韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 2. 제 44권, 제 1호, 143-152.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Febuary. 2005, Vol. 44, No. 1, 143-152.

초등학교 기하에서 큐브를 활용한 조작 활동에 관한 연구

심 상 길 (단국대학교 강사)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

대부분의 초등학교 학생들은 수학을 학습하는 데 있어 다양한 경험이나 활동을 통해 수학적 개념이나 원리를 이해하기보다 단순히 암기하거나 계산문제를 손쉽게 해결하기 위한 연습에 많은 시간을 투자하기 때문에 수학을 어려워하고 재미없는 과목으로 여기게 된다. 따라서 초등학교 학생들에게 호기심을 자극하고 다양한 경험을 통해 수학을 배울 수 있는 교수-학습 방법에 대한 연구가 필요하다.

특히, 초등학교 기하에서 교과서와 칠판을 이용한 수업만으로 학생들에게 수학적 개념이나 원리를 이해시키기 어렵고, 이러한 방법으로 도형의 여러 가지 성질을 추론하게 하는 것은 학생들이 매우 어려워하는 부분이라 할 수 있다. 특히, 어린 학생일수록 추상적이고 형식적인 내용을 지닌 초등학교 기하를 구체적 활동이나 경험 없이 바로 이해하는 데 많은 어려움을 느낀다. 따라서 조작교구나 구체물을 학교에서 적절히 활용한다면 기하의 여러 가지 개념을 구체적인 조작 활동을 통해 이해시킬 수 있고, 실생활에서 쉽게 접하고 활용할 수 있는 구체물을 제시함으로써 학생들이 쉽게 그 개념을 이해하고 활용하는 데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

현재 시행되고 있는 제 7차 교육과정은 학습자의 자율성과 창의성을 신장하기 위한 학생 중심의 교육과정으로 학생들에게 다양한 경험을 하게 하고, 자신의 생각과 느낌을 다양하게 표현하는 경험을 강조하고 있다. 그리고 초등학교 수학의 도형 영역에서 조작교구로 쌓기나무(수학 2-나, 6-가), 점판(수학 1-나, 4-가, 5-가), 칠교판(수학 3-가, 4-나, 5-가, 5-나), 패턴블록(수학 5-가), 테트리스 조각(수학 5-가) 등을 제시하고 있다.

다락수학교육연구회와 한국수학교육학회가 주관한 '제 1회 초등학교 수학 교수방법 개선을 위한 워크샵'에서 소개된 기하와 관련된 조작교구로는 공간 추론, 도형 관계, 패턴 등의 영역 지도에 훌륭히 쓰이는 패턴블록(김성만, 주미자, 한기완, 1999), 도형 학습에서의 여러 가지 기본 개념과 성질들을 발견하는 데 유용한 탱그램(이인환, 류기천, 이석희, 1999), 수학적 구조를 탐구하기에 적합하게 사용될 수 있는 컴퓨터 소프트웨어인 LOGO(이종욱, 문성길, 김혜정, 1999), Cabri II와 GSP(김용성, 김남균, 정보나, 김남운, 박성선, 심상길, 1999)가 있고, 이를 활용할 수 있는 방안을 제시하고 있다.

Sherard III(1995)는 조작적 자료와 집단 협력학습을 통해 활동적으로 학습에 참여하는 것을 강조하면서, 펜토미노(pentominoes), 패턴블록(pattern blocks), 기하판(geoboards) 등을 수학 학습에 직접 활용할 수 있는 사례를 제시하고 있고, Roper(1996)는 도형의 모양, 길이, 넓이 등에서 칠교판(tangrams)을 활용한 활동을 제시하고 있다.

위에서 살펴본 바와 같이, 잘 고안된 조작교구 뿐만 아니라 생활 속에서 쉽게 접할 수 있는 다양한 구체물을 활용할 수 있고, 현재 초등학교에서 사용하고 있다. 조작교구에 대한 연구로서 학교에서 활용할 수 있는 조작교구 소개(안병곤, 2002), 조작교구의 프로그램 소개(김성만, 주미자, 한기완, 1999; 이인환, 류기천, 이석희, 1999; 김남희, 2001; 박교식, 2002), 조작교구를 활용한 효과성(김남희, 1999; 2000; 박경자, 2002)과 사례(최창우, 손숙현, 2002; 안주형, 송상헌, 2002)에 대한 연구가 진행되었고, 이러한 조작교구를 학생들이 직접 활용할 때 개별적으로 나타나는 현상에 대한 연구가 필요하다.

따라서 본 연구에서는 이러한 조작교구 중 큐브를 활용한 조작 활동 과정에서 학생들에게 나타날 수 있는 여

* 2004년 6월 투고, 2004년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : U62
* MSC2000분류 : 97U60
* 주제어 : 큐브, 조작활동

러 가지 현상 대해 조사하고 분석하여 초등학교 기하에서 조작교구의 활용에 대한 시사점을 찾고자 한다.

II. Dienes의 수학 학습 이론

아동 자신이 활동을 통하여 학습 장면에서 구체적으로 제시되어 있는 수학적 구조를 스스로 구성하는 과정을 중시한 Dienes는 수학적으로 조직된 놀이의 여러 단계를 통해 수학적 개념을 형성한다고 보고 있다. 이는 Piaget가 논하고 있는 수학적인 여러 가지 개념의 발달에 관한 3단계를 받아들인 것이다. Piaget의 개념 형성의 3단계에 대하여 Dienes는 다음과 같이 말하고 있다(Dienes, 1960, pp. 35-36).

