불규칙한 다층 물성을 가지는 지반의 지진 응답 해석

Earthquake Response Analysis considering Irregular Soil Layers

박 장 호* 박 재 균**
Park, Jang-Ho Park, Jae-Gyun

국문요약

엄밀한 지반-구조물 상호작용 해석을 위해서는 지반에 대한 묘사가 적절히 이루어져야 한다. 그러나 물성이 불연속적이거나 지층의 모양이 복잡할 때에는 유한요소망을 구성하는 것이 어려운데, 그 이유는 유한요소망이 지층의 모양을 정확히 나타내어야하기 때문이다. 이러한 어려움을 극복하기 위하여 본 연구에서는 지층의 불연속선을 따라 요소를 재배열하지 않고 엄밀하게 수치적분이 가능한 방법을 채용하였다. 그 결과로 정렬된 요소망을 그대로 이용하게 되어 강성행렬의 성질이 좋아지며, 해석 또한 신뢰성이 높아지게 되었다. 이 해석 방법을 이용하여 지진응답에 미치는 지층의 영향을 조사하였으며, 결과적으로 복잡하고 불연속적인 물성을 가지는 지층으로 이루어진 지반과 구조물의 상호작용을 해석하는 데에 쉽게 이용될 수 있음을 보였다.

주요어 : 불연속 지층, 복잡한 지형, 지반-구조물 상호작용, 수치적분

ABSTRACT

Precise analysis of soil-structure interaction requires a proper description of soil profile. However, such approach becomes generally nearly unpractical for soil exhibiting material discontinuity and complex geometry since meshes should match that material discontinuity line. To overcome these difficulties, a different numerical integration method is adopted in this paper, which enables to integrate easily over an element with material discontinuity without regenerating mesh following the discontinuity line. As a result the mesh is highly structured, leading to very regular stiffness matrix. The influence of the shape of soil profile on the response is examined and it is seen that the proposed soil-structure analysis method can be easily used on soil-structure interaction problems with complicated soil profile and produce reliable results regardless of material discontinuities.

Key words : discontinuous soil layer, complex geometry, soil-structure interaction, numerical integration

1. 서 론

지진파에 의한 지반 및 구조물의 응답을 해석할 때 주로 사용되는 방법은 탄성지반에 대한 근사적 모델링 방법과 유한요소법을 사용한 탄소성지반의 정밀 모델링 방법 등이 있다. 지반-구조물 상호작용 해석에서 특히 탄소성지반에 대한 정밀 모델링이 중요한 이유는 탄소성지반이 지진파를 변화시켜 그 위에 놓이는 구조물의 거동에 큰 영향을 미치기 때문이다.

연약지반의 영향을 고려한 지반-구조물 상호작용에 대하여 많은 연구가 이루어져왔다.[(1),(2),(3),(4)] 그러나 대부분의 연구들은 지반을 한 가지 매질이나 또는 다층의 수평 층으로 이루어진 매우 단순한 형태로 가정하였다. 이러한 단순 지층의 가정은 기본적으로 정확한 지층 묘사가 불가능하므로 해석의 높은 신뢰성을 기대하기가 어렵다. 그러므로 지반의 정밀한 묘사를 위한 새로운 방법이 필요하다.

복잡한 지층을 갖는 지반의 경우 유한요소법을 이용하면 그 형상을 따라서 요소를 만들고 각 요소마다 하나의 물성을 대응시켜 어느 정도의 복잡한 형상을 묘사할 수 있다. 그러나 지층의 복잡한 정도에 따라 각 요소의 모양이 심하게 왜곡될 수 있으며, 또한 각 경우에 맞는 요소를 생성하는 것 자체도 시간이 많이 걸리게 된다. 요소의 모양이 정다각형을 크게 벗어나게 되면 요소가 볼록성(convexity)을 잃기 쉬우며, 그 결과로 계산되는 강성행렬은 역행렬 계산이 어려운 나쁜 성질(ill-conditioned)의 행렬이 될 가능성이 높아진다. 이러한 일련의 영향은 해석적인 결과와 관계없이 수치해석상의 오차를 크게 하므로 더욱 부정확한 수치 해를 얻게 된다. 본 논문에서는 두 가지 물성을 갖는 유한요소에 대한 수치적분법을 이용하여 정렬된 유한요소를 구성하고, 이로부터 주어진 시스템에 대한 보다 정밀한 수치해석결과를 얻는 방법을 제시한다. 이를 통하여 복잡한 지층을 가지는 경우의 지반-구조물 상호작용 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

2. 해석 방법

탄성지반에 대한 응답을 계산하는 방법은 크게 두 부분으로 나누어진다. 첫 부분에서는 불연속 함수의 적분법을 소개하고, 두 번째 부분에서는 이를 이용한 지반-구조물 상호작용의 해석기법에 대하여 설명한다.

