□ 硏 究 論 文 □

韓 國 國 防 經 營 分 析 學 會 誌
제 31 권, 제 1 호, 2005. 6. 30.

이산형 적흑게임에서 p<1/2인 경우의 최적전략 (Optimum Strategies When p<1/2 in Discrete Red & Black)

석 영 우*

Abstract

In discrete red and black, you can stake any amount s in your possession, but the value of s takes positive integer value. Suppose your goal is N and your current fortune is f, with $0 < f < N$. You win back your stake and as much more with probability p and lose your stake with probability, $q = 1 - p$. In this study, we consider optimum strategies for this game with the value of p less than $\frac{1}{2}$ where the house has the advantage over the player. It is shown that the optimum strategy at any f is the DBold strategy which is to play boldly in discrete red and black when $p < \frac{1}{2}$. And then, we perform the simulation study to show that this strategy, which is to bet as much as you can, is optimal in discrete case.

(**Keywords** : Optimum strategy, ruin problem, simulation)

* 세종대 응용 수학과

1. 서 론

Red & Black 이라고 하는 게임에서, 게임자는 그가 가지고 있는 자산 가운데 s 만큼의 배팅을 하게 된다. 가령, 그의 목표가 1 이고 그의 현재 자산의 크기가 f 라고 하자 (여기서, $0<f<1$). 매번 게임 할 때마다 그가 이길 확률은 p 이고, 질 확률은 $q(=1-p)$ 이다. 이 문제는 Coolidge (1909)에 의해 처음 제시되었는데 $p<\frac{1}{2}$ 일때의 최적전략은 Dubins 와 Savage (1965)에 의해서 제안되었다. 그들은 $p<\frac{1}{2}$ 일때의 최적전략으로서 Bold 전략을 제시하였고, Bold 전략이 최적전략이라는 것을 증명할 수 있는 기본적인 아이디어를 제공하였다.

이 논문에서는 이산형 Red & Black 게임을 고려해 보자. 이산형 Red & Black 게임에서는 당신의 자산이나 베팅이나 목표가 모두 정수로 표현된다. 당신의 목표가 N 이고 당신의 현재 자산의 크기를 f 라고 하자 (여기서, $0<f<N$). 그러면 당신은 게임자로서 가지고 있는 자산 가운데 s 만큼의 베팅을 하게 된다. 연속형과 이산형 Red & Black 게임 사이에는 많은 유사성을 내포하고 있다. 연속형의 경우에 $p<\frac{1}{2}$ 일 때 최적전략이 Bold 전략 즉 할 수 있는 한 최대한의 베팅을 하는 전략이 됨을 보인 것처럼 이산형의 경우도 DBold 전략이 최적전략이 됨을 쉽게 증명할 수가 있다. 연속형의 경우에 활용했던 아이디어가 이산형의 경우에도 그대로 적용될 수 있다.

2절에서는 $p<\frac{1}{2}$ 일 때 임의의 f 에서 최적전략을 고찰해 보기로 한다. 3절에서는 시뮬레이션을 통하여 DBold 전략이 최적전략이라는 것을 보이기로 하고 끝으로 결론과 추후 연구에 관련된 문제를 4절에서 제시 하고자 한다.

2. $p<\frac{1}{2}$ 인 경우의 최적전략

이 게임은 하우스가 게임자 보다 유리한 경우를 뜻한다. 게임자의 일반적인 전략은 매 게임마다 자기가 보유하고 있는 총 자산의 일부를 배팅으로 거는 것이다. 그러나 $p<\frac{1}{2}$ 일 경우 이 전략은 결국 파산에 이르게 할 것이라는 것을 쉽게 계산으로 확인 할 수 있다 (파산확률의 계산: Parzen, 1962, p233). 이에 비해 DBold 전략은 자기가 현재 배팅 가능한 최대의 자산을 거는 것이다. 목표가 N일 경우 DBold 전략의 배팅 함수, $S(f)$는 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$\begin{aligned} S(f) &= f, & f &\leq [N/2]\,, \\ &= N-f, & f &\geq [N/2]\,. \end{aligned}$$

여기서 [N/2] 는 N/2를 넘지 않는 최대 정수를 의미한다.

<정리 2.1> 이산형 Red & Black 게임에서, $p<\frac{1}{2}$ 인 경우의 최적전략은 DBold 전략 이다.