첫 번째 단계는 사고가 취하는 방향에 대한 어떤 실마리가 보이기 전에 개념과 무관해 보이는 많은 작업이 이루어져야 한다는 것으로 이것은 주로 무의식적인 놀이 단계(unconscious or play stage)로, 어느 날 유용한 방식으로 세상의 사건들을 분류하도록 하는 어떤 아이디어가 생기기 전에 개념의 성분들을 오랫동안 가지고 놀아야 한다. 아동은 실제로 수나 공간 개념의 성분들을 다루고 있다는 것을 알기 전에 오랫동안 브릭이나 다른 대상을 가지고 놀면서 그것을 여러 모양이나 크기에 따라 분류한다. 명백히 각 경우에 개념은 그들 성분에 대한 광범위한 놀이 없이는 형성될 수 없다. 두 번째 단계는 우리의 경험들이 하나의 의미있는 전체로 구성될 수 있도록 하는 방향을 차차 인식하면서 인도된다. 브릭을 가지고 노는 아동은 궁극적으로 두 가지 사물을 포함한 모임들이 공통의 어떤 것을 가진다는 것을 인식한다. 이것은 수학적 경험의 여명이며, 그 경험은 후에 순수한 수의 이해라는 클라이막스로 인도할 것이다. 두 번째 단계는 조만간 세 번째 단계로 넘어간다. 여기서 그림이 초점에 다소 들어맞게 되고 우리는 '이해한다'고 느낀다. 정신적 여행의 끝이라는 갑작스런 인식과 함께 사이클이 닫힌다. 새로운 개념이 우리의 경험에 더 확고한 닻을 내리고 그래서 그것이 우리 주변에서 당혹한 일을 다룰 때 작동하는 무기가 되도록 하기 위해 실습 기간이 뒤따른다. 수를 발견한 아동은 똑같은 탑을 계속 세우는 것과 같은 일을 하면서 어른들이 그 단조로움에 쉽게 피곤해할지라도 이것을 함께 하자고 할 것이다. 이것은 개념 인식에 따르는 실습 단계이며, 이것은 다시 잇달은 개념을 얻는 놀이 단계의 역할을 할 것이다.

Dienes는 이와 같은 역동적인 학습 과정에 대한 설명이 원자론적인 자극-반응 설명보다 수학 학습의 사실에 더 적합하다는 것을 쉽게 알 수 있을 것이라고 한다. 그러나 물론 이것은 단지 틀이며, 이 틀은 우리가 학습하는 것의 내용으로 채워져야 한다. 상황은 서로서로 다르다. 예를 들어 논리적 구조를 보자. 우리는 일단의 경험을 여러 가지 논리적 관계를 써서 관련짓는다. 예를 들어, 벨 소리와 수업의 시작과 같이 사건 A와 B가 늘 함께 발생하는 경우가 있다. 우리는 그것들을 연결된 사건으로 합접성(conjoining)에 의해 두 사건을 연결한다. 우리는 이전에 연결되어 있지 않던 두 개의 사건을 합접(conjunction)한 것이다. 다른 상황에서, 한 직위에 대한 추천 명단에 두 사람이 있다면 둘 중의 한 사람만이 그 직위에 임명될 수 있다. 우리는 두 개의 분리된 가능성을 이접성(disjoining)에 의해 이 사건들을 합칠 수 있다. 우리는 추천 명단이 작성되기 전에는 연결되지 않던 두 사건을 이접(disjunction)한 것이다. 또 다른 예로, 카드에 삼각형, 원, 정사각형이 하나 또는 둘 또는 세 개가 그려져 있고, 각 카드는 빨간색, 파란색, 녹색이다. 이 경우 세 개의 값을 가지는 세 개의 변수(수, 모양, 색깔)가 있다. 따라서, 빨간 삼각형은 빨간색이어야 하고 삼각형이 그려져 있어야 하므로 합접이고, 빨강 또는 삼각형은 빨간색 카드나 삼각형이 그려진 카드를 말하므로 이접이다(Dienes, 1960, pp. 36-38).

앞에서 살펴본 Piaget의 개념 형성 3단계는 Dienes가 말한 개념 형성의 3단계에 매우 다른 형태의 학습이 대응한다(Dienes, 1960, pp. 39-40).

예비적 또는 놀이 단계(예비 놀이, preliminary games)에는 다소 목표가 불분명한, 마치 목표가 없는 것처럼 보이는 활동이 대응한다. 이 활동은 그 자체로 즐기며 수행되는 그러한 종류의 활동이다. 흔히 놀이라고 하는 활동이 이러한 종류의 활동이다. 놀이가 가능하게 하기 위해서는 실험에서 자유가 꼭 필요하다. 개념 학습의 이 단계는 가능한 한 자유로워야 하며 개념의 요소를 놀이 자료로 사용할 수 있어야 한다. 두 번째 단계(구조화된 놀이, structured games)는 좀 더 방향이 정해지고 목적을 지향하지만, 추구하고 있는 것에 대한 명확한 인

식은 없는 단계이다. 이 단계에서는 어느 정도 구조화된 활동이 바람직하다. 이것이 어떻게 발전하는가는 주체의 독특한 사고 방식과 개념의 구조에 의존할 것이다. 이러한 요인들에 대해 더 많은 것이 알려질 때까지 가장 안전한 방법은 모두 그 개념으로 이끄는 변화하는 구조, 많은 경험을 갖추는 것이다. 세 번째 단계(실습 놀이, practice games)에서는 형성된 개념을 고정시키고 적용하기 위한 적절한 실행을 제공해야 한다. 이러한 단계는 주어진 개념에 따라 상대적인 것이다. 한 개념에서는 실습 놀이인 것이 이후에 나오는 새로운 개념에서는 예비 놀이가 될 수 있다.