2.1 불연속함수의 적분법

일반적인 유한요소해석에서 여러 가지 물질로 이루어진

* 정회원·아주대학교 환경건설교통공학부, 조교수
** 정회원·단국대학교 토목환경공학과, 전임강사(대표저자:jpark@dankook.ac.kr)
본 논문에 대한 토의를 2006년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다. (논문접수일 : 2005. 11. 2 / 심사종료일 : 2005. 11. 8)

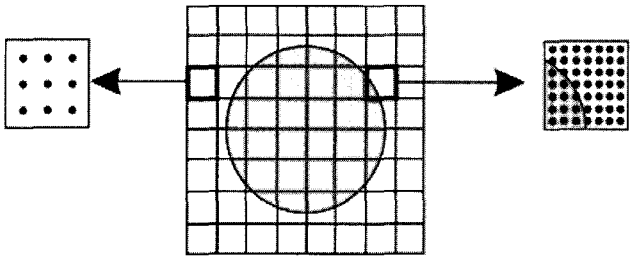
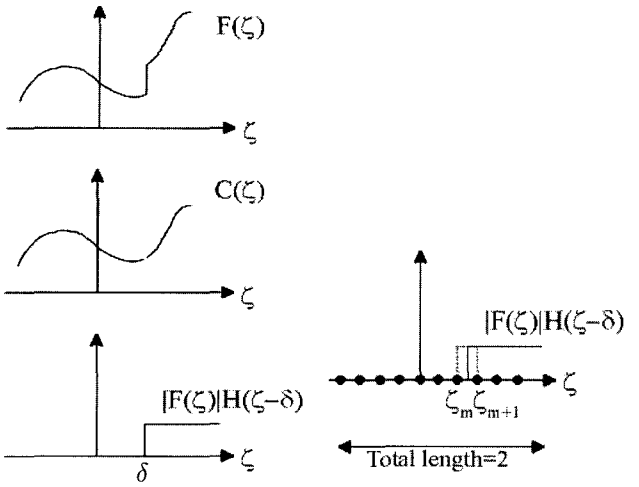


그림 1 물성 불연속면을 가지는 요소의 모델링



(a) 함수의 분리 (b) 함수의 수치적분

그림 2 불연속 함수의 적분계산

구조를 묘사할 때는 물성의 불연속면이 요소의 경계면이 된다. 이는 기본적으로 하나의 요소가 하나의 물성만을 가질 수 있는 유한요소법의 한계 때문이다. 그러나 그 불연속면이 복잡한 경우 불연속면을 따라서 요소를 만드는 과정에 많은 노력이 필요하며, 심한 경우에는 요소의 모양이 왜곡되어 수치해석의 결과에 부정적인 영향을 미칠 수 있다.[5]

이 한계를 극복하기 위해서 본 연구에서는 하나의 요소 안에 물성 불연속면을 가지는 경우에 대한 정밀한 수치해석을 할 수 있는 방법을 채택하였다. 이 방법은 여러 논문을 통하여 그 유효성을 검증받았다.[6],[7],[8] 그림 1은 두 가지 물성으로 이루어진 영역을 나타낸다. 전체 영역은 같은 모양과 크기로 만들어진 요소로 분할되어 있는데 일부 요소는 두 가지 물성을 가지고 있는 것을 볼 수 있다. 확대된 요소에서 점들은 유한요소의 강성행렬과 질량행렬을 구하기 위하여 수치적분에서 사용되는 가우스 적분점을 나타낸 것으로, 불연속면이 있는 요소에서는 많은 수의 적분점을 가지며 불연속면이 없는 요소는 적은 수의 (일반적인) 적분점을 가진다.

그림 2와 같이 임의의 위치에서 불연속이 발생하는 불연속 함수의 적분 오차는 다음과 같이 계산될 수 있다. 그림 2에서 δ의 위치에서 함수의 불연속이 발생할 때 불연속함수 $F(\zeta)$는 다음 식과 같이 연속함수 $C(\zeta)$와 unit step 함수 $|F(\delta)|H(\zeta-\delta)$의 합 으로 나타낼 수 있다.

$$F(\zeta)=C(\zeta)+|F(\delta)|H(\zeta-\delta) \tag{1}$$

여기서 ζ는 요소에서의 국부좌표계를 의미한다. 불연속 실수함수 $F(\zeta)$를 주어진 영역에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int_{-1}^{1} F(\zeta)\,d\zeta=\int_{-1}^{1}[C(\zeta)+|F(\delta)|H(\zeta-\delta)|]\,d\zeta \tag{2}$$

