

이제 다음과 같은 일반화 플랜트에 대해서 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \tag{10}$$

여기서  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ 는 각각 시스템의 상태, 외부입력, 제어입력, 제어하고자 하는 제어변수 및 측정 벡터이고 행렬  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$ 은 주어지는 데이터 행렬이다. 이때 폐루프 시스템의 극점을 (6)의 영역에 위치시키면서 다음과 같은 일반화된 이차형식(generalized quadratic) 성능조건을

$$\int_0^T \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} dt < 0 \tag{11}$$

만족시키는 (5)의 제어기를 설계하는 문제를 생각해 보자. 잘 알려진  $H_\infty$  최적화의 경우 성능조건 (11)의 행렬은  $Q = -\gamma^2 I, S = 0, R = I$ 가 된다.

다음 보조정리가 (11)의 성능조건을 만족하는 SOF 제어기 존재에 관한 조건을 표시한다.

**보조정리 3 :** 시스템 (10)에서 제어기 (5)에 의한 폐루프 시스템이 극점 조건 (6)을 만족하고 이차형식 성능 조건 (11)을 만족할 필요충분조건은 다음의 LMI와 계수조건을 만족하는  $P \in \mathbb{S}^n$ ,  $W \in \mathbb{S}^{3n+2n_w+n_z}$ 와 실수  $\mu$ 가 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} pP & 0 & qP & 0 & A_{cl}^T & C_{cl}^T \\ 0 & Q & 0 & S & B_{cl}^T & D_{cl}^T \\ q^*P & 0 & rP & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & S^T & 0 & R & 0 & -I_{n_z} \\ A_{cl} & B_{cl} & -I_n & 0 & \mu I_n & 0 \\ C_{cl} & D_{cl} & 0 & -I_{n_z} & 0 & \mu I_{n_z} \end{bmatrix} < W$$

$$P > 0, W \geq 0, \mu > 0$$

$$\text{rank}(W) = n + n_z$$

여기서

$$\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 K C_2 & B_1 + B_2 K D_{21} \\ C_1 + D_{12} K C_2 & D_{11} + D_{12} K D_{21} \end{bmatrix}$$

이다.

**증명 :** 문헌 [13]과 [14]에 의하면 제어기 (5)로 시스템 (10)을 제어한다고 할 때 폐루프 시스템이 극점 조건 (6)과 성능조건 (11)을 만족할 조건은 다음 LMI를 만족하는 양한 정 행렬  $P \in \mathbb{S}^n$ 가 존재하는 것과 등가이다.

$$(\star) \begin{bmatrix} pP & 0 & | & qP & 0 \\ 0 & Q & | & 0 & S \\ \hline q^*P & 0 & | & rP & 0 \\ 0 & S^T & | & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \hline A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} < 0$$

여기에 보조정리 1을 적용하면 증명할 수 있다. ■

마지막으로 다음 보조정리는 SOF  $H_2$  최적제어기에 관한 것이다.

**보조정리 4 :** 시스템 (10)에서  $D_{11} = D_{21} = 0$ 으로 하고 제어기 (5)에 의한 페루프 시스템이  $H_2$  성능  $\|T_{zw}\|_2 < \gamma$ 을 만족할 조건은 다음의 LMI와 계수조건을 만족하는  $P \in \overrightarrow{S}^n, W \in \overrightarrow{S}^{3n+2n_z}$ 와 실수  $\mu$ 가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} & \text{tr}(B_1^T P B_1) \leq \gamma^2 \\ & \begin{bmatrix} pP & qP & 0 & A_{cl}^T & C_{cl}^T \\ q^*P & rP & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} & 0 & -I_{n_z} \\ A_{cl} & -I_n & 0 & \mu I_n & 0 \\ C_{cl} & 0 & -I_{n_z} & 0 & \mu I_{n_z} \end{bmatrix} < W \\ & P > 0, W \geq 0, \mu > 0 \\ & \text{rank}(W) = n + n_z \end{aligned}$$

여기서

$$A_{cl} = A + B_2 K C_2, \quad C_{cl} = C_1 + D_{12} K C_2$$

이다.