이와 같은 단계를 거쳐 개념이 형성되면 다음에 그것이 정착되는 시기가 온다. 그것은 내성적 활동에 의한 분석 · 검토 및 외적 상황에의 적용의 형태로서 행하여진다. 이와 같이 함으로써 개념이 보다 정통하게 된다. 그런데 이와 같은 상태가 되면, 형성된 개념은 이미 보다 높은 수준의 새로운 개념형성을 위한 자료, 즉 '놀이'의 대상으로서 이용되고 있는 것이며, 보다 높은 수준에서의 보다 객관적인 개념형성의 사이클이 시작된 것이다. 이처럼 개념형성의 사이클이 연속적으로 일어난다고 하는 것이 Dienes의 생각이다. Dienes는 이와 같은 개념형성의 사이클을 '개폐연속체'(open-closed continuum)라고 부르고 있다. 앞에서 말한 개념형성의 세 단계를 거쳐서 일단 형성된 수학적 개념은 '폐'(closed)의 상태로 되지만, 내성적 분석과 적용의 과정에서 이미 '개'(open)의 상태로 변해 보다 객관적이고 보다 높은 수준의 재구성이 이루어진다는 것이다(김응태, 박한식, 우정호, 1992, p. 171).

Dienes의 경우, 수학적 개념형성의 연속, 즉 '개폐연속체'의 '폐'의 상태로부터 '개'의 상태로 옮겨져 새로운 구성적 사고가 전개될 때 '모험적 사고(adventurous thinking)'가 개재한다고 생각하고 있다(김응태, 박한식, 우정호, 1992, pp. 172). 모험적 사고에 대해 Bartlett는 그가 '폐쇄체계 사고'라고 부른 것에서부터 그것과 완전히 다른, 그가 '모험적 사고'라고 부른, 예술가적 사고에 이르는 다양한 유형의 사고 목록을 작성하고 조사했다(Dienes, 1960, p. 38). Bartlett가 사고는 때로 그것을 제한하고 있는 꽉 짜여진 논리적인 체계(폐쇄체계 사고 또는 폐쇄된 사고의 유형)를 깨고 나가려는 경향이 있다고 한 것은 이 점을 시사하는 것으로 볼 수 있다. 형식적인 논리적 사고는 제한된 것이며 개념 형성의 유형은 그와 같이 주의 깊게 설정된 제한된 범위에 적용될 수 있는 것이다. 그러한 연구가 유용하지 않다는 것은 아니다. 다만 그것들이 더 구성적인 수학적 사고 유형을 설명하기에 불충분하다는 것이다. 이러한 폐쇄된 유형의 사고(closed type of thinking)가 진행되는 제한된 범위가 매우 확장된다면 어떻게 될까? 논리적 관점에서 한 상황을 판단하는 데 필요한 분석의 양이 그 앞에 놓인 모든 가능성을 고려할 주체의 능력을 넘어버리면 무슨 일이 일어날까? 그는 포기하거나 다른 어떤 것을 해야 한다. 포기하지 않는다면, 아마도 Bartlett가 말한 모험적 사고와 같은 것이 발생할 것이다. 이러한 종류의 사고의 본질은 Bartlett의 표현에 따르면 주체가 자신의 활동이 향해 가는 기준을 자신 앞에 두는 것이다. 예술가는 그 자신의 기준에 따르며 그렇지 못하면 그는 예술가로 살 수 없다. 아마 예술가는 자신의 문제를 논리적으로 분석할 수 없을 것이다. 가능성의 수가 너무 많다. 그가 꽤 다른 사고 과정을 사용한다는 것은 별로 놀랍지 않다. 예술가가 그 자신의 기준에 맞게 그림을 그리는 것이나 수학자가 새로운 술어를 구성하는 것이나 별로 다르지 않은 것이다(Dienes, 1960, p. 41).

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 서울시에 소재하고 있는 C초등학교 3학년 학생으로 도형의 변환에 대한 기초적인 경험인 옮기기, 뒤집기, 회전하기와 쌓기나무를 학습한 학생들이다. 이들은 2002년 12월 3학년 4반 45명의 학생들에게 신청서 및 설문지를 돌려 본 연구에 참가를 희망한 학생 중 담임교사와 학부모의 협조를 통해 5명(남학생 2명, B1, B2, 여학생 3명, G1, G2, G3)으로 구성되었다. 참가자들의 개인적인 특성은 학생용, 학부모용 설문지와 면담을 통하여 분석하였다.

연구 대상으로 선정된 학생들의 부모들은 교육에 대한 열의가 높고, 가정 환경은 중간 이상이며, 학생들은 수학에 대한 가치를 높게 생각하고 B1을 제외한 나머지 학생들은 수학을 좋아한다. 여학생들은 성격이 차분하고

신중하며 수학 공부를 많이 하는 편이나, 남학생들은 성격이 활발하고 수학 공부를 많이 하는 편이 아니다. 또, 학생들은 블록과 같은 조작교구의 사용 경험이 풍부하고, G2를 제외한 나머지 학생들은 현재까지 사용하고 있다. 학생들의 학교 성적은 상위권 2명, 중상위권 1명, 중위권 2명이며 본 연구에 성실하게 참여할 수 있는 학생으로 구성되었다.

2. 연구 방법

연구 문제를 해결하기 위하여 연구 대상에게 제공된 프로그램을 학습하는 과정에서 나타난 현상을 분석하는 질적 연구가 수행되었다. 본 연구는 큐브를 활용하는 자연스러운 수업 상황에서 연구 대상들이 문제를 해결하는 과정 중 어떤 현상과 반응이 나타내는지를 살펴보기 위해 모든 활동을 녹화하여 그 내용을 일일이 살펴보고, 각각의 내용에서 유의미한 과정을 선정하고, 선정된 과정들은 과정이 의미하는 바에 따라 조직화하고 주제별로 분류하여 분석하였다.