증명: 이 정리의 증명은 기본적으로 연속형의 경우와 같다. 먼저, 함수 $Q(f)$ 는 f 가 0 과 N 사이에 있을 때 DBold 전략 하에서 목표인 N 에 도달하게 될 확률로 정의하기로 하자. $Q(f)$ 는 연속함수, non-decreasing 함수로서 다음과 같은 값을 갖게 된다. 또 $Q(0)=0$ 이며 $Q(N)=1$ 이 된다.

일반적으로 $Q(f)$ 는 다음과 같이 쓰여진다.

i) $f \leqq [N/2]: Bet\, f$,

$$Q(f) = p \cdot Q(2f) + q \cdot Q(0) = p \cdot Q(2f). \quad (1)$$

ii) $f \geqq [N/2]: Bet\, N-f$,

$$\begin{aligned} Q(f) &= p \cdot Q(N) + q \cdot Q(2f-N) \\ &= p + q \cdot Q(2f-N). \end{aligned} \quad (2)$$

이제, 첫 게임에서는 s 만큼의 배팅을, 그리고 두 번째 게임부터는 DBold 전략과 같은 방법으로 배팅을 결정하는 전략을 고려해 보자. 이 전략을 사용할 경우, 목표 N 에 도달할 확률은 $p \cdot Q(f+s) + q \cdot Q(f-s)$ 로 쓰여 질 수 있다. <정리 2.1>을 증명하는 것은 곧 다음 부등식이 모든 f 와 s 의 값에 대해 성립되는 것을 보이는 것과 같다.

$$Q(f) \geqq p \cdot Q(f+s) + q \cdot Q(f-s). \quad (3)$$

Dubins 와 Savage(1965)에 의하면, 부등식 (3)은 이진유리수(binary rational number)를 갖는 f 와 s 에 대해 보이는 것으로 충분하다고 하였다. 이진유리수라 함은 K 와 n이 비음의 정수인 경우, $K \cdot 2^{-n}$ 의 형태를 취하는 숫자로서 $K \cdot 2^{-n} \leqq 1$ 을 만족시킨다. 이산형의 경우에 (3)을 증명하는 것은 연속형의 경우의 단지 부분집합에 해당 된다는 사실을 알 수 있다. 연속형의 경우에는 자산 f 와 베팅 s 가 0 과 1 사이의 값을 갖는다. 그러나 다른 한편으로 이산형의 경우에는 f 와 s 가 0 과 N 사이의 값을 취할 수가 있다. 이제 목표가 1 이 되도록 f 와 s를 N 으로 나누어 보자. 그러면 이산형의 경우에 자산공간을 D_f 라고 하면 $D_f = [0, 1/N, 2/N, 3/N, \ldots, 1]$ 이 된다. 연속형의 경우에 자산공간 C_f 가 0 과 1 사이의 실수 값을 가지게 되므로 D_f 는 C_f 의 부분집합이 된다. 그러므로 이산형의 경우의 증명도 Dubins 와 Savage (1965) 와 Ahn 과 Sok (2002) 이 보여준 연속형의 경우의 증명으로 대치될 수 있다.

3. 시뮬레이션

이 절에서는 DBold전략이 SDBold전략(첫 게임에서는 s만큼의 배팅을, 그리고 두 번째 게임부터는 DBold전략과 같은 방법으로 배팅을 결정하는 전략)을 포함한 대안전략에 대하여 최적전략(Optimum Strategy)이 됨을 보인 정리2.1에 관하여 시뮬레이션 결과자료를 경험적 자료(Empirical Data)로 활용하여 그 타당성을 입증해 보이고자 한다. 본 시뮬레이션에서는 FORTRAN 77 언어를 사용하였으며 시뮬레이션에서 사용된 난수(Random Number)생성을 위해서는 내장되어 있는 서브프로그램인 SRAND (TIME())를 Call한 후 RAND함수를 이용하여 생성하였다. 시뮬레이션 흐름의 개요를 살펴보면 목표(Goal)의 값이 0 또는 N을 가질 때 게임이 끝나는 것으로 설정하였으며 현재자산(Fortune)을 f, 승률(Win Probability)을 p, 부분비율을 r, f의 일부분 bet 을 s라 하고 시뮬레이션을 위한 환경은 다음과 같이 설정하였다.

f = 50.0,

p = 0.41, 0.43, 0.45, 0.47, 0.49,

s = f * r (r = 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30).