**증명 :** 문헌 참조[13]. ■

결론적으로 구조적 제약이 있는 제어기 설계 문제는 구조적 제약이 있는 상수 행렬을 구하는 문제로 귀착된다.

### III. 페널티 함수를 이용한 LMI 문제의 해법

페널티 함수를 이용하여 계수조건이 있는 LMI 최적화 문제를 푸는 방법은 최근 제안되었으며[10-12] 다음과 같은 형태의 문제를 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} \min & \quad c^T x \\ \text{s.t} & \quad x \in \Omega \\ & \quad \text{rank}(W) = r \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $x$ 는 구하고자 하는 변수이고  $W(x)$ 는  $x$ 에 관한 아핀(affine) 함수이며  $\Omega$ 는 LMI로 표현되는 볼록집합이다.

페널티 함수법은 문제 (12)를 페널티 함수를 이용하여 계수조건이 없는 문제로 바꾸고 기존의 LMI 패키지를 이용하여 계수조건이 없는 문제의 해를 순차적으로 구함으로써 문제 (12)의 해를 얻는 방법이다.

이 방법에서 페널티 함수는  $W$  행렬의  $n - r$ 개의 고유치의 합으로 정의되며 페널티 함수가 영이 되면 그 행렬의 계수는  $r$ 이하가 된다. 이것은 다음의 보조 정리로 알 수 있다.

**보조정리 5 :** [15, p.191] 어떤 행렬  $W \in \overrightarrow{R}^{n \times n}, W \geq 0$ 에 대해서 다음은 등가이다.

- (i)  $W$ 의 계수는  $\text{rank}(W) \leq r$  이다.
- (ii)  $\text{tr}(V^T W V) = 0$ 을 만족하는  $V \in \overrightarrow{R}^{n \times (n-r)}, V^T V = I_{n-r}$ 가 존재한다.

이제 문제 (12)에서 페널티 함수를 고려한 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\varphi(x, \rho, \mu, V) = \rho c^T x + \text{tr}(W) + \mu p(x, V) \quad (13)$$

여기서  $\mu$ 는 페널티 변수이고 페널티 함수  $p(x, V)$ 는

$$p(x, V) = \text{tr}(V^T W V) \quad (14)$$

이며  $\rho$ 는 최적화를 위한 하중값이다. 또한  $\text{tr}(W)$ 는 다른 고유치에 대한 상대적인 하중을 주기 위해서 추가되었다. 만약  $W$ 의 고유치가  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ 이라고 하면 (13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varphi(x, \rho, \mu, V) = \rho c^T x + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \mu \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \quad (15)$$

목적함수 (13)에서 추가된 항의 의미는 (15)로 보면 분명해진다. 즉,  $W$ 의 작은 순서로  $n - r$ 개의 고유치를 상대적으로 최소화시키는 함수를 페널티 함수로 선택한 것이다.

(13)에서 페널티 변수를 변화시키면서  $p(x, V) = 0$ 이 되는  $x$ 를 구하면 주어진 계수조건을 만족하는 해가 얻어지고 계속해서 하중값  $\rho$ 를 변화시키면 지역적으로 최적인 해를 얻을 수 있다. 따라서 계수조건이 있는 문제 (12)는 다음과 같이 계수조건이 없고 페널티 함수가 포함된 목적함수의 최적화 문제로 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} \min & \quad \varphi(x, \rho, \mu, V) \\ \text{s.t} & \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (16)$$

이제 최적화 문제 (16)을 다음과 같이 순차적으로 풀면 원하는 해를 얻게 된다.

$$x_k = \arg \min \{ \varphi(x, \rho_{k-1}, \mu_{k-1}, V_{k-1}) : x \in \Omega \} \quad (17)$$

여기서  $V_k$ 는  $W(x_k)$ 를 고유치 분해하면 얻을 수 있다. 페널티 함수법의 구현은 문헌 [11]을 참조하기 바란다.