3. 연구 절차

(1) 조작교구의 선정

본 연구에서는 초등학교 교사들이 조작교구를 가장 많이 사용하는 도형 영역을 선택하였고, 도형 영역 중에서 제 7차 교육과정에서 처음 도입하고 있는 쌓기나무를 활용할 수 있는 큐브로 선정하였다. 이러한 쌓기나무는 낱개로 활용할 수 있고, 2개 이상의 쌓기나무를 붙여 큐브로 사용하면 쌓기나무 단원뿐만 아니라 여러 단원에 폭넓게 활용할 수 있기 때문이다.

(2) 프로그램 개발

본 연구에서 큐브를 활용한 프로그램은 다음과 같은 절차를 통하여 개발되었다.

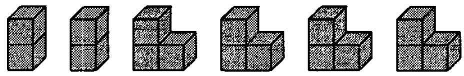
첫째, 현재 수학 교과서에서 쌓기나무가 활용되고 있거나 활용될 수 있는 단원을 조사하였다. 이 조사의 목적은 본 연구에 사용될 프로그램의 내용을 구성하기 위한 방향을 설정하기 위함이다.

둘째, 여러 문헌(Delft & Botermans, 1995; Sherard III, 1995; Martin, 1996; Zhang, 1996)을 통하여 쌓기나무의 활용 방법을 조사하였다. 이 조사의 목적은 본 연구에 사용될 프로그램의 내용을 구체적으로 구성하는 데 기초가 되기 위함이다.

(3) 선정된 조작교구 및 프로그램

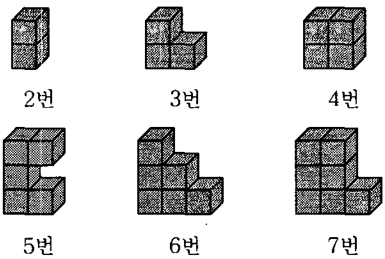
본 연구에서 선정한 조작교구 및 프로그램의 내용[2]을 살펴보면 다음과 같다.

① Domino와 Trominoes를 이용한 큐브 - 한 변의 길이가 2cm인 쌓기나무를 2개 또는 3개를 붙여서 <그림 1>과 같이 만든 6조각을 사용하였다.



<그림 1> 꼬마큐브[3]의 구성

② Diabolical Cube(다이어볼릭큐브)[4] - 한 변의 길이가 1.5cm인 쌓기나무 2개, 3개, 4개, 5개, 6개, 7개를 붙여서 <그림 2>와 같이 만든 6조각을 사용하였고, 편의상 조각들의 이름을 쌓기나무의 개수를 이용하여 부르기로 약속하였다.



<그림 2> 다이어볼릭큐브의 구성

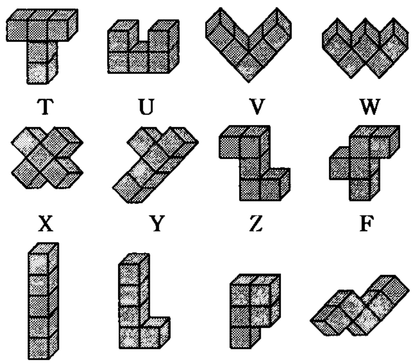
③ Solid Pentominoes(입체펜토미노) - 한 변의 길이가 1.5cm인 쌓기나무 5개를 면끼리 붙여서 <그림 3>과 같이 만든 12조각을 사용하였고, 편의상 조각들의 이름을 알파벳 대문자를 이용하여 부르기로 약속하였다[5].

---

2) 실제로 이 자료는 S대학교 창의력 수학교실, H학회 사고력 수학캠프, K대학교 과학 영재 캠프, D광역시 주최 수학 영재 캠프 등에서 활용되었다.

3) Domino와 Trominoes를 이용하여 <그림 1>과 같이 구성된 큐브를 편의상 꼬마큐브라고 부르겠다.

4) Hoffmann 교수가 1893년에 런던에서 발행된 'Puzzles Old and New'에서 소개한 퍼즐로, 3×3×3 정육면체 형태로 만드는 방법이 13가지가 있다(Zhang, 1996, p. 44).



<그림 3> 입체펜토미노의 구성

위에서 제시한 큐브를 사용한 프로그램은 다음과 같다.
· 조각의 일부 또는 전부를 사용하여 여러 가지 평면도형 만들기
· 조각의 일부 또는 전부를 사용하여 여러 가지 입체도형 만들기

4. 수업 절차

본 연구를 위한 수업은 2002년 2학기 겨울방학(2003년 1월~2월) 동안에 실시되었으며, 2002년 12월에 선정된 5명의 학생들에게 5주 동안 진행되었다. 수업은 학생들이 자유롭게 활동할 수 있는 분위기를 제공하였고, 학생들의 활동 중 다른 변인들을 제거하기 위하여 개별 수업을 실시하였다. 수업에 사용된 큐브와 활동지는 수업 시간에만 사용하였고, 수업이 끝난 후에 가정에서 연습할 수 없도록 회수하였다. 교사는 제시된 문제에 대해 간단히 설명하였고, 학생들이 문제를 직접 해결할 수 있도록 도움을 주는 안내자, 조력자의 역할을 담당하였다.