< 표 3.1 > 처리조합 (p=0.41, r=0.10)에서의 시뮬레이션 결과

DBold Strategy (f = 50.0, 30Runs, n=1000)						SDBold Strategy (s= f*0.10, 30Runs, n=1000)					
422	405	399	401	384	430	376	371	411	366	369	383
410	369	425	416	404	399	382	379	371	363	383	343
413	441	389	405	405	417	420	347	365	395	370	385
405	406	435	412	431	393	385	366	376	382	389	397
417	397	429	405	410	389	399	365	366	353	362	378
mean(DBold) = 408.8 var(DBold) = 16.0						mean(SDBold) = 376.6 var(SDBold) = 17.1					

한 처리조합(Treatment Combination)으로 (p=0.41, r=0.10)인 경우를 택하여 30회의 Run(Run당 1000회의 반복게임에서 목표치인 N=100에 도달한 회수의 누계)을 실시하여 다음과 같은 표 3.1의 시뮬레이션 결과를 얻었다. 첫 번째 Run에서 첫 10회 게임의 시뮬레이션 결과를 부록 A에 수록하였다.

본 시뮬레이션 연구에서는 $p < \frac{1}{2}$을 만족하는 p인자 5수준(p=.41, .43, .45, .47, .49)과 r인자 5수준(r=.10, .15, .20, .25, .30)과의 25개 처리조합을 택하였으며 각 처리조합에서 DBold전략과 SDBold전략을 비교하기 위하여 30회의 Run(한 특정 처리조합에서의 시뮬레이션 결과인 표 3.1.참조)을 실시하여 각 전략의 표본평균인 mean(DBold), mean(SDBold)와 표본분산인 var(DBold),

var(SDBold)를 구하여 25개 처리조합에서의 시뮬레이션 결과자료를 종합 정리하여 표 3.2.를 얻었다. 표 3.2의 시뮬레이션 결과자료를 한 Replication 실험이라 하자. 이와 동일한 방법으로

< 표 3.2 > 처리조합 (p=0.41, r=0.10)에서의 시뮬레이션 결과

f = 50.0 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .41	p =.43	p =.45	p =.47	p =.49	Average
DBold	408.8 (16.0)	431.0 (17.0)	452.2 (14.1)	466.8 (14.9)	* 485.0 (17.5)	448.76 (15.90)
SDBold (r=0.10)	376.6 (17.1)	402.8 (14.8)	430.0 (14.3)	458.0 (16.5)	* 487.8 (14.1)	431.04 (15.36)
DBold	411.9 (16.7)	429.9 (14.4)	449.4 (18.2)	472.9 (16.2)	489.0 (13.1)	450.62 (15.72)
SDBold (r=0.15)	375.1 (15.0)	397.2 (11.9)	428.3 (18.2)	451.7 (12.3)	482.5 (14.8)	426.96 (14.44)
DBold	411.8 (14.3)	430.0 (15.0)	453.6 (17.2)	471.6 (15.4)	489.7 (20.3)	451.34 (16.44)
SDBold (r=0.20)	364.6 (12.4)	390.9 (15.4)	422.2 (18.3)	454.2 (13.7)	486.7 (17.1)	423.72 (15.38)
DBold	411.5 (12.9)	431.6 (18.1)	446.6 (13.8)	473.7 (17.2)	492.1 (12.5)	451.10 (14.90)
SDBold (r=0.25)	364.9 (19.0)	397.6 (14.8)	422.3 (17.2)	457.0 (18.1)	489.3 (18.3)	426.22 (17.48)
DBold	410.7 (13.9)	431.6 (14.0)	450.1 (19.9)	465.2 (17.6)	486.8 (18.7)	448.88 (16.82)
SDBold (r=0.30)	352.2 (16.2)	380.9 (14.1)	419.3 (16.0)	450.8 (14.9)	482.3 (18.5)	417.10 (15.94)

4회의 Replication 실험을 추가 실시하여 각각의 시뮬레이션 결과자료를 얻었으나 추가 4회에 대한 결과자료는 부록 B(2-5회째 Replication실험 결과자료)에 수록하였다.

DBold전략과 SDBold전략을 비교 분석하기 위하여 표 3.2의 시뮬레이션 결과 통계자료를 분석한 결과는 다음과 같다.

