韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2005. 2. 제 44권, 제 1호, 87-101.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Febuary. 2005, Vol. 44, No. 1, 87-101.

수학자가 수학을 탐구하듯이 학습자도 수학을 탐구할 수 있는 방안 모색

김 진 호 (이화여자대학교 교육과학연구소)

I. 서 론

수학의 발달 과정은 수학적 창의성의 발현 과정이다(강완, 2003). 수학의 발달은 수학의 발달에 기여한 창의성이 뛰어난 어떤 한 개인에게서만 나왔다고, 동시대를 살아가던 인류의 공동 소산이라고, 또는 인류 지성의 누적적 산출이라고 단정적으로 단언하기는 어렵다. 하지만, 분명한 것은 수학이란 학문은 수학적 창의성이 발현된 성과물의 총체라는 점이다. 수학자들의 창의적인 정신활동의 총체인 수학적 지식을 있는 그대로 학교 학생들에게 지도할 수 있는 것은 아니다. 그래서, 이것을 학생들에게 지도할 목적으로 가공하는데 이 가공을 교수학적 변환이라고 본다. 이 변환 과정에서 수학자가 경험했음직한 정신적·상황적 과정들을 가배경화·가개인화의 변환을 해야 한다(강완, 1990). 하지만, 현실적으로 교수학적 변환의 과정은 어찌 되었건 간에 변환 후 결과물은 수학자의 창의적인 정신활동 과정은 찾아보기 어려운 대신에 이 정신 활동의 최종 산물인 계통적인 연역적 과학의 모습으로 나타난다.

이처럼 수학이라고 하면 우리는 흔히 두 가지 형태의 수학을 고려할 수 하는데, 전문 수학자들이 다루는 수학과 학생들이 다루는 수학은 수학의 서로 다른 측면을 보여 주고 있다. 학교수학은 이미 만들어진 것으로 볼 때(김진호, 2003), 이것은 계통적인 연역적 과학이고, 수학자들이 만들어가는 수학으로 볼 때 이것은 실험적인 귀납적 과학이다(Polya, 1956; Freudental, 1973). 학생들이 자신들이 다루고 있는 수학적 지식의 의미를 표상하지 못한 채 기계적으로 절차만을 수행하는 전통적인 수학 수업에서(David & Hersh, 1981) 이탈하기 위해서 연구자들은 학생들의 수학 학습은 행하는 것으로써의 수학을 강조하고 있다(Baroody, 1998; NCTM, 1989, 2000). 즉, 학교 어린이들도 수학자들이 수학을 구성해 가는 과정을 밟아 가면서 학습할 것을, 다시 말해서 학생들이 특수에서 특수, 또는 특수에서 일반으로의 유비추리, 귀납 추리라는 발견적 사고의 사유형식에 의해서 학습 할 것을 권고하고 있지만, 교사는 일반에서 특수, 전체에서 부분을 이끌어 내는 연역적 추리라는 사유형식에 의해서 교수하고 있다. 따라서 전통적인 수학 수업을 받은 어린이들은 자기 자신만의 수학적 절차를 만들어 내지 못하며 학교에서 학습한 절차로 이용해서 활용할 수 있는 문제가 아니면 문제해결을 하지 못한다(Kamii, 1994, 2001). 새수학(New Math) 운동에 교육학적 배경지식을 제공한 Bruner는 수학자들이 수학적 대상을 다룰 때 하는 행위를 초학자들도 경험할 수 있는 그런 학습환경을 제공해 줄 것을 강권하고 있다. 물론 새수학 운동은 실패했다고 하지만, 새수학 운동의 기저 정신은 창조적 지식기반 사회에서 활약할 동량들을 수학학습 할 준비를 하는 지금 이 시점에서도 되새겨 둘 필요가 있다.

> 오늘 우리는 우리의 어린이들이 장차 어떤 일을 하고 살는지 아무도 알 수 없습니다. 더구나 그들이 하는 일에서 어떤 수학을 필요로 할는지는 더욱 알 수 없습니다. 우리는 지금 이 어린이에게 어떤 수학을 가르쳐야 할까요? 우리가 해야 할 일은 그들이 장차 필요로 하게 될 수학을 스스로 학습할 수 있는 능력을 길러 주는 일 뿐입니다. (오병승, 2000)

---

1) 본 연구는 2004년도 한국학술진흥재단의 연구비 (KRF2003-005-B00028)에 의해 지원되었음.
* 2004년 8월 투고, 2005년 2월 심사 완료.
* ZDM분류 : C42
* *MSC2000분류 :97C50*
* 주제어 : 수학적 창의성, 수학적 사고, 교수·학습 모형

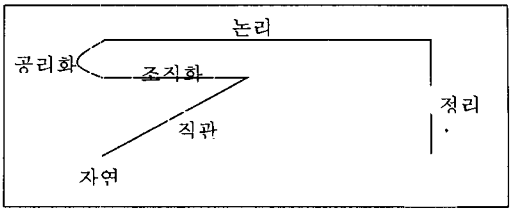
제7차 수학과 교육과정의 한 구심점을 이루고 있는 구호가 수학을 창의적으로 학습하는 것이다. '창의적으로'라는 용어의 의미를 해석하는 것은 각 학자마다 다를 수 있겠지만, 앞서 논의한 것을 바탕으로 "(수학을) '창의적으로' 학습하는 것"을 유추해 보자면, '수학자가 수학을 탐구하듯이'로 해석하는 것도 가능할 듯 싶다. 이런 측면에서 수학을 창의적으로 학습할 수 있는 교육과정 또는 수학교재의 개발을 고려 한다면, 수학자들이 새로운 수학적 지식을 생성해 갈 때 경험하는 귀납적 실험과정(또는 사고실험)은 어떤 과정들로 구성되어 있는지를 논의해 볼 필요가 있을 것이다. 이들 과정을 구체적으로 논의하기 위해서, 본 고에서는 수학적 아이디어를 착안해서 하나의 수학적 정리, 원리 등으로 발전시키기까지의 수학적 (정신)활동과 이 활동에 동반되는 수학적 사고들을 고찰하고자 한다. 또한, 오일러의 표수 정리를 예로 하여 수학자의 실제 귀납적 실험 과정을 가상적으로 사고실험을 하겠다. 이들 과정으로부터 수학을 창의적으로 교수·학습하는 과정에 대한 모형을 제안하고자 한다. 마지막으로, 이들 논의를 바탕으로 학교수준에서의 수학적 지식의 창의적 학습을 위한 시사점을 논의하고자 한다.