5. 자료의 수집 및 분석

본 연구는 큐브를 활용하는 수업의 여러 가지 문제 상황에서 나타나는 학생들의 개별적인 반응이나 현상을 알아보기 위하여 학생들과 대화하고, 수업에 참여하여 학생들의 활동을 관찰하고 관찰한 내용을 기록하였으며, 실험 기간 중 모든 활동을 비디오로 촬영하였다. 주어진 문제에 대한 모든 활동은 일대일 관찰과 기록, 촬영된 비디오 내용의 기록, 활동 중에 학생들이 직접 작성한 활동지의 내용을 분석하여, 학생들의 행동과 사고 과정을 탐구하였다.

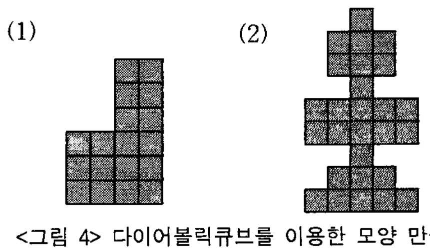
Ⅳ. 연구 결과 및 분석

큐브를 활용하는 활동은 주어진 조각들의 일부를 사용하는 문제와 전부를 사용하는 문제로 나눌 수 있다. 예비 놀이 단계(도입 단계)에서는 주어진 큐브의 특징을 인식시키기 위해 일부 조각을 사용하였고, 구조화된 놀이와 실습 놀이 단계로 갈수록 조각의 수를 늘려서 전부를 사용하였다.

1. 조각 선택과 위치에 대한 합접성과 이접성

학생들은 사용하는 조각의 수가 많을수록 그 문제를 해결하는 데 시간이 많이 걸리고 어려워하는 일반적인 현상이 나타난다. 학생들이 조작 활동 중에 가장 많이 사용하는 문제해결 전략은 주어진 그림을 관찰하고 자신이 선택한 조각을 중심으로 여러 번의 시행착오를 거쳐 문제를 해결하는 방법이다. 따라서 사용하는 조각의 수가 많을수록 더 많은 시행착오를 거치면서 문제를 해결해야 하므로 시간이 더 오래 걸린다. 그러나 사용한 조각의 수가 많다고 항상 시간이 많이 걸리는 것은 아니다 (【에피소드 1】 참조).

【에피소드 1】
다음은 다이어볼릭큐브를 활용하는 활동에서 학생들에게 나타난 결과이다.



<그림 4> 다이어볼릭큐브를 이용한 모양 만들기

5) Golomb(1994, p. 7)이 'Polyominoes'에서 제시한 방법이다.

<그림 4>의 (1)은 다이어볼릭큐브의 6조각 중 일부 조각을 선택하여 사용하는 문제이고, (2)는 6조각을 모두 사용하는 문제이다. 학생은 그림 4의 (1)보다 (2)를 더 쉽게 해결하였다. 이는 주어진 문제를 해결하는 데 있어 사용하는 조각의 수보다 문제해결을 위한 변수(變數)가 학생들이 문제를 해결하는 데 더 영향을 주는 것으로 나타났다. 조작교구를 활용하는 활동에서 주어진 문제를 해결하기 위해 조각을 선택하고 선택된 조각의 위치를 결정하는데 다양한 경우의 수가 존재한다. 이러한 다양한 경우의 수를 문제해결을 위한 변수라고 한다. 따라서 문제해결을 위한 변수가 늘어남에 따라 문제해결에 대한 전략도 복잡해지고 시행착오도 많이 거치기 때문에 학생들은 문제해결에 어려움을 느낀다.

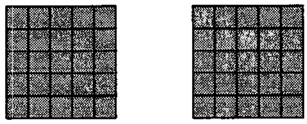
이는 조작교구를 활용하는 문제해결에서 조각 선택과 위치에 대한 합접성(conjoining)과 이접성(disjoining)이 나타나므로 일어나는 것이다. 그림 4의 (1)은 어떤 조각을 사용하더라도 그 조각 옆에 어떤 조각이 와야한다는 것이 분명하게 나타나지 않으므로 이접성이 강한 문제이고, 그림 4의 (2)는 5번 조각 옆에 2번 조각을 사용해야 하고, 7번 조각 옆에 4번 조각을 사용해야하고, 6번 조각 옆에 3번 조각을 사용해야하는 합접성이 강하게 나타나는 문제이다. 따라서 사용하는 조각의 수가 많더라도 합접성이 강하게 나타나는 문제는 학생들이 손쉽게 해결하고, 이접성이 강하게 나타나는 문제는 학생들이 어려워하고 시간이 많이 걸린다.

2. 합접성과 이접성이 활동에 미치는 영향

일반적으로 합접성은 이전 활동에 많은 영향을 받는다. 이는 앞에서 사용한 방법을 뒤에 나오는 활동에서도 유사하게 적용하기 때문이다. 따라서 학생들은 앞에서 성공한 방법을 이후에 나오는 비슷한 유형의 문제에 적용하여 해결하려는 성향이 매우 강하게 나타난다(【에피소드 2】 참조).

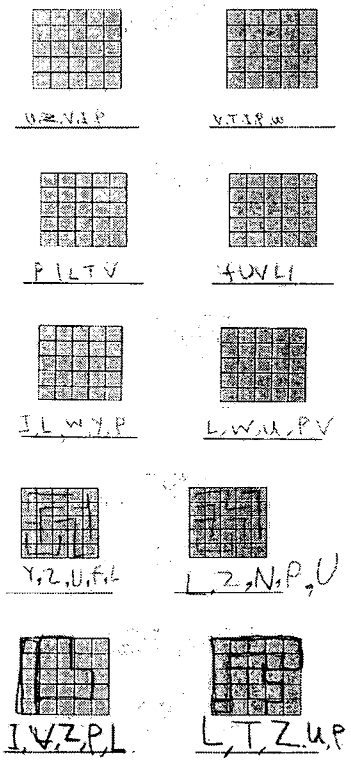
【에피소드 2】

<그림 5>는 입체펜토미노를 활용하는 활동으로 5×5 정사각형을 서로 다른 두 가지 방법으로 만드는 문제이다.