1) 첫 번째 Replication실험 결과자료인 표 3.2를 살펴보면 DBold전략의 표본평균이 SDBold전략의 표본평균 보다 작게 나타난 경우는 25개 처리조합 가운데 단 1회의 처리조합(p=0.49 , r=0.1)에서만 나타났으며(*표) DBold와 SDBold전략을 쌍별로 p-5수준에 걸쳐 전체평균을 비교해 보면 DBold 전략이 우위에 있음을 보여주고 있다.(표 3.2.의 Average열 참조)

2) DBold전략과 SDBold전략의 모평균 차에 관한 Paired Comparison t-검정(SAS 6.12사용)을 위하여 DBold와 SDBold변수에 표 3.2의 Paired Data를 입력하고 분석변수 DIFF= DBold-SDBold를 계산 후 PROC MEANS를 써서 검정한 결과 mean(DIFF)=25.132이었으며 t-통계량은 T=7.690으로써 유의확률 즉 p{t>|T|} = 0.0001로 계산되었다. 이는 두 전략 간에 유의차가 매우 있음을 보여주고 있으며, 이 또한 DBold 전략이 SDBold 전략보다 우수한 것을 보여주는 결과라고 하겠다.

3) 표 3.2와 부록 A등 5회의 Replication 실험에서 mean(DBold)<mean(SDBold)인 경우의 출현 회수(*표)는 각각 1, 0, 0, 0, 0 회로 출현회수의 5회 평균이 0.2가 되므로 25개 처리조합에서의 출현비율은 0.008이라고 할 수 있으며 이는 100개의 게임을 할 경우 많아야 1번의 게임에서만 DBold 전략이 SDBold 전략보다 뒤떨어지며 나머지 99번은 모두 DBold 전략이 SDBold 전략보다 우수한 것을 보여주는 결과라고 하겠다.

4. 결 론

이 논문에서는 이산형의 Red & Black 게임에서 $p<\frac{1}{2}$ 일 때 즉 게임자가 불리한 경우에 시뮬레이션을 통하여 DBold 전략이 최적전략이 됨을 보였다. 이는 연속형의 경우에 Bold 전략이 최적전략이 됨을 보인 것과 유사한 결과였다. 이번 연구의 시뮬레이션에서는 게임자가 50.0의 초기자산을 가지고 시작하는 것으로 하였으나 이를 좀더 낮은 숫자로 하여 목표에 도달할 때까지의 시간을 비교해 보는 것도 흥미 있을 것이며 동등한 게임의 경우, 즉 $p=\frac{1}{2}$ 일 때 최적전략에 관한 시뮬레이션 연구 또한 바람직하다.

참 고 문 헌

[1] Ahn and Sok (2002). Optimum Strategies for Unfavorable Situation in Red & Black, The Korean Communications in Statistics, Vol. 9, No. 3. 2002, pp. 683-691.

[2] Coolidge, J. L. (1908 - 1909). The gambler's ruin, Annals of Mathematics 10, 181 -192.

[3] Dubins and Savage (1965). How to gamble if you must, Mcgraw-Hill, New York.

[4] Parzen, E. (1962). Stochastic processes, Holden-Day.

<부록 A> 첫 번째 Run(1000회 게임)에서 첫 10회 게임의 시뮬레이션 결과
(f=50.0:최초자산, r=0.10:부분비율, f*r:베팅, r.n.:난수, p=0.41:승율)