위 식에서 연속함수 $C(\zeta)$와 step 함수 $|F(\delta)|H(\zeta-\delta)$를 가우스 적분법(Gauss quadrature rule)을 사용하여 각각 적분을 수행하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{-1}^{1} C(\zeta)\,d\zeta \approx \sum_{i=1}^{N} C(\zeta_i)\,w_i \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|F(\delta)|H(\zeta-\delta)d\zeta &\approx \sum_{i=1}^{N}|F(\delta)|H(\zeta_i-\delta)w_i \\ &=|F(\delta)|\sum_{i=1}^{m}0\cdot w_i+|F(\delta)|\sum_{i=m+1}^{N}1\cdot w_i\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 N은 가우스 적분점(Gauss quadrature point)의 개수이고, w_i는 가우스 적분 가중치(Gauss quadrature weight)를, ζ_i는 가우스 적분점의 위치를 나타낸다. 가우스 적분법에 의하여 연속함수의 적분이 정확하게 이루어졌다면 불연속함수의 적분에서 발생하는 오차는 다음 식과 같이 구할 수 있다.

Error

$$\begin{aligned}&=\left|\int_{-1}^{1} F(\zeta)d\zeta-\sum_{i=1}^{N}(C(\zeta_i)+|F(\delta)|H(\zeta_i-\delta))w_i\right| \\ &=|F(\delta)|\left|(1-\delta)-\sum_{i=m+1}^{N}w_i\right| \\ &\le|F(\delta)|\left|\sum_{i=m}^{N}w_i-\sum_{i=m+1}^{N}w_i\right| \\ &\le|F(\delta)|\cdot\max|w_i|\cdot\max|\zeta_i-\zeta_{i+1}|\end{aligned} \tag{5}$$

따라서 가우스 적분법에 의한 불연속함수의 적분 오차 범위는 가장 큰 가우스 적분 가중치인 $|w_i|_{\max}$와 인접한 두 가우스 적분점 사이의 최대거리 $|\zeta_i-\zeta_{i+1}|_{\max}$에 의하여 결정된다. 실수값 w_i와 $\zeta_i-\zeta_{i+1}$의 최대값은 각각 $1.93N^{-0.795}$, $2.6N^{-1.02}$으로 오차의 범위는 다음의 식으로 표현될 수 있다.[6],[7],[8]

$$\textbf{Error}\le\max|w_i|\cdot\max|\zeta_i-\zeta_{i+1}|\approx 5.07N^{-1.82} \tag{6}$$

2차원 요소의 강성 행렬 계산에서도 이와 동일한 방법이 적용된다. 이를 이용하여 요소 내에 하나의 불연속이 존재하는 2차원 요소에서 발생할 수 있는 오차 범위를 가우스 적분점의 개수에 따라 구하여 정리하면 표 1과 같다. 표 1에서 보는 바와 같이 요소 내에 불연속이 존재하는 경우에도 이 논문에서 채용한 방법으로 적절한 가우스 적분점의 개수를 사용하면 요소의 강성 행렬을 정확하게 구할 수 있음을 알 수 있다.

표 1 Gauss point 개수에 따른 적분 오차의 범위

Gauss rule	Error bound $\left(\frac{[5.07N^{-1.82}]^2}{4}\right)$
2 x 2	0.5155
3 x 3	0.1178
5 x 5	0.0184
7 x 7	0.0054

2.2 지반-구조물 상호작용 해석방법

일반적인 지반-구조물 상호작용 해석에서 구조물을 지지하는 지반의 강성은 구조물의 거동에 큰 영향을 미치므로 지반의 정확한 묘사는 매우 중요하다. 해석방법은 이러한 지반을 해석에 포함하는 방식에 따라 직접법(direct method)과 부분구조법(substructure method)으로 나눌 수 있다.[9] 본 논문에서는 직접법[10],[11]을 채택하였으며, 지반과 구조물을 그림 3과 같이 정렬된 요소(structured elements)로 분할하였다. 직접법은 그 방법이 단순하고 정확도가 높기 때문에 많이 이용되고 있다.

경계조건과 지진입력의 처리도 해석 결과에 직접적인 영향을 미치므로 중요하다. 지반의 측면 경계는 Lysmer 경계를 적용하여 경계의 각 절점에 점성 완충장치(viscous damper)를 수평 및 수직으로 배치하였다. 이때 경계에서 접선방향의 완충장치는 전단파의 에너지를 흡수하고 수직방향의 완충장치는 P 파의 에너지를 흡수하게 되는데, 그 관계는 다음과 같다.[12]

$$c_t = A\rho v_s \tag{7}$$

$$c_n = A\rho v_p \tag{8}$$

위 식에서 ρ는 지반의 밀도, v_s, v_p는 각각 전단파와 P 파의 속도, A는 유효단면적을 나타낸다. 이때 지진파에 대한 거동을 충분히 표현하기 위해서 요소의 크기는 가장 짧은 파장의 1/5에서 1/8보다 작아야 한다.