<그림 5> 입체펜토미노를 이용한 모양 만들기

이 문제에서 학생들은 매우 다양한 답을 제시하였으나 5명의 학생 모두는 첫 번째 모양을 만드는 데 사용한 조각과 두 번째 모양을 만드는 데 사용하는 조각이 비슷하게 나타났다.



<그림 6> 5주차 활동 4에서 학생들이 제시한 답

<그림 6>에서 학생들이 제시한 답을 정리하면 <표 1>과 같다.

<표 1>에서 학생들이 사용한 조각을 살펴보면, 모든 학생이 3개씩 같은 조각을 사용하였다. 이는 앞의 문제에서 사용한 조각을 다음 문제에서도 사용하려는 조각 선택의 합접성이 일어나는 것으로 분석된다.

<표 1> 학생들이 제시한 답

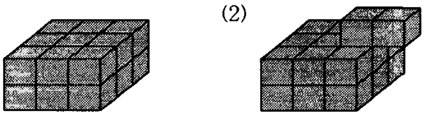
학생	첫 번째 방법에 사용한 조각	두 번째 방법에 사용한 조각	사용한 조각 중 같은 조각
G1	U, Z, **V**, **I**, **P**	**V**, T, **I**, **P**, W	V, I, P
G2	P, **I**, **L**, T, **V**	F, U, **V**, **L**, **I**	I, L, V
G3	I, **L**, **W**, Y, **P**	**L**, **W**, U, **P**, V	L, W, P
B1	Y, **Z**, **U**, F, **L**	**L**, **Z**, N, P, **U**	Z, U, L
B2	I, V, **Z**, **P**, **L**	**L**, T, **Z**, U, **P**	Z, P, L

이전 활동이 항상 합접성에 관련된 것은 아니다. 만약 이전 활동이 이접성과 관련되면 문제해결에 오히려 방해가 될 수도 있다(【에피소드 3】 참조).

【에피소드 3】

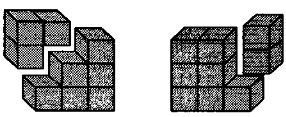
다음은 다이어볼릭큐브를 활용한 활동에서 학생들에게 나타난 결과이다.

(1) (2)



<그림 7> 다이어볼릭큐브를 이용한 모양 만들기

<그림 7>의 (1)은 합접성이 강하게 나타나는 문제이므로 모든 학생이 매우 쉽게 해결하였다. 이는 <그림 7>의 문제를 해결하기 전에 3×3 정사각형 만들기에서 이미 모든 학생들이 3번과 6번, 2번과 7번을 사용하여 3×3 정사각형을 만들어 보았기 때문에 이 두 정사각형을 만들어 쌓아 쉽게 해결하였다.



<그림 8> 3×3 정사각형 만들기

그러나 <그림 7>의 (2)는 학생들이 매우 어려워했다. <그림 7>에서 (1)의 모양을 만든 다음 바로 (2)의 모양을 만들다보니, 두 모양이 서로 유사하게 생각하여 학생들은 (1)에서 사용한 조각과 방법을 이용하려고 하기 때문에 (2)를 만드는 데 매우 어려워했다.

<그림 7>에서 (2)의 문제를 해결하기 위해서는 (1)의 문제에서 도움을 얻을 수 있다. <그림 7>의 (1)에서 2번, 3번, 6번, 7번 조각을 사용하였는데, (2)에서는 (1)에서 사용한 것보다 쌓기나무가 2개 더 많이 필요하다. 따라서 2번을 4번으로 또는 3번을 5번으로 바꾸어 사용하면 되는데, 이 문제에서는 2번을 4번으로 바꾸어서 3번, 4번, 6번, 7번을 사용하면 된다.

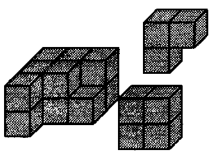
그러나 학생들은 이러한 분석적 사고를 하기보다 앞의 활동에서 선택한 몇 조각을 사용하여 많은 시행착오를 거치면서 문제를 해결하려고 하였다. 특히, 학생들은 조작 활동 중에서 4번 조각을 세우지 못해 실패하는 경우가 많았다. 이는 평면도형 만들기와 <그림 7>의 (1)에서 조각을 세우지 않아도 문제를 해결할 수 있으므로 나타나는 현상이다. 따라서 이전 활동이 문제해결에 오히려 부정적인 영향을 주는 결과로 나타났다.

<그림 7>의 (2)를 해결하기 위해서 모험적 사고가 필요하다. 그러나 학생들은 자꾸 앞에서 했던 경험을 통해 문제를 해결하려고 하다보니 유사한 시행착오를 반복해서 많은 시간을 소비하고 문제해결에 실패했다.

그러나 B1은 앞의 활동에 집착하기보다는 조각들을 매우 활발하게 잘 사용하여 쉽게 해결하였다(【에피소드 4】 참조).

【에피소드 4】

<그림 7>의 (2)에서 다른 학생들은 4번 조각을 세워서 사용하지 못하였지만, B1은 주어진 그림과 조각을 관찰한 후 7번 위에 6번을 놓고, 4번을 세우고 3번을 놓아 바로 문제해결에 성공하였다.