Game #	DBold Strategy				SDBold Strategy			
	f_i	f*r	r. n.	f_{i+1}	f_i	f*r	r. n.	f_{i+1}
1	50.0	50.0	0.676	0.0	50.0	5.0	0.824	45.0
					45.0	45.0	0.282	90.0
					90.0	10.0	0.219	**100.0**
2	50.0	50.0	0.222	**100.0**	50.0	5.0	0.514	45.0
					45.0	45.0	0.369	90.0
					90.0	10.0	0.868	80.0
					80.0	20.0	0.692	60.0
					60.0	40.0	0.039	**100.0**
3	50.0	50.0	0,851	0.0	50.0	5.0	0.580	45.0
					45.0	45.0	0.736	0,0
4	50.0	50.0	0.597	0.0	50.0	5.0	0.067	55.0
					55.0	45.0	0.751	10.0
					10.0	10.0	0.890	0.0
5	50.0	50.0	0.104	**100.0**	50.0	5.0	0.484	45.0
					45.0	45.0	0.064	90.0
					90.0	10.0	0.973	80.0
					80.0	20.0	0.557	60.0
					60.0	40.0	0.777	20.0
					20.0	20.0	0.855	0.0
6	50.0	50.0	0.884	0.0	50.0	5.0	0.955	45.0
					45.0	45.0	0.294	90.0
					90.0	10.0	0.248	**100.0**
7	50.0	50.0	0.989	0.0	50.0	5.0	0.556	45.0
					45.0	45.0	0.008	90.0
					90.0	10.0	0.853	80.0
					80.0	20.0	0.770	60.0
					60.0	40.0	0.515	20.0
					20.0	20.0	0.955	0.0
8	50.0	50.0	0.751	0.0	50.0	5.0	0.086	55.0
					55.0	45.0	0.142	**100.0**
9	50.0	50.0	0.354	**100.0**	50.0	5.0	0.025	55.0
					55.0	45.0	0.521	10.0
					10.0	10.0	0.833	0.0
10	50.0	50.0	0.396	**100.0**	50.0	5.0	0.325	55.0
					55.0	45.0	0.613	10.0
					10.0	10.0	0.007	20.0
					20.0	20.0	0.346	40.0
					40.0	40.0	0.525	0.0

<부록 B> 2-5회째 Replication실험 결과자료

< 3회 > f = 50.0 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .41	p =.43	p =.45	p =.47	p =.49	Average
DBold	418.0 (15.3)	431.1 (14.4)	448.3 (17.2)	468.3 (12.3)	489.3 (15.3)	451.0 (14.9)
SDBold (r=0.10)	380.1 (16.9)	399.9 (12.6)	432.0 (16.0)	462.1 (21.1)	486.6 (15.7)	432.14 (16.46)
DBold	409.6 (14.4)	426.4 (16.6)	450.8 (14.9)	470.4 (19.6)	494.2 (15.8)	450.28 (16.26)
SDBold (r=0.15)	367.7 (16.5)	401.5 (13.4)	419.8 (13.1)	459.3 (11.6)	483.0 (17.5)	426.26 (14.42)
DBold	408.2 (13.6)	431.1 (17.0)	445.8 (13.2)	473.8 (14.7)	491.4 (18.5)	450.06 (15.4)
SDBold (r=0.20)	366.3 (15.6)	393.1 (13.9)	420.1 (14.3)	458.9 (16.1)	485.0 (16.2)	424.68 (15.22)
DBold	409.2 (17.0)	430.4 (16.1)	448.9 (14.5)	468.5 (10.1)	487.5 (16.6)	448.9 (14.76)
DSBold (r=0.25)	369.8 (14.3)	397.4 (14.0)	421.9 (12.8)	450.0 (15.8)	486.4 (16.6)	425.1 (14.7)
DBold	411.1 (13.8)	430.6 (15.7)	450.5 (12.6)	469.0 (15.2)	490.1 (12.1)	450.26 (13.88)
DBold (r=0.30)	354.4 (15.8)	390.1 (15.0)	415.5 (12.2)	446.9 (16.6)	481.0 (13.5)	417.58 (14.62)

< 2회 > f = 50.0 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .41	p =.43	p =.45	p =.47	p =.49	Average
DBold	409.8 (15.0)	430.5 (17.0)	448.4 (12.2)	471.4 (16.1)	488.3 (15.5)	449.68 (15.16)
SDBold (r=0.10)	376.1 (14.4)	408.3 (16.1)	430.9 (14.9)	45539 (17.0)	485.4 (16.9)	431.32 (15.86)
DBold	418.9 (13.3)	432.8 (13.8)	448.9 (15.9)	471.1 (14.6)	489.5 (14.8)	452.24 (14.48)
SDBold (r=0.15)	372.8 (14.4)	397.9 (15.6)	428.0 (14.9)	455.3 (14.1)	488.1 (18.4)	428.42 (15.48)
DBold	407.3 (12.3)	431.9 (20.6)	452.2 (16.1)	462.6 (18.5)	493.2 (16.2)	449.44 (16.74)
SDBold (r=0.20)	368.0 (15.3)	390.9 (16.7)	423.8 (18.0)	449.8 (14.2)	486.4 (19.2)	423.78 (16.68)
DBold	403.0 (14.7)	428.5 (13.8)	448.9 (15.1)	468.4 (19.6)	487.8 (16.5)	447.32 (15.94)
SDBold (r=0.25)	639.3 (14.2)	398.8 (13.4)	420.5 (18.5)	461.2 (19.6)	487.0 (14.4)	427.36 (16.02)
DBold	408.8 (16.7)	433.5 (17.0)	448.4 (14.1)	470.6 (17.2)	487.8 (18.3)	449.82 (16.66)
SDBold (r=0.30)	356.7 (18.1)	385.5 (13.2)	416.4 (14.2)	452.1 (16.2)	487.7 (10.9)	449.68 (14.52)