II. 수학자들의 지식생성 과정 및 수학적 사고

1. 수학적 지식의 생성 과정

계통적인 연역과학으로써의 수학이란 관점에서 본 완성된 형태의 수학 이론의 구조는 다음 그림1처럼 표현될 수 있다(Allendoerfer, 1965). 즉, 수학자들이 수학을 발견하여 갈 때, 직관에 의하여 일반적 통칙(通則)을 추정하고 그의 적용을 시험하여 봄으로써 그들 중 유용한 것으로 남는 것만을 조직화하고, 그들을 증명할 수 있는 근거가 되는 공리를 찾아 내어 수학적 모델을 구성한다. 그렇게 하여 하나의 모델이 구성되면 수학자들은 연역에 의하여 일반 통칙을 증명하고 마지막으로 자연에의 응용을 꾀한다.

<그림 1>은 수학을 발견하는 과정에 있어서는 4개의 열쇠가 되는 지적 활동을 필요로 한다는 점은 보여 주고 있다. 그 지적 활동이란 직관, 조직화, 연역, 응용이다.



<그림 1> 수학을 발견하는 과정에서의 지적활동

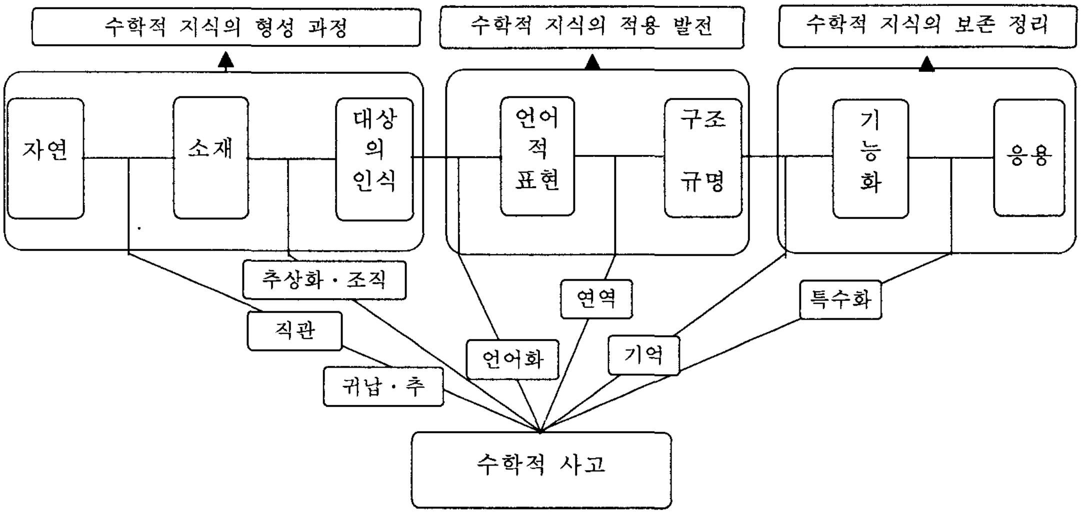
하나의 새로운 수학적 지식이 생성되기까지 겪게 되는 수학적 지식의 생성사(生成史)는 초기적 형태로 형성된 이후 적용 발전하는 과정을 거쳐 안정된 형태로 보존 정리되는 과정을 거치게 된다(강완, 백석윤, 1998). 이 4개의 지적 활동을 수행하는데 있어서 주로 필요한 수학적 사고는 지식을 형성하는 과정에서는 주로 직관(통찰), 추상화, 귀납, 유추, 발전 형성시키는 과정에서는 연역, 언어화, 지식을 보존 정리하는 과정에서는 기억, 특수화 등이 내재하고 있다고 볼 수 있다.

이 4개의 수학적 활동 및 수학적 사고를 지식의 형성 과정 별 단계와 연계하여 생각해 볼 수 있다. 수학적 지식의 형성 과정, 수학적 지식의 적용 발전 과정, 그리고 수학적 지식의 보존 정리 과정별로 요구될 것으로 추정되는 수학적 사고를 가미하여 보다 구체화시키면 그림2처럼 변형시킬 수 있을 것이다.

그림 2는 수학자의 수학 활동은 5개의 핵심적인 활동과 각 활동에 따른 다양한 수학적 사고로 이루어지고 있는 것으로 간주할 수 있다. 수학자의 핵심적 활동은 (1) 대상의 인식 (2) 언어적 표현 (3) 구조 파악 (4) 기능화, (5) 응용이며, 이에 따른 수학적 사고는 (1) 직관, 귀납·추리 (2) 추상화·조직화 (3) 언어화 (4) 연역 (5) 기억 (6) 특수화이다.

물론, 각 활동과 각 활동에 따른 수학적 사고가 위에 기술한 것으로만 제한되는 것은 아니며, 위의 그림에서처럼 각 활동에 따른 사고의 유형을 분리할 수 있는 것은 아니다. 즉, 대체적으로 이러하다는 의미지 절대적으로 이러하다는 의미는 아니다. 귀납·유추 및 직관이 한 수학적 대상에 대하여 동시에 작용할 수도 있다. 또한, 귀납적 사고에 의하여 얻어진 수학적 아이디어를 하나의 수학적 정리로 구성하기 위하여 연역적인 사고를 하는 과정에서 다시 귀납적 사고를 요구할 수도 있는 것이다.

수학자들의 이런 사유양식은 곧 바로 수학의 학습에



<그림 2> 수학적 지식의 생성과정단계별 사고과정

도 적합한 것이다(오병승, 1974). 수학자들이 사용하는 사고양식은 모든 학교수학의 주제들을 학습해야 하는 학습자에게도 지켜져야 한다. Bruner가 지적하였듯이, 이는 어느 수준에서의 수학 학습자는 바로 그 수준에서의 수학자라고 보아야 하기 때문이다. 이런 이유로 해서, 본고에서는 이런 관점에서 먼저 수학자가 수학을 탐구하는 과정에서 동원하는 수학적 사고를 면밀히 살펴 보고, 그리고 수학 학습 장면에서 이들 사고가 현현하는 모습을 모형으로 제안하고자 한다. 이를 위해, 수학적 지식의 생성과정을 위의 세 가지 과정에 비추어 각 활동과 이에 따른 수학적 사고를 논의 하기로 한다.

1) 지식의 초기 형성 과정

가. 수학적 대상의 인식

수학적 대상(개념)은 다음과 같은 세 가지 종류-개별 개념, 관계 개념, 조작 개념-가 있을 수 있다(강완, 백석윤, 1998; 오병승, 1976). 이를 풀어서 설명하자면, 삼각형, 원, 자연수, 짝수와 같은 특수한 수학적 개념으로써 존재하는 수학적 대상, 평행, 수직, 비례, 크다, 포함, 함수와 같은 두 개의 수학적 대상 사이의 관계를 표현하는 수학적 대상, 그리고, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈, 평행이동, 대칭이동, 대응시킨다와 같은 특수한 대상들에 조작을 가하게 되는 조작적 대상으로서의 수학적 대상이 그것이다. 이들 세 가지 측면에서의 수학적 대상은 어떤 수학적 현상을 다룰 때 독단적으로 수학적 현상에 작용하는 것이 아니라 동시에 작용한다고 보는 것이 타당할 듯하다. 왜냐하면, 개별 개념은 그 개별 개념 자체로써 가치가 있지만, 이것의 좀 더 진정한 가치는 개별 개념들 간에서 유도되는 관계적 개념을 위한 기저지식의 역할에서 찾을 수 있을 것이며, 또한 이런 과정엔 필연적으로 조작적 개념의 도움을 받아야 하는 것이다.