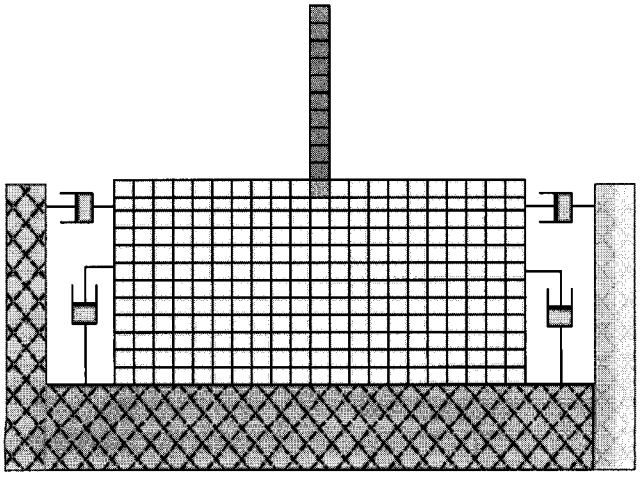


그림 3 지반-구조물 상호작용 모델

3. 지반의 응답해석

제안한 방법을 사용하여 복잡한 지층을 가지는 지반에서의 지진입력에 대한 응답을 계산하였다. 각각 다른 지층 형상을 가지는 지반의 바닥에 지진입력이 작용했을 때 구조물과 접한 지표면 및 구조물 상단에서의 응답을 계산하고 이 결과를 비교하였다.

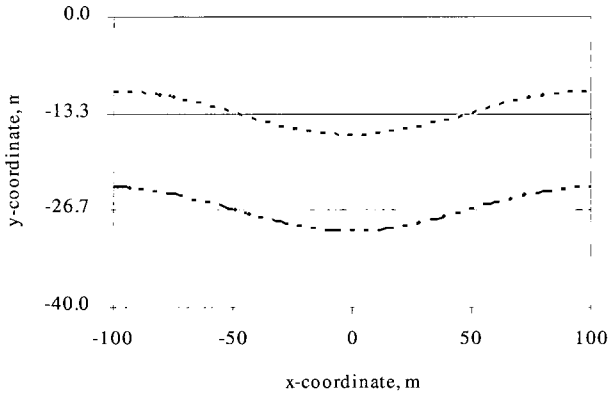
3.1 구조물과 지층의 성질

본 논문에서는 연약지반에 놓인 10층 건물에 대한 지반-구조물 상호작용 해석을 수행하였다. 구조물은 그림 3에서의 구조물과 같은 형식의 shear building을 사용하였으며, 그 물성은 표 2에 나타내었다. B1은 지하 1층을 나타내며, 지표면 아래에 위치한다. 구조물의 감쇠는 0.03의 값을 사용하였으며, Rayleigh Damping 을 이용하였다.

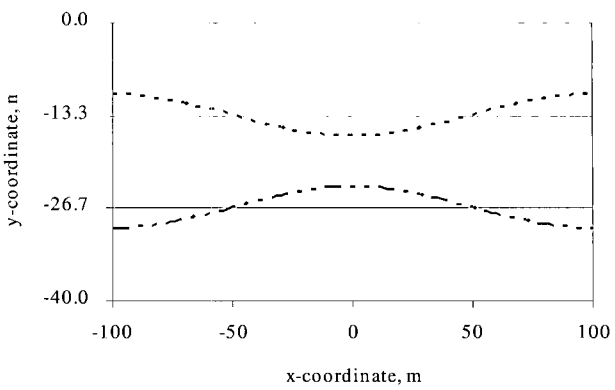
표 2 구조물의 물성

Floor	Level(m)	Stiffness(kN/m)	Mass(kg)
11	36	-	1850000
10	33	4500000	1050000
9	29.5	5950000	1050000
8	26	6480000	1050000
7	22.5	7400000	1050000
6	19	7820000	1050000
5	15.5	8540000	1150000
4	12	9020000	1150000
3	8.5	9890000	1150000
2	4.5	10200000	1150000
1	0	7280000	1390000
B1	-4.5	∞	1750000