<그림 9> B1이 제시한 답

이는 문제해결을 위한 다양한 시도와 모험적 사고를 통해 쉽게 해결한 사례이다. 상황을 날카롭게 판단하는 분석적 방법은 훨씬 성숙한 사고 방법이고 12살 이전의 아동에게는 좀처럼 일어나지 않는다고 Dienes(1960)가

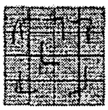
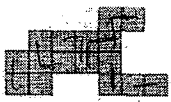
언급한 것과 같이 본 연구 대상의 학생들은 10살(1993년생)이므로 분석적 방법을 사용하기가 어려운 것으로 나타났다. 따라서 이접성이 강한 문제에서는 모험적 사고가 필요하다.

3. 축소된 그림이 제시된 문제에서의 문제해결

축소된 그림이 제시된 문제에서 학생들은 그림 위에 조각을 올려놓고 활동할 수 없으므로 문제를 해결하기 위해 다양한 시도를 한다. 특히, 주어진 그림을 관찰하고 선택한 조각을 중심으로 여러 번의 시행착오를 통해 문제를 해결하려고 하지만 실패하는 경우 그림 위에 조각의 모양을 표시하는 새로운 시도를 통해 문제를 해결하려고 한다(【에피소드 5】 참조).

【에피소드 5】

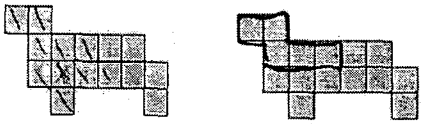
다음은 꼬마큐브를 활용하는 활동에서 학생들에게 나타난 결과이다.

(1)  (2) 

<그림 10> G2가 사용한 문제해결 방법

학생들은 몇 번의 조작 활동을 통하여 문제해결에 성공하였으나 G2는 <그림 10>의 (1)과 같이 주어진 그림 위에 도미노(쌓기나무 2개 연결)와 트로미노(쌓기나무 3개를 ㄱ자 모양으로 연결)의 모양을 미리 표시한 후에 문제해결에 성공하였다. 이는 문제해결을 위하여 새로운 방법을 시도한 것이다. <그림 10>의 (2)의 문제에서도 다른 학생들은 몇 번의 조작 활동을 통해 문제해결에 성공하였으나 G2는 그림에 조각의 모양을 표시하는 방법을 사용하였다. 이는 앞의 활동에서 성공한 방법을 이후에 나오는 활동에서도 사용하기 때문이다.

G2는 이후에 나오는 문제에서도 이 방법을 자주 사용하였고, G2 뿐만 아니라 B2도 이와 같은 방법을 사용하였다. 이는 문제를 해결하기 위해 주어진 그림 위에 조각의 모양을 표시함으로써 문제해결을 위한 변수를 줄여 모양 만들기에 성공한 것이다.



<그림 11> 입체펜토미노에서 G2와 B2가 사용한 방법

V. 요약 및 결론

1. 요약

본 연구의 목적은 조작교구 중 큐브를 활용한 조작 활동 과정에서 학생들에게 나타나는 반응이나 현상을 알아보기 위한 것이다. 이를 위하여 학생들이 제공된 프로그램을 학습하는 과정에서 나타난 현상을 분석하는 질적 연구가 수행되었다. 연구 대상은 서울시에 소재하고 있는 C초등학교 3학년 학생 중 본인의 자발적인 참여 의지와 부모가 동의한 5명으로 선정하였다. 본 연구에 사용된 프로그램은 교과서 분석과 문헌 분석을 통해 개발하였다. 그리고 학생들의 모든 활동을 녹화하여 그 내용을 일일이 살펴보고, 각각의 내용에서 유의미한 과정을 선정하고, 선정된 과정들은 과정이 의미하는 바에 따라 조직화하고 주제별로 분류하여 분석하였다.

본 연구를 통하여 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 문제를 해결하는 데 있어 사용하는 조각의 수보다 문제해결을 위한 변수가 학생들이 문제를 해결하는데 더 영향을 주는 것으로 나타났다.

둘째, 일반적으로 조각 선택과 위치에 대한 합접성에 관련된 문제는 다음 활동에 긍정적인 영향을 주나, 이접성에 관련된 문제는 오히려 방해가 되는 경우가 있었다.

셋째, 이접성에 관련된 문제는 분석적 방법이나 모험적 사고를 통해 해결할 수 있었으나 아직 분석 능력이 없는 학생들에게는 모험적 사고가 필요하였다.

넷째, 주어진 문제가 잘 해결되지 않으면 학생들은 문제를 해결하기 위해 다양한 방법을 생각하였고, 그 중에서 가장 유용한 방법을 사용하여 문제를 해결하였다. 예를 들어, 축소된 그림이 주어지는 경우, 주어진 그림에

조각의 모양을 표시하는 방법을 통해 문제를 해결하였고, 이후에 나오는 활동에서도 이 방법을 사용하였다.

2. 결론

본 연구의 주된 관심은 학생들이 조작교구를 활용하는 조작 활동 과정에서 나타나는 반응이나 현상을 알아보고, 이를 통하여 새로운 조작교구와 프로그램을 개발하고, 교실에서 활용할 때 어떤 점을 고려해야 하는지를 알아보기 위한 것이었다.

연구 결과를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 조작교구를 사용하는 문제에서 사용하는 조각의 수보다 조각의 선택과 위치에 따른 변수가 문제해결에 영향을 주므로 조작교구를 활용한 프로그램을 개발하거나 활용할 때, 단순히 조각의 수보다 이러한 변수를 고려하여 수준과 단계를 조정해야 한다.

둘째, 조작교구를 활용한 수업을 설계할 때, 수업의 목적에 따라 합접성이 나타나는 문제와 이접성이 나타나는 문제를 적절하게 사용해야 한다. 예를 들어, 어떤 개념을 이해하고 그 개념을 익히는 목적으로 큐브를 사용할 경우에는 합접성이 강한 문제를 제시하고, 다양한 문제해결 전략을 세우고 모험적 사고를 필요로 하는 목적으로 조작교구를 사용할 경우에는 이접성이 강한 문제를 제시해야 한다.