수학적 대상이 위와 같이 세 가지로 대별하여 볼 때 수학적 대상을 인식한다는 것 또한 세 가지로 분류하여 볼 수 있을 것이다. 그리고 그 3 가지는 수준의 순위가 있는데 첫째 수준이 특수 사실로써의 대상의 인식, 둘째 수준이 관계적 사실로서의 대상의 인식, 셋째 수준의 조작적 사실로서의 대상의 인식이다.

인식자의 외부적 존재를 지각적으로 인식하는 것만으로 탐구대상으로서의 대상물이 되지는 못한다. 이들 수학적 대상들의 성질들을 파악하여 하나의 추상적 개념으로 개념화 했을 때 비로서 외부적으로 존재하던 대상은 수학자의 내부에 하나의 개념으로 정립하게 된다. 이 개념이란 들을 수도 볼 수도 없는 순수한 정신적 대상이라 직접 관찰할 수도 없을 뿐만 아니라 자신의 마음 속에 있는 내용을 다른 사람에게 보여 줄 수도 없다. 따라서

대상의 인식은 적절하게 언어적으로 표현하는 것이다. 이렇게 하여 이루어진 인식이 곧 개념화이다. 수학적 대상을 인식한다는 것은 곧 수학적 대상을 인식자(수학자)가 개념화 한다는 것을 의미한다.

이와 같은 초기의 수학적 대상의 인식 단계, 즉 수학적 대상을 개념화하는 단계에서 직관적 사고, 귀납적 사고, 유비추리, 추상화·조직화 등이 동원될 것이다. 어떤 사람이 자신의 앞에 놓여 있는 얼마 간의 사과를 보고서 이것을 수학적 대상으로 인식하지 않으면 사과는 수학적 대상이 될 수 없는 것이다. 사과가 수학적 대상이 될 수 있다는 것은 양으로써 "하나 있음"으로 인식한다든지 또는 위치를 차지하고 있는 사물로써 "한 점"으로 인식을 한다든지 하는 것은 주요한 수학적 활동의 출발점이다. 이런 출발점은 직관적 사고에 의하여 이루어진다. 여기서 말하는 직관이란 단순히 사과가 있다는 사실을 관찰적으로 파악하는 것이 아니라 주어진 대상을 수학적 속성으로서 파악하는 것을 의미한다. 또한, 여기서 말하는 직관이란 신문이나 이야기를 나눌 때 자동적으로 읽거나 들은 대상을 그대로 수용하는 것이 아니라 우리는 대부분은 이와 관련이 있음직한 제반 요인들에 대한 생각을 동시에 하게 된다. 이와 같은 것 또한 직관적 사고라고 할 수 있으며 수학적 대상을 다루는데 있어서도 이런 직관적 사고는 중요한 역할을 할 수 있다. 즉, 주어진 과제를 문자적으로만 파악하는 것이 아니라 이해하기 위한 가장 초보적인 수준에서의 이해를 위한 수단이 되는 것이다.

추상화란 보이는 것은 보지 않아야 하며 보이지 않는 것은 보아야 하는 정신 작용이다. 보이지 않는 것을 보기 위하여 수학적 대상이 되고 있는 실체로부터 이질적인 요소들은 제거하고 동질적인 요소만을 추출하여 어떤 불변하는 성질을 표상화하는 과정이다. "2"란 특수한 수학적 대상은 추상화된 집합수(集合數)이다. 사과 2개, 배 2개, 나비 2마리, 집 2채 등 원소의 개수가 2인 집합들에 대해서 이들 원소들이 가지고 있는 이질적인 요소를 제거하고 동질적인 요소인 "2개 있음"이라는 성질만을 표상화(개념화)하고 이를 언어적으로 표현한 것이 수 2이다. 이 수2는 위의 예에만 적용할 수 있는 것이 아니라 책 2권과 같이 다른 대상에도 적용(특수화)할 수 있는 것이다. 즉, 더 발전된 불변의 성질을 추상화하게 되는데 이것을 2차 추상이라고 하기도 한다(Skemp, 1987). 이런 과정을 거치면서 확고하게 정신적으로 형성된 어떤 수학적 대상을 추상화하여 형성된 개념을 언어적으로 표현할 수 있게 되면, 복잡하고 미묘하던 개념은 단순하게 되어 이를 간결, 명확히 표현하고 활용함으로써 사고활동을 돕는다.

유비추리는 간단히 유추라고도 하는데 이것은 몇 개의 유사점을 기초로 하여 어느 특수한 사실의 성질에서 그와 유사한 다른 특수한 사실의 성질을 추론하는 방법으로 수학에서 자주 사용되는 사고 양식이다. 따라서 유추는 엄밀한 논리적 근거를 필요로 하지 않으며, 일종의 직관적이고 비약적인 사고라고 할 수 있다. 유추는 비논리적 전개 과정이 개입 될 위험성이 많지만, 잘 훈련된 직관이나 통찰력 또는 논리적 추론 등으로 보완된다면 수학적 활동에 발전적 원동력을 제공 할 수 있다는 점에서 그 중요성을 찾아 볼 수 있다(강완, 백석윤, 1998)

2) 수학적 지식의 발전 적용 단계

가. 언어적 표현

수학적 대상이 인식되면 그 대상(개념)을 언어화시켜야 한다. 이때, 개념과 개념의 이름을 구별하는 것은 매우 중요하다. 개념(槪念)이란 관념(觀念)이고 개념의 이름은 개념과 연결된 음가적 또는 상징적 표현물이다. 따라서 개념과 개념의 이름은 구별되어져야 한다. 개념과 개념의 이름의 연결은 개념이 형성되는 과정에서 이루어질 수 있으며 또한 개념 형성이 완성된 후에 이루어질 수도 있다. 개념에 붙여진 이름은 대상의 구별을 보다 기능적으로 하게 하는데 도움을 줄 뿐만 아니라, 새로운 개념을 형성하는데 유효한 것이며 때로는 본질적인 역할을 하기도 한다. 언어적 표현이란 범례가 되는 것과 그렇지 않은 것을 구별함으로써 개념형성을 촉진시키는 매개체라고 할 수 있다. 즉, 언어화(기호화)는 추상과정의 필수적인 요소가 되며 이를 유용하게 도와주는 것 그 이상의 것이다.