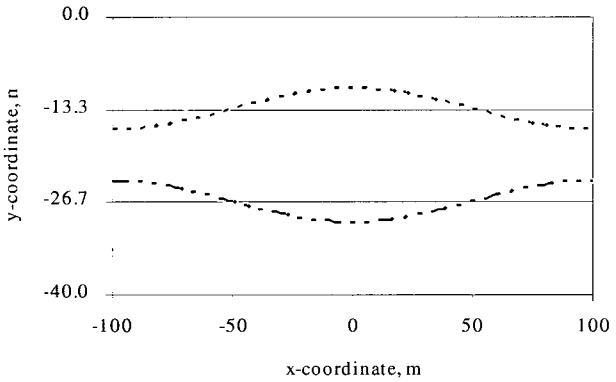
동일한 지진입력 가속도에 대하여 5 가지 형태의 지층에 대한 응답을 구하였다. 지층 케이스 *nn* 은 이상적인 경우로 그림 4에서의 실선으로 표시된 수평 층상 모델이다. 다른 4 개의 케이스(*mm, mp, pm, pp*)는 사인함수(sine function)로 생성되는 단면을 가지고 있으며, 그림 4에 각각 나타내었다. 지반의 크기는 100mX40m이며, 21X12=252개의 직사각형 고체요소로 나뉘어졌다. 지반의 물성은 표 3에 나타나있다. 각 요소에 물질의 불연속면이 존재하면 7X7=49 개의 적분 점을 사용하고 그렇지 않으면 3X3=9 개의 적분 점을 사용함으로써 계산의 증가를 최소화하고 전체 계산의 정도를 높였다. 좌우의 수직경계에는 수평, 수직의 완충장치가 설치되었으며 지반의 바닥은 기반암(bed rock) 과 닿아 있는 것으로 가정하였다.



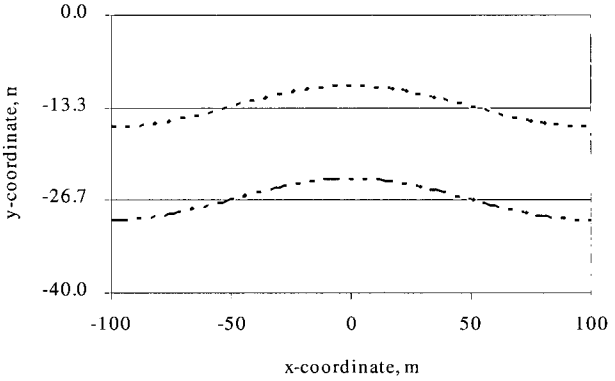
(a) case *mm*



(b) case *mp*



(c) case *pm*



(d) case *pp*

그림 4 지반 층상구조

위의 네 개의 층상구조는 다음의 함수들로 간단히 구성된다:

(a) case 1 (*mm*) : $y=-3\cos(x\pi/100)-13.33$,
$y=-3\cos(x\pi/100)-26.67$

(b) case 2 (*mp*) : $y=-3\cos(x\pi/100)-13.33$,
$y=+3\cos(x\pi/100)-26.27$

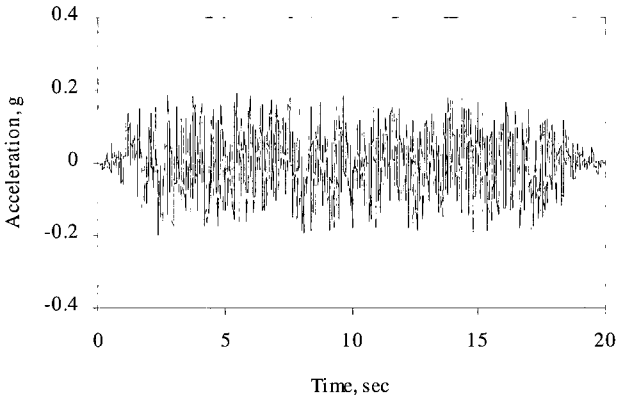
(c) case 3 (*pm*) : $y=+3\cos(x\pi/100)-13.33$,
$y=-3\cos(x\pi/100)-26.67$

(d) case 4 (*pp*) : $y=+3\cos(x\pi/100)-13.33$,
$y=+3\cos(x\pi/100)-26.67$

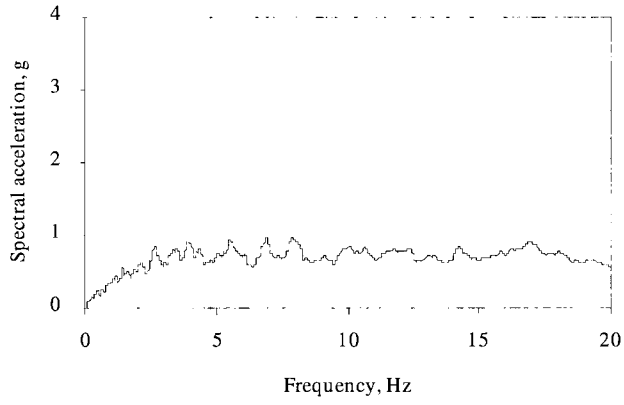
표 3 지반층의 물성

Layer	S-wave velocity (m/s)	Density (kg/m^3)	Poisson's ratio
Top (0-13.33m)	350	1800	0.45
Middle (13.33-26.67m)	650	1900	0.40
Bottom (26.67-40.00m)	1000	2000	0.35

인공지진 가속도 시간이력을 기반암의 입력 가속도로 이용하였으며 도로교시방서에 묘사된 응답스펙트럼을 사용하여 만들었다(그림 5).