### IV. 시뮬레이션

본 논문에서 제안하고 있는 알고리즘을 시험하기 위해서 MATLAB을 이용하여 시뮬레이션을 수행하였다.

**예제 1 :** 이 모델은 화학로(chemical reactor)의 연속시간  $H_\infty$  최적제어 문제로 문헌 [16]에서 논의되었으며 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1.38 & -0.2077 & 6.715 & -5.676 \\ -0.5814 & -4.29 & 0 & 0.675 \\ 1.067 & 4.273 & -6.654 & 5.893 \\ 0.048 & 4.273 & 1.343 & -2.104 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.679 & 0 \\ 1.136 & -3.146 \\ 1.136 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} I_4 \\ 0_{4 \times 2} \end{bmatrix}, \quad B_1 = I_4$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0, \quad D_{21} = 0$$

이때 다음과 같은 구조를 가지는 분산제어기를 보조정리

3과 4장의 페널티 함수법(Penalty Function Method: PFM)을 이용해서 설계하였다.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

그 결과  $\gamma_\infty = 1.8559$ 와 다음 제어기를 얻었으며

$$K = \begin{bmatrix} 0.97648 & 0.0 \\ 0.0 & 6.3382 \end{bmatrix}$$

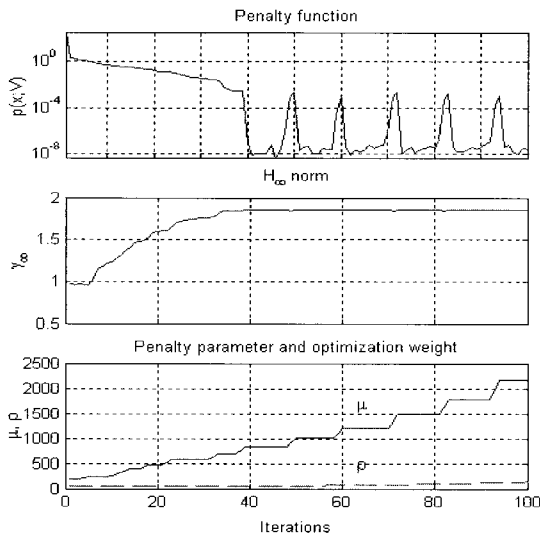


그림 1. 예제 시스템 1에 대한 PFM의 계산 특성.  
Fig. 1. Computational behavior of the PFM for example 1.

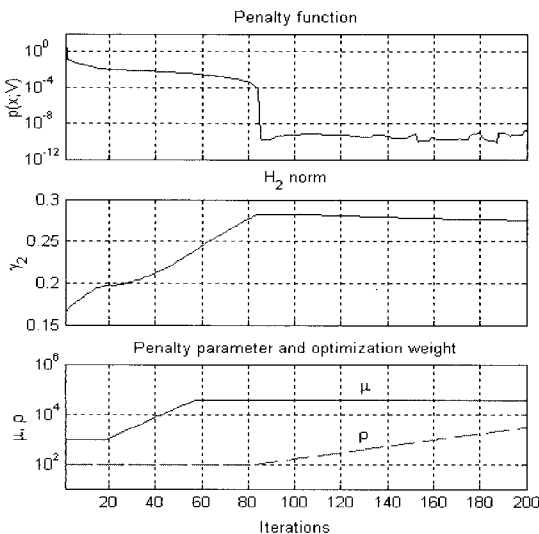


그림 2. 예제 시스템 2에 대한 PFM의 계산 특성.  
Fig. 2. Computational behavior of the PFM for example 2.

표 1. 예제 시스템 2에 대한 계산 결과 비교.  
Table 1. Comparison of computation results for example 2.