그리고 그 대상이 일단 언어화되면 그 이후의 모든 수학 활동은 그 언어의 조작과 밀접하게 관련되어서 진행되어야 한다. 언어적 표현은 수학 용어와 수학 기호를 이해하고 기록하고 조작하는 것과 관련되어 있다. 수학

에는 수학의 내용을 표상하는 기호가 있고 또 그 기호들을 배열하여 문장화하는데 필요한 자신만의 문법이 있다. 다시 말해서, 수학이란 언어체계는 그 자신만의 기호(언어)와 문법을 가지고 있는 것이다. 2+3=5와 같은 수식은 2, 3, 5,와 =의 수학적 언어를 대수적 문법에 맞게 진술한 것이다. 235+=이라고 표현된 수식이 있다면 우리는 그 식이 의미하는 바를 이해하지 못할 것이다. 또한, 이 식을 읽을 때, "2 더하기 3은 5이다."고 읽는다면 또한 이 수식이 지니고 있는 수학적 의미를 제대로 전달되지 않는다. 이 수식은 "2와 3를 더한 것은 5와 같다."고 읽어야 수학적 의미를 제대로 전달할 수 있는 것이다. 수학적 표현은 따라서 수학적 대상의 적절한 표현을 위한 강력한 수단이다. 이런 수학적 표현은 먼저 용어와 기호를 비형식적 수준에서 표현을 하게 되며 이를 좀더 수학적인 문장을 만들어가게 될 것이다. 수학적 문장을 보통의 문장으로 번안할 수 있어야 한다.

나. 구조 규명

새로운 아이디어나 대상을 발견하는 것은 직관 또는 귀납·유추의 몫이지만 이 아이디어나 내용이 참인지 거짓인지를 입증하는 하는 것은 연역적 사고의 과정을 필요로 한다. 유클리드의 「원론」은 당시까지 발전하였던 그리스 수학을 연역적 논리적으로 정리한 결과이다. 이런 결과를 얻을 수 있었던 것은 그 이전 시대에 이미 많은 수학적 지식들이 직관적, 귀납적, 유추적 수준에서 수학적 대상들이 참 거짓이 논의되고 있었기 때문임을 우리는 부정할 수 없다. 즉, 먼저 개연적 아이디어가 형성되고 난 후 이를 확고한 아이디어로 전환하기 위한 작업이 연역적 사고와 논리적 사고를 필요로 하는 과정이다.

논리적 연역적 증명을 위하여 다양한 접근 방법이 동원될 수 있다. 수학적 귀납법도 그 중의 하나이다. 귀납적인 사고는 수학적 대상에 대한 경험을 통해 어떤 추측이나 예측을 구성하고, 이로부터 일반적 법칙이나 원리로 발전시키고자 할 때 사용된다. 그렇기 때문에, 일반인들 뿐만 아니라 과학자들도 귀납적 사고를 귀납논리와 동일시하는 경향이 있었다(Popper, 1997). 귀납적인 방법으로 얻어진 결론은 거짓으로 판명될 수 있는 개연성을 항상 지니고 있기 때문에, 귀납법 그 자체는 과학적 진리를 탐구하는 방법이라기 보다는 이를 추구하기 위한 중간 과정이라고 보는 경향이 짙다. 하지만, 수학적 귀납법은 모든 경우에 대하여 귀납적으로 얻어진 아이디어(성질)가 성립한다는 점을 입증할 수 있는 수단이므로 연역적인 증명 방법의 한 가지라고 생각한다.

여기서 한 가지 의문을 가질 수 있다. 수학적 귀납법이 모든 경우에 대하여 주어진 아이디어가 성립한다는 사실을 입증할 수 있는 방법이란 사실을 증명할 수 있는가?하는 점이다. 즉, 수학적 귀납법 그 자체를 증명할 수 있는가 하는 질문이다. 만약 이 질문에 대한 증명을 할 수 없으면, 수학적 귀납법 역시 하나의 귀납적 사고의 또 다른 하나의 유형으로 전락하고 말 것이다. 수학적 귀납법은 완비성 공리를 이용하여 증명이 가능하다.(이에 대한 자세한 증명은 논지를 벗어나기 때문에 생략한다. 우정호(1998)의 논의를 참고 하는 것도 이해에 도움이 될 듯 하다.).

연역법은 전체에 대한 지식이나 일반적인 법칙 또는 원리에서 출발하여 부분에 관한 지식이나 특수사례 등을 이끌어내는 방법이다. 그러므로 연역적 추리 방법은 논리적인 엄밀성이 철저히 가해진 추리방법이다. 취급하고 있는 수학적 대상이 참임을 입증하기 위하여 연역 방법을 따르게 되는 이유가 여기에 있다. 연역 추리는 일반적으로 진인 명제를 전제로 하여 추론을 진행하기 때문에 추론의 결과로 얻어진 대상은 항상 참이다. 그러나, 간혹 전제가 거짓인 명제에서 추론을 진행하는 경우도 생기는데 이때는 매우 주의를 하여야 한다. 추론 결과로 생겨난 새로운 명제는 참이 아니라 거짓이 될 가능성도 상존하기 때문이다.

수학자들은 자신들의 증명이 형식적 타당도에서는 서로 다를 수 있음을 인정하지만, 다루고 있는 명제를 정당화시킬 수만 있다면 같은 정도로 각 증명을 수용한다. 더욱이, 수학자들은 증명이 형식적으론 타당하지만 내용적으로 타당하지 않을 때, 증명을 이해하는데 별로 도움이 안 된다고 하며, 심지어는 그 증명 자체의 진위를 확신할 수 조차 없다고 주장한다. 현재 활동 중인 수학자들이 정리를 수용하는 과정은 엄밀한 증명보다는 이해와 의미에 의존하는 사회적 과정이다(류희찬, 조완영, 김인수, 2003, 삭제). 실재 수학계에서 새롭게 증명된 수학적 정리의 수용 여부는 엄밀한 증명보다는 수학전체에서 그 정리가 가지는 의미와 배경 개념에 대한 이해가 더 중요

한 역할을 한다.

어떤 경로를 거치었던든간에, 새롭게 증명된 수학적 지식은 이 지식을 생성한 그 수학자 내부에서만 존재한다면 그 지식의 가치는 인정 되지 않을 수도 있다. 만약에 페르마가 '페르마의 정리'라고 알려진 (삭제)$x^n+y^n=z^n$에 대한 증명을 논문으로 발표를 하였더라면, 이 정리의 가치는 더 더욱 의미를 가졌을 것이다. Weise가 이 정리를 페르마 사후 400년이 지난 후 증명을 하긴 하였지만, 페르마가 생각한 증명은 아니었을 수도 있을 것이다.