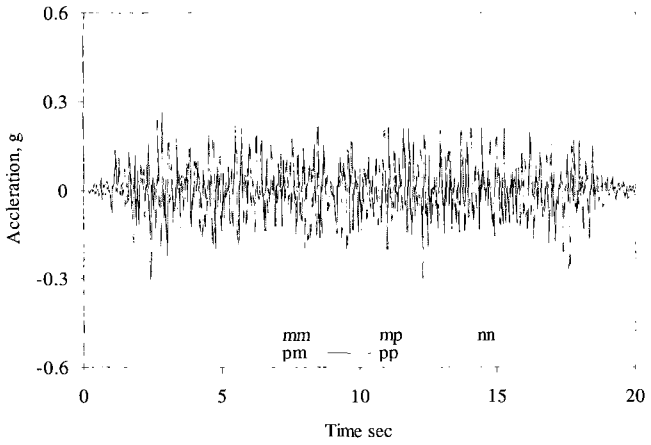


(a) 가속도 시간이력

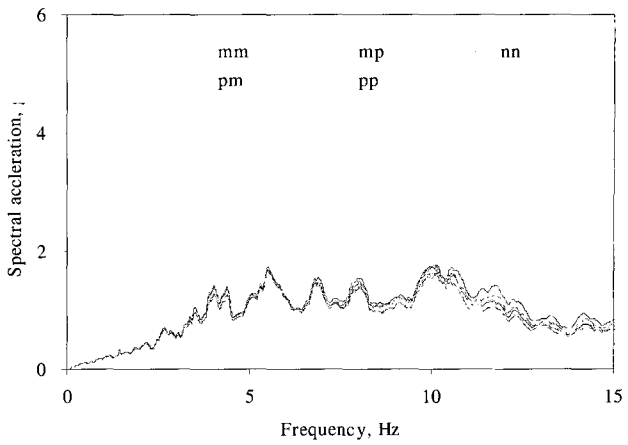


(b) 가속도 응답 스펙트럼

그림 5 기반암에서의 입력 지반 가속도

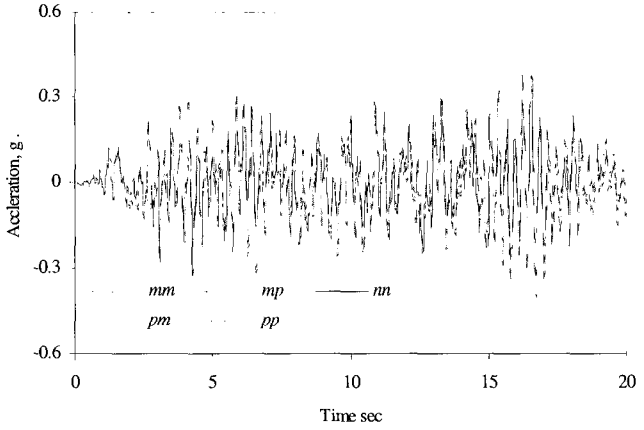


(a) 지표면의 가속도 시간이력

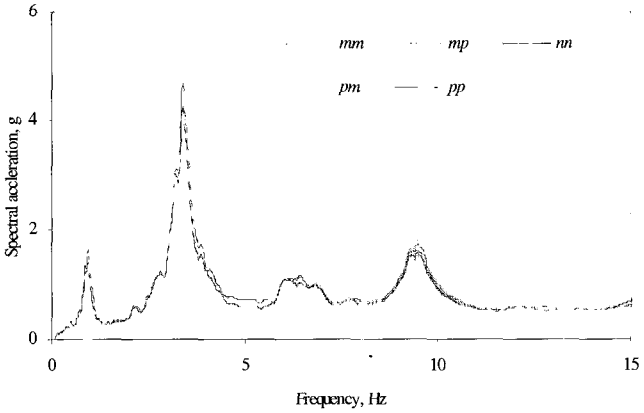


(b) 지표면의 응답 스펙트럼

그림 6 구조물이 없는 경우의 지표면에서의 응답



(a) 지표면의 가속도 시간이력



(b) 지표면의 응답 스펙트럼

그림 7 구조물이 있는 경우 구조물과 접한 지표면에서의 응답 비교

3.2 지반-구조물 상호작용 해석결과

본 논문에서 적용한 불연속면의 적분법을 이용하여 5가지의 지반층상에 대한 지반 및 지반-구조물 상호작용으로 지반과 구조물의 거동을 구하였다.