셋째, 학생들은 조작교구를 활용한 활동에서 문제해결을 위해 조작활동과 함께 다양한 방법을 생각하고, 자신이 고안한 전략을 다음 활동에서도 활용한다. 따라서 교사는 조작교구를 활용한 수업을 설계할 때, 문제를 해결하는 다양한 전략과 학생들이 고안한 방법에 대해서도 고려하여 수업 설계에 반영해야 한다.

이상의 연구 결과를 토대로 하여 수학 학습에서 조작교구를 효과적으로 활용하기 위해 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 기하라는 특정한 영역과 큐브라는 특정한 조작교구를 대상으로 하였기 때문에, 다른 영역과 다른 조작교구에 대해서 어떤 결과가 나오는지에 대해 지속적인 연구가 필요하다.

둘째, 본 연구에서 제시한 개별적인 조작 활동에 대한 상황은 조작교구를 활용하는 활동 중 나타날 수 있는 일부분의 상황에 지나지 않는다. 따라서 조별 활동이나 집단 활동 중 이루어지는 조작 활동 과정에서 나타날 수 있는 현상에 대한 연구가 필요하다.

셋째, 조작교구를 활용하는 데 있어 학생들의 여러 가지 경험이나 능력의 차이가 개별적인 조작 활동에 영향을 줄 수 있다. 따라서 조작교구의 사용 경험, 수학 성취 능력, 도형 능력 등의 차이에 따라 조작 활동 능력에 어떠한 차이가 있는지에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육부 (2000). 초등학교 수학 1-나, 2-나. 서울: 대한 교과서 주식 회사.

______ (2001). 초등학교 수학 3-가, 4-가, 4-나. 서울: 대한 교과서 주식 회사.

______ (2002). 초등학교 수학 5-가, 5-나, 6-가. 서울: 대한 교과서 주식 회사.

김남희 (1999). 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용. 대한수학교육학회지 학교수학, **1권 2호**, pp. 699-721.

______ (2000). 교구이용에 대한 교수학적 논의: 대수모델의 활용사례를 통한 교구의 효과 분석을 중심으로. 대한수학교육학회지 학교수학, **2권 1호**, pp.29-51.

______ (2001). 기하판을 활용한 학교수학의 지도. 대한수학교육학회지 학교수학, **3권 1호**, pp.155-184.

김성만 · 주미자 · 한기완 (1999). 패턴블럭을 사용한 탐구활동. 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육 학술지>, **3집**, pp.07-138.

김용성 · 김남균 · 정보나 · 김남운 · 박성선 · 심상길 (1999). 캐브리 II와 GSP를 이용한 수학교육. 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육 학술지>, **3집**, pp.229-276.

김응태 · 박한식 · 우정호 (1992). 增補 數學敎育學槪論. 서울대학교 출판부.

박경자 (2002). 조작적 교구를 활용한 게임 학습이 수학적 능력에 미치는 효과. 단국대학교 대학원 박사학위 논문.

박교식 (2002). 유사 탱그램과 그 수학교육적 시사점. 대한수학교육학회지 학교수학, **4권 1호**, pp.97-109.

안병곤 (2002). 초등수학에서 학습교구의 활용 방안. 한국수학교육학회 시리즈 E 수학교육 논문집, **13집**, pp.55-72.

안주형 · 송상헌 (2002). 탱그램과 모자이크퍼즐의 활용에 관한 연구. 대한수학교육학회지 학교수학, **4권 2호**, pp.283-296.

이인환 · 류기천 · 이석희 (1999). 수학 교육과 탱그램 활동. 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육 학술지>, **3집**, pp.139-168.

이종욱 · 문성길 · 김혜정 (1999). Logo의 수학적 활용. 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육 학술지>, **3집**, pp.197-227.

최창우 · 손숙현 (2002). 수학 교구를 활용한 클럽 활동이 학생들의 수학적 성향 및 도형 학습능력에 미치는 영향. 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집>, **14집**, pp.163-176.

Delft, P. V., & Botermans, J. (1995). *Creative puzzles of the world.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics.* New York: Hutchinson Educational.

Golomb, Solomon. W. (1994). *Polyominoes.* Princeton, NJ: Princeton Academic Press.

Martin, G. E. (1996). *Polyominoes: A guide to puzzles and problems in tiling.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Roper, A. (1996). *Visual thinking with tangrams.* Mountain View, CA: Creative Publications.

Sherard III, W. H. (1995). *Cooperative informal geometry.* Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Zhang, W. (1996). *Exploring math through puzzles: Blackline masters for making over 50 puzzles.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

A Study of Manipulative Activities Using Cube in Elementary School Geometry

Shim, Sang Kil

Department of Mathematics Education, Dankook University, Seoul 140-714, Korea

The purpose of this study is to investigate responses or phenomena shown by the students in the process of manipulative activities in order to use manipulatives effectively in the elementary school geometry classes.

The qualitative study used for this research analyzed phenomena in the process of learning programs offered to students. The five participants of this research were selected from the third graders at C Elementary School in Seoul city. The researcher recorded all the activities of students, watching them thoroughly and extracting significant statements from each description. These statements were formulated by their meanings, and then those meanings were analyzed into classified themes.

The results through this research are as follows: First, previous activities affected later activities positively in the conjoining case, but negatively in the disjoining case and hence it required adventurous thinking. Second, students tried various attempts for solving given problems.

* ZDM classification : U62

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U60

* key word : cube, manipulative activities