수학적 지식의 생성 과정에서 연역적 엄밀성이 지니는 위상은 "모든 수학자에게 절대 필요한 것은 자신의 추론을 공리적인 방법, 즉 명제들을 오직 논리적인 규칙 양식에 의해 한정시키는 방법으로 제시하는 지적인 성실함에 관심을 두며, 심상으로 나타나는 모든 직관적 '증거'는 신중하게 무시하는 것이다."와 같은 Dieudonne(1971; 재인용, 류희찬, 조완영, 김인수, 2003, p. 73)의 진술에서 명확히 드러난다. 명제를 정당화하기 위한 수단으로써 증명이란 도구를 이용한다. 이와 같은 수학자들은 연역적인 증명 도구에 의하여 생겨난 최종적인 결과물만을 보여주게 됨으로써, 자신들의 생각들을 발전시키는 과정에서의 어려움이라든가 시행착오적인 자신의 실수를 감추고자 한다. 따라서 Tall(1991; 재인용, 류희찬, 조완영, 김인수, 2003)은 완성된 수학적 사고의 발달 과정에서 나타날 수 있는 어렵고 힘든 일 등 수학적 사고의 보다 폭넓은 모습을 학생들에게 인식시킬 수 있는 적절한 방법은 무엇인가라고 묻고 있다.

3) 수학적 지식의 보존 정리 단계

가. 기능화와 기억

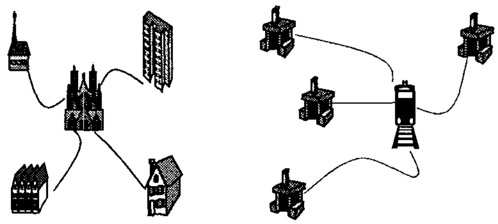
새롭게 증명되어서 하나의 수학적 지식으로 인정을 받은 지식은 다른 지식과의 원활한 유기적인 관계를 유지되는 가운데 자신의 가치를 인정받을 수 있다. 이젠 새로운 지식을 생성하던 과정에서 발생하는 난해한 개념들은 전면에 들러나지 않게 하면서 새롭게 증명된 지식을 최종적으로 완성된 개념으로 사용할 수 있어야 한다. 결과적으로, 이젠 지식의 생성으로서의 문제가 아니라 생성된 지식의 활용으로서의 문제로 생성된 지식의 기능화의 문제가 대두된다. 이런 기능화의 한편에는 쉽게 사용되기 위하여 기억될 수 있도록 생성된 지식은 기호체계를 이루어야 할 것이다.

나. 응용과 특수화

새롭게 성립된 수학적 지식은 두 가지 측면에서 그 응용성을 지닌다. 한 가지는 새롭게 구성된 지식이 하나의 새로운 수학적 대상이 되어서 수학 그 자체에 응용되는 경우이다. 또 다른 한 가지는 실생활에서 발생하는 문제를 해결하기 위한 도구로써 응용이다. 어느 측면에서는 수학적 지식의 가치는 자연 상태에서 발생하는 문제를 해결하는데 있는 것이다. 이런 수학적 활동을 특수화라고 한다. 즉, 특수화란 일반화된 수학적 개념(원리, 법칙 등)을 특정한 구체적 경우에 적용하는 과정을 말한다. 이와 같은 특수화에 의하여 수학적 지식의 가치는 외재적으로 효용성이 드러난다.

III. 수학적 지식의 생성 과정에 대한 예 - 오일러의 표수 1의 정리

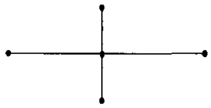
자연에서 반복적으로 발생할 수 있는 현상으로부터 어떤 의문을 갖게 될 수 있을 것이다. 즉, 반복적인 현상 속에 어떤 수학적 속성이 잠재해 있는 것이 아닐까하는 그런 지적 호기심이 발동할 수 있다. 예를 들어, 예전에는 아래 그림과 같이 큰 하나의 성에 이르는 길이 여러 갈래에서 가능하도록 되어 있었다. 급한 전달 사항이 있으면 이를 전달하기 위하여 중앙에서 하위지역(예를 들어 4 곳)으로 보낸다. 기차도 한 곳에서 출발지점에서 네 개의 다른 지점으로 향해서 출발할 수 있다. 이를 점과 선으로 표현하면 다음과 같아질 것이다.



<그림 3> 자연현상에서 얻은 직관적 추상화

위의 그림 3은 현실적으로 다른 두 가지 현상이지만

두 현상이 같은 현상을 나타내고 있음을 직시하고 아래 그림과 같이 표현을 하게 되면, 위의 두 현상은 어떤 의미에서는 동일한 것으로 간주할 수 있게 된다.



<그림 4> 자연현상의 수학적 추상화

위의 자연 현상에서 관찰된 현실적 대상을 수학적 대상으로 바라볼 수 있는 것은 자연현상을 자연현상 그대로 인식한 것이 아니라 수학적 대상에 대하여 수학적 추상화가 이루어졌기 때문이다. 즉, 한 지점에서 다른 지점에 이르기까지의 길의 포장상태, 휘어진 정도, 두 지점 간의 거리, 또는 길의 고도 등은 무시되고 각 지점과 두 지점을 이어주는 길 사이의 공통적인 특성인 두 지점 사이에 단 하나의 길이 존재한다라고 추상화한 것이라고 할 수 있다. 이를 수학적 대상이 되도록 위의 그림과 같이 조직화하였다고 할 수 있다. 자연적 현상이 수학적 대상으로 전환되면서 자연에서의 '이름'이 아닌 수학적 대상으로서의 이름을 가질 필요가 있다. 이제 관심의 대상이 되고 있는 수학적 대상을 "길"이라고 명명하고 길을 이루고 있는 성분들 사이에는 어떤 구조가 있는지 탐구하게 된다.

이처럼 조직화된 수학적 대상은 이제 수학적 대상을 상대로 귀납적으로 가능한 쉬운 경우로부터 하나씩 어떤 법칙이 있는지를 확인해 갈 것이다. 먼저, 점이 2개 있으면 선은 1개 있다. 점이 3개 있으면, 선은 2개 있게 된다. 점이 4개 있으면 선은 3개 있게 된다. 점이 5개 있으면 선은 4개 있게 된다. 이런 귀납적 과정을 거치면서 점과 선 사이에는 어떤 관계 즉, "길에서는 점의 수가 선의 수보다 하나 더 많다."는 아이디어를 직관적으로 얻게 된다. 이런 직관을 정리된 명제의 형태로 정리를 하면 다음과 같이 된다.

명제 1. 길에서는 점의 수 u와 선의 수 v 사이에는 u-v=1이 성립한다.