방법	[17]	[6]	PFM
$\ T_{zw}\ _2$	0.33	0.27331	0.27296

그림 1은 이때 PFM의 계산 특성을 나타내고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 반복횟수 40번에 가능해를 얻었으며 그때부터 최적화중을 조정하여 지역적인 최적해를 얻을 수 있었음을 알 수 있다.

예제 2 : 이 문제는 이산시간  $H_2$  최적제어기 설계 문제로 문헌 [6]과 [17]에서 다루었으며 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.8189 & 0.0863 & 0.09 & 0.0813 \\ 0.2524 & 1.0033 & 0.0313 & 0.2004 \\ -0.0545 & 0.0102 & 0.7901 & -0.258 \\ -0.1918 & -0.1034 & 0.1602 & 0.8604 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.0953 \\ 0.0145 \\ 0.0862 \\ -0.0011 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.0045 & 0.0044 \\ 0.1001 & 0.01 \\ 0.0003 & -0.0136 \\ -0.0051 & 0.0936 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = I_4$$

이때 다음의 구조를 가지는 분산제어기를 보조정리 4와 PFM을 이용하여 설계하였으며

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

다음과 같은 제어기를 얻었다.

$$K = \begin{bmatrix} -0.4104 & -0.3536 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3492 & -0.1648 \end{bmatrix}$$

표 1은 본 논문의 결과와 선행 연구자들과 결과를 비교한 것이며 본 연구의 결과가 가장 좋음을 알 수 있다. 그림 2는 이때 PFM의 계산 특성을 나타내고 있다.

예제 3 : 이번 문제는 문헌 [18]에서 사용된 예로  $H_2$  최적 PID 제어기 설계 문제이다. 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.2 & -0.9 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = [1 \ -1 \ 1], D_{11} = D_{21} = 0$$

보다 실질적인 제어기 설계를 위해서 순수 미분과 순수 적분 형태를 가지는 이상적인 PID 제어기 대신 다음과 같은 입력제한과 대역통과 특성을 가지는 PID 제어기 설계를 고려한다.

$$C(s) = k_p + k_i \frac{1}{s + \tau_i} + k_d \frac{s}{\tau_d s + 1}$$

이 전달함수를 상태공간으로 표현하면

$$K = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_i & 0 & | & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_d} & | & \frac{1}{\tau_d} \\ \hline k_i & -\frac{k_d}{\tau_d} & | & k_p + \frac{k_d}{\tau_d} \end{bmatrix}$$

이 된다. 이러한 제어기를 시스템에 첨가시키고 구조적 제약이 있는 SOF 문제를  $K$ 에 관해서 풀어 다음 표 2와 같

표 2. 예제 시스템 3에 대한 결과 비교.

Table2. Comparison of computation results for example 3.

방법	$\ T_{zw}\ _2$	$k_p$	$k_i$	$k_d$
[18]	0.9723	-0.2726	0.0	-0.2751
PFM	0.9769	-0.27135	-0.0004	-0.27295

은 해를 얻었다. 이때 얻어진 적분 및 미분 관련 상수는  $\tau_i = 0.0996$ ,  $\tau_d = 0.0991$ 이었다. 표 2에서 문헌 [18]의 최적해와 거의 비슷한 해를 얻었음을 알 수 있다.

이상의 시뮬레이션 결과 본 논문에서 제안하고 있는 계수조건부 LMI 표현법과 페널티 함수법을 이용하여 구조적 제약이 있는 제어기 설계를 효율적으로 할 수 있다는 사실을 확인할 수 있었다.

**V. 결론**

본 논문에서는 구조적 제약조건이 있는 제어기 설계에 대해서 연구하였다. 구조적 제약이 있는 제어기를 설계하기 위해서 새로운 형태의 LMI 조건을 제안하였고 이를 반복 페널티 법을 이용하여 해를 구하였다. 제시된 방법으로 시뮬레이션을 수행한 결과 충분히 효율성이 입증되었다.