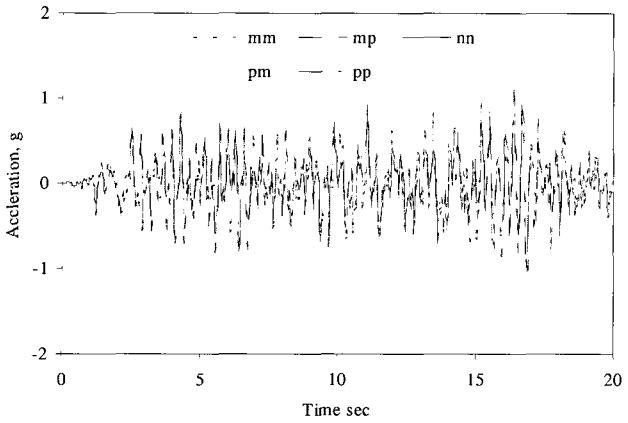
먼저 구조물이 없는(즉, 자유장 해석) 경우에 대한 지표면에서의 응답을 구하였다. 그림 6의 (a)는 그 시간이력을 비교한 것이고, 그림 6(b)는 응답스펙트럼을 비교한 것이다. 응답스펙트럼을 보면, 10 Hz 이상에서 각 경우에 대한 차이가 커짐을 알 수 있다. 특정 주파수에서의 큰 peak 값은 보이지 않고 완만한 형태를 보인다. 제시한 해석 방법의 정확도를 검증하기 위하여 수평층상에 대한 해석을 수행하고(케이스 *nn*) 그 결과를 SHAKE[13] 프로그램에 의한 결과와 비교하였다. 지표면에서의 최대 가속도가 각각 0.302g와 0.31g으로 나타났으며, 해석방법의 차를 고려하면 큰 오차는 아닌 것으로 판단된다.

지반-구조물 상호작용의 영향을 조사하기 위하여 그림 3의 구조물이 있는 경우에 대한 해석을 수행하였다. 먼저 지표면에서의 응답을 비교하였다. 그림 7의 (a)는 그 시간이력을 비교한 것으로 짧은 시간간격으로 그 차이가 잘 보이지 않으나 표 4에서 그 차이를 볼 수 있다. 그림 7(b)의 응답스펙트럼에서는 그 차이가 좀더 명확히 보인다. 케이스 *pm* 과 *pp* 는 각각 3.39Hz 와 9.48Hz에서 상대적으로 큰 값을 가지고, 케이스 *mm* 과 *mp* 는 케이스 *nn* 과 비교하여 큰 차이를 보이지 않는다. 전체적인 응답 스펙트럼은 그림 6에서의 구조물이 없는 경우와 큰 차이를 보이며, 그 차이는 지반-구조물의 상호작용의 결과로 보인다.

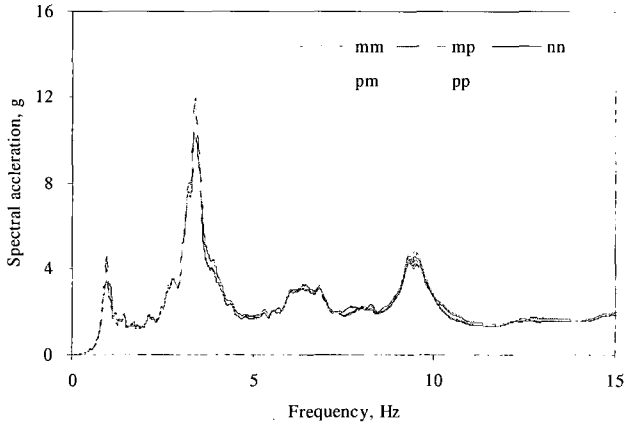
표 4 지표면의 최대 가속도

Case	*mm*	*mp*	*nn*	*pm*	*pp*
Max. acc.(g)	0.376	0.370	0.371	0.404	0.403

이번에는 구조물 상단에서의 응답을 비교하였으며 그림 8과 표 5, 6에 그 결과를 나타내었다. 이러한 구조물의 응답은 구조물과 접한 지표면에서의 응답과 유사하게 나타나고 있다. 시간이력에서 최대 가속도는 케이스 *pp* 와 케이스 *pm*가 상대적으로 큰 값을 갖는다. 주파수 별 응답에서는 표 6에서 보는 바와 같이 3.39Hz에서 응답이 제일 작은 케이스 *mm*은 케이스 *nn* 보다 1.85% 작지만, 응답이 제일 큰 케이스 *pp*는 *nn* 보다 10%가 크게 나타나고 있다. 이러한 결과를 고려하면 지반과 구조물의 상호작용으로 인하여 구조물의 진동수와 응답이 증폭되는 지반의 주파수가 근접하는 구간에서는 각 케이스에서의 응답 차이는 더 크게 나타날 것으로 판단된다.