위와 같은 추상화·조직화하는 과정을 거치면서 대상으로 삼고 있는 대상으로부터 공통적인 규칙성이나 필요한 규칙, 원리 등을 만들어 가는 과정이 새로운 수학적 지식을 형성해 가는 과정으로 이를 특히 형식화 과정이라고 할 수 있다.

오일러의 표수 예로 돌아가서, 일부 점과 선에 대하여 조사한 바로부터 얻어진 명제가 모든 점과 수 사이에도 성립하겠는가? 하는 의문을 가지게 된다. 즉, 점이 6개일 때, 아니 점이 100개 일 때도 명제1이 성립하겠는가? 하는 의문을 가지게 된다. 그래서 위의 명제는 "모르긴 몰라도 '길에서는 점의 수 u와 선의 수 v 사이에는 u-v=1이다.'명제가 성립할 것이다."고 한 걸음 물러서서 진술하게 되고, 모든 경우에도 성립할 것인가 하는 것을 규명하고자 노력하게 될 것이다. 하나의 새로운 수학적 아이디어가 생성되어 가는 과정에서 귀납법은 이렇듯 어떤 아이디어를 형성 발전시키는데 공헌을 하게 된다. 하지만, 이것만으로 온전한 새로운 지식이 형성되는 것은 아닌 것이다. 귀납적인 방법은 항상 반론이 생길 수 있는 것이다. 그래서 연역적으로 증명을 시도하게 된다.

명제: 길에서 u=2일 때, v=1이면, u-v=1이다.

증명: $u=r(r\geq 2)$일 때, $v=r-1$이면, $u-v=1$이라고 가정하자.

$u'=u+1$일 때, $v'=u+1$이면

$u'-v'=(u+1)-(v+1)$

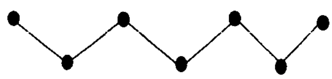
$=r+1-(r-1+1)$($\because$ 가정에서 $u=r$, $v=r-1$)

$=1$

$\therefore u'-v'=1.$

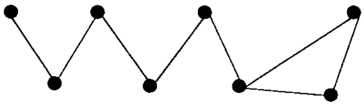
따라서, "길에서는 u-v=1이다"이 항상 성립한다는 결론을 얻는다.

결과적으로 "길에서는 u-v=1이다."는 정리(1)을 얻는다. 정리를 얻은 후엔 귀납적으로 사고를 진행하는 동안에 시도해 보지 않았던 경우에 대하여 얻어진 정리가 옳은지 그른지를 임의의 수의 점으로 이루어진 점의 수와 선의 수에 대해 적용해 봄으로써 얻어진 정리를 확인하게 된다.



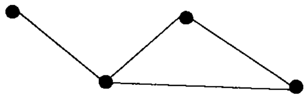
<그림 5> 증명된 명제를 아이디어를 얻기에 사용하지 않은 예에 적용

위와 같이 점의 수(8)-선의 수(7)=1임을 확인해 본다. 이런 작업을 하는 도중에 다음과 같이 지금까지와는 다른 길을 만나게 될 수도 있다.



<그림 6> 증명된 명제가 성립되지 않는 예

위와 같은 모양에서는 정리1이 성립하지 않는다(점의 수(8)-선의 수(8)=0). 따라서 지금까지 살펴 본 길들과 위의 모양과의 차이점이 무엇인지를 인식하여야 한다. 이런 인식은 다시 직관적 관찰에 의존하게 되며 이 직관적 통찰에 의하여 얻어진 그 결과를 수학적 대상으로 하여 다시 수학활동을 진행한다. 지금까지의 "길"은 모두 출발점으로 돌아오려면 지나갔던 길을 되돌아 와야지만 했다. 하지만, 새롭게 접하고 있는 길은 지나온 길을 되돌아가는 것 없이 원 출발점으로 돌아가는 것이 가능하다. 이런 직관적 통찰을 바탕으로 전자를 "열린 길"이라고 하고 후자를 "닫힌 길"이라고 명명한다. 유추적으로 "열린 길"에서도 어떤 수학적 특성이 발견되었듯이 닫힌 길에서도 어떤 수학적 특성이 발견될 수 있을 것이라는 상상을 할 수 있을 것이다. 이런 가정에 따라서, "닫힌 길"에 대하여도 앞서와 마찬가지로 귀납적인 방법으로 가상을 점검할 수 있다.



<그림 7> 닫힌 길의 가장 간단한 예로 명제 확인

점의 수(u) 선의 수(v) 닫힌 길의 수(w)

4 - 4 + 1 = 1

이처럼 귀납적인 사례로 알아 본 후, 아마 "모르긴 몰라도 '닫힌 길'에서는 u-v+w=1일 수도 있겠다."는 가설적 명제를 다시 하나 얻을 수 있을 것이다. 직관적 통찰에 의하여 얻어진 명제의 진위를 확인하기 위하여 몇 번의 사례를 가지고 귀납적으로 확인을 한 후에 위에서 얻은 가설적 명제에 대한 신념을 굳건히 형성하게 된다.

점의 수(u) 선의 수(v) 닫힌 길(w)

4 - 4 + 1 = 1

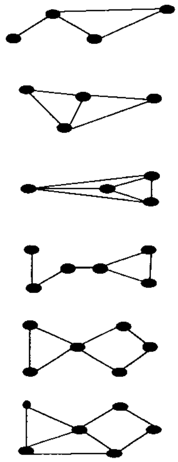
4 - 5 + 2 = 1

4 - 6 + 3 = 1

6 - 6 + 1 = 1

6 - 7 +2 = 1[4]

6 - 8 + 3 = 1



<그림 8> 새로운 명제에 대한 귀납적 증명

이 과정에서 닫힌 길이 하나 있는 경우 뿐만 아니라 다양한 경우에 대하여 귀납적인 탐구를 하게 된다. 예를 들어, 점이 4개인 경우 닫힌 길은 3개까지 생길 수 있다. 3 가지 경우에 대하여 모두 귀납적으로 관찰을 해야 한다. 위와 같이 얻어진 결과들은 가설적 명제가 참일 가능성이 있음을 웅변적으로 입증하고 있다. 이와 같은 개연적 확신이 신념으로 들어서게 되면, 연역적인 증명을 시도하게 된다.

증명: 닫힌 길에서, u(점의 수)-v(선의 수)+w(닫힌 길의 수)=1.

i) u=3일 때

u=3, v=3, w=1이다. 즉, u-v+w=1이다.

ii) u=r일 때 u-v+w=1이 성립한다고 가정하자.

① u′=u+1이고 v′=v+1일 때, w′=w이다.

u′-v′+w′=u+1-(v+1)+w=u-v+w=1.

② u′=u, v′=v+1, w′=w+1이다.