**참고문헌**

[1] M. G. Safonov, K. C. Goh, and J. H. Ly, "Control system synthesis via bilinear matrix inequality," *In Proc. Amer. Control Conf.*, pp. 45-49, 1994.

[2] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis, *A Unified Approach to Linear Control Design*. Taylor & Francis, 1997.

[3] L. E. Ghaoui, F. Oustry and M. AitRami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 8, 1171-1176, 1997.

[4] K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton, "Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods," *Automatica*, vol. 32, no. 8, pp. 1117-1125, 1996.

[5] P. Apkarian, D. Noll and H. D. Tuan, "Fixed-order  $H_\infty$  control design via a partially augmented Lagrangian method," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 13, pp. 1137-1148, 2003.

[6] Y. Ebihara and T. Hagiwara, "Structured controller synthesis using LMI and alternating projection algorithm

method," *In Proc. Conf. on Decision and Control*, pp. 5632-5637, 2003.

[7] M. C. de Oliveira, J. F. Camino, and R. E. Skelton, "A convexifying algorithm for the design of structured linear controllers," *In Proc. Conf. on Decision and Control*, pp. 2781-2786, 2000.

[8] J. Han and R. E. Skelton, "An LMI optimization approach for structured linear controllers," *In Proc. Conf. on Decision and Control*, pp. 5143-5148, 2003.

[9] K. Tan and K. M. Grigoriadis, "Robust decentralized control using alternating projection approach," *In Proc. Amer. Control Conf.*, pp. 801-805, 2000.

[10] S. J. Kim, Y. H. Moon, S. Kwon and K. H. Kim, "Rank-constrained LMI approach to mixed  $H_2/H_\infty$  static output feedback controllers", *IFAC World Congress*, 2005.

[11] 김석주, 이종무, 권순만, 문영현, "고정 구조를 가지는  $H_\infty$  전력계통 안정화 장치 설계," *전기학회논문지*, 제53권, 제12호, pp. 655-660, 2004.

[12] 김석주, 김춘경, 김국현, 문영현, "반복 선형행렬부등식을 이용한 저차원  $H_\infty$  제어기 설계," *제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지*, 제11권, 제4호, pp. 279-283, 2005.

[13] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, "Multiobjective output feedback control via LMI optimization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 7, pp. 896-911, 1997.

[14] M. Chilali and P. Gahinet, " $H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 3, pp. 358-367, 1999.

[15] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1986.

[16] P. Apkarian, D. Noll, and J. B. Thevenet, "A spectral quadratic-SDP method with applications to fixed-order  $H_2$  and  $H_\infty$  synthesis," available:<http://www-ext.cert.fr/dcsd/cdin/apkarian>

[17] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou, "Extended  $H_2$  and  $H_\infty$  norm characterization and controller parameterizations for discrete-time systems," *Int. J. Control*, vol. 75, no. 9, pp. 666-679, 2002.

[18] M. T. Ho, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "Control system design using low order controllers: constant gain, PI and PID," *In Proc. Amer. Control Conf.*, pp. 571-578, 1997.



**김 석 주**

1984년 연세대학교 전기공학과 졸업(학사). 1986년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1987년~현재 한국전기연구원 계측제어그룹. 관심분야는 강인제어, 실시간 제어.



**권 순 만**

1982년 부산대 전기공학과 졸업(학사). 1984년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1999년 Washington University 졸업(박사). 1984년~현재 한국전기연구원 계측제어그룹 그룹장. 관심분야는 신호처리, 실시간 제어.



**천 종 민**

1973년 12월 4일생. 1996년 부산대학교 전기공학과 졸업(학사). 1999년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2001년~현재 한국전기연구원 계측제어연구그룹 연구원. 관심분야는 지능제어, 비선형제어, 고장 진단.



**문 영 현**

1975년 서울대학교 전기공학과 졸업(학사). 1978년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1983년 오레곤 주립대 대학원 졸업(공학박). 현재 연세대학교 전기전자공학부 교수. 관심분야는 전력계통해석 및 제어.