(a) 구조물 상단의 가속도 시간이력



(b) 구조물 상단의 가속도 응답 스펙트럼

그림 8 구조물 상단에서의 응답 비교

표 5 구조물 상단의 최대 가속도

Case	*mm*	*mp*	*nn*	*pm*	*pp*
Max. acc.(g)	1.02	1.00	1.02	1.11	1.09

표 6 3.39 Hz에서의 가속도 (응답 스펙트럼)

Case	*mm*	*mp*	*nn*	*pm*	*pp*
Max. acc.(g)	10.58	10.66	10.78	11.92	11.98

4. 결 론

연약지반 위에 놓인 구조물의 응답은 지반-구조물 상호작용의 영향으로 그 지반의 층상구조에 영향을 받는다. 그러므로 엄밀한 해석을 위해서는 지반 층상구조의 적절한 모델링이 중요하다. 그러나 지층의 변화가 심한 지반에서는 지반을 일반적인 유한요소법으로 묘사하는 것은 어려운 일이다. 원칙적으로 지층의 모양을 따라 요소가 배열되어야 하며, 각 요소의 모양도 볼록성(convexity)을 잃지 않도록 주의해야 하기 때문이다.

이러한 어려움을 극복하기 위하여 본 논문에서는 정렬된 요소를 그대로 이용하면서 복잡하게 변화하는 지층의 경계면을 적절한 함수 등으로 표현해 주는 방법으로 보다 편리하고 정확한 2차원 유한요소 해석을 수행하였다. 정렬된 요소이기 때문에 볼록성을 잃을 염려가 없으며, 경계면에 대한 표현만을 바꾸어줌으로서 다양한 지층에 대한 지반-구조물 상호작용을 보다 쉽고 정확하게 해석할 수 있다.

해석 결과를 보면 예상한 바와 같이 지반 및 구조물의 응답이 지층의 형상에 따라 변함을 알 수 있다. 즉, 지반 자체의 시간이력 및 응답 스펙트럼을 변화하였으며, 구조물의 시간이력 및 응답 스펙트럼 역시 변화하였다. 본 논문이 다룬 예에서는 지반의 가속도는 최대 8%, 구조물의 가속도는 최대 11.6% 의 차이를 보였으나, 다른 조건에서는 더 큰 차이를 보일 수 있다고 보는 것이 타당할 것이다. 특히 구조물의 진동수와 응답이 증폭되는 지반의 주파수가 근접하는 구간에서는 그 영향은 더 클 것이다. 이러한 결과들을 종합하여 보면 본 논문의 해석기법은 지층의 형상 변화가 심한 지형에서의 엄밀한 응답해석을 보다 쉽게 할 수 있으며, 지반-구조물 상호작용의 영향을 파악하는데 매우 유용할 것이다.

참 고 문 헌

1. Luco, J.E., *Linear soil-structure interaction*, Lawrence Livermore National Lab, UCRL-15272, 1980.
2. Lysmer, J., Tabataie-Raissi, M., Tajirian, F., Vahdani, S. and F. Ostadan, "SASSI - A system for analysis of soil-structure interaction," *Report No. UCB/GT/81-02*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, U.S.A., 1981.
3. Wang, S., "Coupled boundary and finite elements for dynamic structure-foundation-soil interaction," *Computational Structures*, Vol.44, 1992, pp.807-812.
4. Wolf, J.P., *Dynamic soil-structure-interaction*, Prentice-Hall Inc, 1985.
5. Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E., *Concepts and application of finite element method*, John Wiley & Sons Inc, 1989.
6. Zohdi, T.I., Hutter, K. and Wriggers, P., "A technique to describe the macroscopic pressure dependence of diffusive properties of solid materials containing heterogeneities," *Computational Materials Science*, Vol.15, 1999, pp.69-88.
7. Zohdi, T.I. and Wriggers, P., "Computational testing of microheterogeneous materials spurious oscillations for heterogeneous diffusion-reaction equations," *Computational Materials Science*, 21, 2001, pp.255- 260.
8. 이광명, 박장호, "Multi-scale Modeling을 이용한 콘크리트의 탄성계수 평가", 대한토목학회 논문집, Vol.24,

2004, pp.1317~1322.

9. Wolf, J.P., *Soil-structure interaction analysis in time domain*, Prentice-Hall Inc, 1988.
10. Hayashi, Y., Tamura, K., Mora, M. and Takahashi, I., "Simulation analysis of buildings damaged in the 1995 Kobe, Japan, earthquake considering soil-structure interaction," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.28, 1999, pp.371-391.
11. Zhang, Y., Yang, Z., Bielak, J., Contel, J.P. and Elgamal, A., "Treatment of seismic input and boundary conditions in nonlinear seismic analysis of a bridge ground system," *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, 2003.
12. Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., "Finite dynamic model for infinite media," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.95, 1969, pp.859-877.
13. Schnabel, P.B., Lysmer, J., and Seed, H.B., "SHAKE - A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites," *Report No. EERC72-12*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, U.S.A, 1972.