1) 점이 5개인 경우 및 그 이상의 경우에는 닫힌 길의 수가 많이 있다. 여기서는 모든 경우에 대한 설명은 생략하기로 한다.

$u'-v'+w'=u-(v+1)+w+1=u-v+w=1$.

따라서 발생할 수 있는 모든 경우에 대하여 항상 $u-v+w=1$이 성립하므로, 닫힌 길에 대한 가설적 명제는 하나의 정리가 된다.

결과적으로, 하나의 닫힌 길이 있는 경우에 $u-v+w=1$이 성립한다는 정리(2)를 하나 얻는다.

그리고 먼저 얻은 정리(1)은 닫힌 길이 하나도 없을 때 성립하는 특수한 경우라는 사실을 알게 된다. 그래서 정리(1)을 정리(2)의 보조정리로 다시 명명한다. 이와 같은 과정을 거치면서 연구자는 얻어진 새로운 수학적 정리를 학계에 발표하게 된다. 그런데 이때 논문을 작성하는 과정에서 지금까지 경험하였던 모든 직관적•귀납적 사고 등은 마치 없었던 듯이 안 들어나게 하면서 연역적인 방법만을 이용해서 작성하게 될 것이다.

> 길에 관한 연구
>
> 홍길동
>
> 본 연구는 점과 선으로 이루어진 "길"에 관한 연구로 길의 각 요소들 사이의 관계를 밝힌다. 길은 점의 수(u), 길의 수(v), 닫힌 길의 수(w)로 요소로 구성된다. 이들 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.
>
> 명제: 닫힌 길에서, u(점의 수)-v(선의 수)+w(닫힌 길의 수)=1.
>
> 증명: i) $u=3$일 때
> $u=3$, $v=3$, $w=1$이다. 즉, $u-v+w=1$이다.
> ii) $u=r(r\geq 3)$일 때 $u-v+w=1$이 성립한다고 가정하자. ① $u'=u+1$이고 $v'=v+1$일 때, $w'=w$이다.
> $u'-v'+w'=u+1-(v+1)+w=u-v+w=1$.
> ② $u'=u$, $v'=v+1$, $w'=w+1$이다.
> $u'-v'+w'=u-(v+1)+w+1=u-v+w=1$.
> ∴ 모든 경우에 대하여 $u-v+w=1$이 성립한다.

> 보조 정리: $w=0$일 때, 즉, 열린 길에서는 $u-v=1$.
>
> 증명: 길에서 $u=2$일 때, $v=1$이면, $u-v=1$이
> $u=r$일 때, $v=r-1$이면, $u-v=1$이 성립한다고 가정하자.
> $u'=u+1$일 때, $v'=v+1$이면,
> $u'-v'=(u+1)-(v+1)$(∵ 가정에서 $u=r$, $v=r-1$)
> $=1$이다.
> ∴ 모든 경우에 대하여 $u-v=1$이 성립한다.

Ⅳ. 창의적 수학 학습을 위한 교수학습 모형

수학학습은 이해를 필요로 하는 학습, 즉 학생의 능동적 지적 활동에 의한 진정한 의미에서의 지적 학습이어야 한다. 그래야만 학생들은 수학을 이해하고 또 스스로 수학을 할 수 있는 힘을 키울 수가 있다(Skemp, 1987). 따라서, 학습자에게 수학 학습은 실험적 귀납과학으로서의 성격을 강하게 띨 수 있는 환경에서 진행되어야 한다. 실제로 어떤 종류의 수학 문제(또는 수학적 대상)를 다룬다 하더라도 수학은 귀납 추론의 성격을 강하게 띄고 있다(Polya, 1953). 즉, 학교에서 수학 학습은 이미 만들어진 기존 지식을 지극히 형식적으로 지도하는 것이 아니라, 가르치고 배우는 사람의 입장에서는 옛날 사람들이 수학을 처음 만들 때의 방법과 마찬가지로 탐구적·발견적·생성적으로 학습할 수 있도록 학습제재(題材)를 재구성해야 한다(강시중, 1995; 오병승, 1976; Kamii, 1994, 2001, 2003; Piaget, 1977/2001).

어린이들은 자신들의 일상생활 중에 녹아 있는 수학적 개념들을 획득하지만, 이들이 미래 사회를 살아가는데 필요한 수학은 고도의 일반성과 추상성이 어우려진 수학이다. 그렇기 때문에 수학은 자연환경으로부터 직접적으로 의존해서 학습할 수 있는 것이 아니고 교사를 통해서 간접적으로 수학을 학습한다.

양자간에 학습이 이루어지기 위해서 학습 대상을 필요로 하는데, 이 학습 대상은 자연환경으로 유래한다. 이

학습소재로서의 자연 환경은 교사에 의해서 선정될 수도 있지만, 학습자 스스로 교실로 가져 올 수도 있다. 어느 경우든, 수학적 대상으로 전환하기 위해서 주어진 소재에서 불필요한 것은 사상(捨象)하고 추상행위를 동시에 하게 될 것이다. 즉, 이 과정을 수학화라고 할 수 있는데, 이는 관심의 대상이 되고 있는 모든 현상으로부터 수학적 양식을 추출하는 과정을 말한다. 이것은 경험이나 실세계의 여러 현상 속에 숨어 있는 수학적 양식을 추출하는 곳과 수학 내부에서 일어나는 수학적 양식을 다른 양식과 결합하여 새로운 수학을 구축하는 일련의 과정이다(김진호, 2003; 유윤재, 2002).

예를 들어, 원주율을 값에 대한 학습을 한다고 가정해보자. 즉, 원의 지름과 둘레의 길이의 비의 값을 새롭게 학습하는 것이다. 전통적인 교실 수업에서는 교사가 교과서에 제시되어 있는 정의를 읽어 주고 학습자가 정의를 학습한 것으로 간주하고 다음 응용문제 활동으로 들어간다(교육과학연구소, 삭제, 2003). 이런 수업에서는 수학적 지식의 전수는 즉, 기계적 학습은 있지만, 창의적인 수학적 활동은 없다. 먼저 학생들은 원과 원의 둘레의 길이 간의 비를 구해야 하는 상황 즉, 두 양 사이의 비에 대한 학습 동기를 제공할 수 있는 상황(문제 상황이든, 탐구 활동이든, 또는 역할극이든)에 직면해야 한다. 주어진 문제 상황으로부터 수학적 성분을 추출하여 학습의 대상으로 선정하는 것이 첫 번째 과정이다. 두 양 사이의 비는 학생들이 학교수학을 통해서 처음으로 접하는 상황이기 때문에 이 개념을 학습하는 과정은 후에 유사한 개념(예를 들어, 삼각비)을 이해하는데 적지 않은 영향을 미칠 수 있다. 따라서, 이때 두 양 사이의 비가 일정한 것과 일정하지 않은 것에 대한 탐구가 있어야 한다. 교사가 학습 목표가 후자라고 해서 후자에만 초점을 둔 수업을 진행한다면, 어린이들이 형성하기를 기대하는 개념은 모호하게 형성될 가능성이 있다(Skemp, 1987). 따라서 이 기간의 활동으로는 기습한 지식들간의 관계로부터 파생하는 관계인 정다각형과 일반다각형의 변들 사이의 비가 각 다각형의 변의 크기가 변함에 따라서 일정한가 아니면 달라지는가를 탐구하는 활동을 한 후, 원의 경우는 지름의 길이가 변함에 따라서 지름과 원의 둘레의 길이 사이의 비에 변화가 생기는지를 탐구하는 활동으로 옮겨 가야 한다.