< 4회 > f = 50.0 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .41	p =.43	p =.45	p =.47	p =.49	Average
DBold	409.1 (17.2)	426.1 (17.3)	452.6 (14.6)	466.8 (18.6)	487.9 (15.2)	448.5 (16.58)
SDBold (r=0.10)	377.5 (18.4)	403.4 (15.7)	433.5 (14.3)	459.8 (14.1)	486.6 (16.1)	432.16 (15.72)
DBold	410.6 (18.0)	430.5 (16.0)	449.7 (16.9)	473.9 (16.8)	485.4 (19.5)	450.02 (17.44)
SDBold (r=0.15)	370.3 (11.9)	396.7 (11.8)	427.3 (16.2)	455.0 (18.6)	481.1 (15.4)	426.08 (14.78)
DBold	405.5 (16.2)	427.0 (16.2)	453.9 (14.9)	465.9 (13.7)	484.2 (14.1)	447.3 (15.02)
SDBold (r=0.20)	357.8 (16.5)	393.1 (15.2)	423.6 (19.0)	453.4 (14.8)	479.2 (15.1)	421.42 (16.12)
DBold	409.7 (14.3)	430.1 (17.8)	452.3 (15.9)	467.9 (15.2)	485.8 (18.6)	449.16 (16.36)
SDBold (r=0.25)	364.7 (15.2)	395.1 (16.8)	430.7 (15.0)	454.7 (12.4)	484.4 (14.8)	425.92 (14.84)
DBold	413.7 (13.9)	432.7 (14.2)	449.9 (16.6)	470.7 (14.0)	496.1 (15.6)	452.62 (14.86)
SDBold (r=0.30)	354.9 (13.4)	389.5 (16.8)	421.9 (14.6)	449.4 (13.0)	485.1 (19.4)	420.16 (15.44)

< 5회 > f = 50.0 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .41	p =.43	p =.45	p =.47	p =.49	Average
DBold	413.5 (14.8)	433.9 (17.1)	449.3 (18.5)	473.7 (11.8)	484.9 (16.5)	451.06 (15.74)
SDBold (r=0.10)	380.9 (13.4)	405.0 (16.1)	430.7 (14.7)	461.3 (17.3)	482.4 (18.8)	408.54 (16.06)
DBold	410.8 (17.3)	427.6 (18.6)	441.5 (14.1)	469.5 (13.4)	486.1 (15.2)	447.1 (15.72)
SDBold (r=0.15)	366.7 (14.9)	399.3 (15.2)	427.8 (18.9)	465.1 (14.9)	485.4 (16.7)	428.86 (16.12)
DBold	407.9 (15.2)	431.8 (14.1)	447.8 (13.5)	475.8 (12.4)	489.6 (14.4)	450.58 (13.92)
SDBold (r=0.20)	365.8 (13.1)	391.7 (13.7)	423.9 (15.5)	453.8 (14.8)	483.8 (16.4)	423.8 (14.7)
DBold	410.3 (14.3)	431.1 (16.6)	448.9 (15.3)	467.9 (14.9)	495.9 (15.2)	450.82 (15.26)
SDBold (r=0.25)	371.3 (15.9)	390.7 (11.5)	425.6 (13.5)	454.4 (14.9)	486.2 (14.1)	425.64 (13.98)
DBold	413.5 (18.9)	426.3 (17.4)	451.7 (16.5)	466.8 (13.7)	488.0 (12.8)	449.26 (15.86)
SDBold (r=0.30)	355.3 (13.9)	383.3 (16.3)	421.3 (12.4)	456.0 (12.7)	481.3 (13.8)	437.44 (13.82)