이때 교사는 가장 두드러진 역할은 초기 문제 상황에서 학습 내용을 학생들이 재발견 할 수 있도록 학습경험을 학생들의 반응에 따라서 끊임없이 재구성해 가는 것이다. 교사의 개입이 없으면, 초기 문제 상황은 공허한 학생들의 불필요한 관심으로 인하여 소기의 목적을 달성할 수 없는 방향으로 전개될 가능성이 농후하다. 이런 점에서 보면, 학생 또한 수업에 집중하여야 하며, 학생들의 사상활동을 위하여 학습목표를 분명히 제시하는 것도 바람직하다.

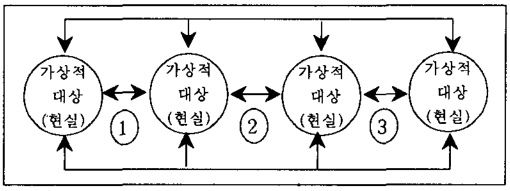
다음 단계에서 추상화된 대상을 실험, 실측, 가설 검증, 귀납, 유비추리와 같은 정신활동 등과 같은 귀납 실험을 통해서 수학적 대상에 감추어져 있던 하나의 수학적 개념을 형성하고 이것을 언어적으로 표현하여서 가연적 결론을 얻는다. 즉, 새로운 지식을 형성한다. 이 과정이 두 번째 과정이다. 이런 활동을 하는 과정에서 교사는 학습자가 수학보다는 수학화를 추상개념보다는 추상화를 정의보다는 정의화를 원리보다는 원리추출을 하면서 수학을 재발명할 수 있는 활동들을 경험할 수 있도록 물리적 제재 및 정신적 제재를 조작할 뿐만 아니라 학습자와의 상호작용을 통하여 지속적으로 진행 중인 활동에 대한 반성을 조장하여야 한다.

위의 원주율 학습으로 돌아가자. 학생들에게 다양한 크기의 지름으로 이루어진 원을 제시하고 원의 둘레의 길이를 측정할 수 있는 방법을 찾아 보도록 한다. 원의 지름은 쉽게 구할 수 있으나 원의 둘레의 길이는 어떻게 구할 수 있을까? 물론 원주율을 알고 있다면 위의 질문은 간단하게 $2\pi r$이란 공식을 이용해서 구할 수 있다. 하지만, 지금의 학습과제는 원주율을 모르고 있는 상태에서 원주율 값을 구하고자 하는 것이 학습 목표이다. 원의 둘레의 길이를 실측하는 것은 이것이 직선이 아니고 곡선이기 때문에 난관에 부딪치게 된다. 다른 효과적인 방법을 학생들에게 구안하도록 한다. 다른 효과적인 접근 방법이 나오지 않으면, 교사는 아르키메데스의 방법을 소개해 줄 수 있다. 아르키메데스의 방법에 따라서 각 학생들은(또는 조별로) 다양한 크기의 정다각형을 시도해 보고 두 측정치 간의 비를 구해 보도록 한다. 이 다각형의 변의 수가 커질수록 비의 값이 어떤 일정한 값에 접근하는지 관찰한다. 또한, 원의 지름의 크기를 달리하면서 같은 활동을 하고, 역시 원의 지름과 원의 둘레

의 길이에 대한 근사값이 일정한지를 탐구하도록 한다. 이렇게 해서, π에 대한 근사값을 구한다. π는 무리수이기 때문에 이런 방법으로 정확한 π값을 구할 수는 없다. 학생들은 이제 수학자가 수학적 지식을 만들어내듯이 수학적 지식을 만들어 낸 것이다. 이때 만들어진 수학적 지식이 학문에서 취급하는 수준까지 즉, π의 정확한 값을 구하지 못하였다고 해서 잘못된 수업이라고 할 수 없다. 어떤 방법을 이용하던지 그 정확한 값을 측정할 수 없을 뿐 만 아니라, 학교수준에서의 수학은 그럴 필요도 없다고 생각한다. 즉, 학교수학의 목표가 정확한 수학적 지식, 예를 들어, π의 값이 약 3.14라고 학습시키는데 있는 것은 아니다. 교실에서 행해지는 수학적 활동의 목표는 π의 값을 구할 수 있는 방법들을 탐구하고 구안하고, 또한 실제로 이 방법들을 활용한 실험을 해 보고, 얻어진 자료들로부터 어떤 결론을 내리기 까지의 일련의 과정을 학습자가 익히는데 있는 것이다. 이렇게 해서 얻어진 사실에 대해서 이름을 부여하는 명명(命名)의 시간이 있어야 한다. 구해진 사실(개념, 원리)등에 명명을 하는 활동은 이런 지식은 사회적 지식이라고 볼 수 있기 때문에(Kamii, 1994), 제7차 교과서에서 "약속하기"라는 형식으로 도입하는 것과 같이, 교사나 교과서 등으로부터 전수되어도 무방할 듯 하다(Kim, 2002).

다음 단계에서 이 생성된 새로운 지식을 이론화하여 다른 수학적 대상에 응용하는 과정이다. 예들 들어, π값을 아는 것은 원과 관련된 다양한 문제를 해결하는데 필요한 지식을 생성하는데 근원이 된다. 즉, 이젠, 원의 둘레의 길이를 쉽게 구할 수 있다. 즉, $\frac{\text{둘레의 길이}}{\text{지름의 길이}}$가 π로 일정하기 때문에 지름의 길이만 알면 둘레의 길이는 구해진다. 또한, π의 값을 알기 때문에, 원의 넓이를 구할 수 있는 식을 탐구할 수 있다.

지금까지 수학자들이 지식을 생성하는 과정에 비추어서 학교수학에서 다루고 있는 수학적 지식을 대상으로- 예를 들어, 원주율- 수학자들이 하는 과정을 밟아 볼 수 있는 수업 활동들에 교수실험을 해 보임으로써, 전문 수학자들이 수학을 탐구할 때 활용하는 수학적 사고들을 동원하면서 학생들도 학교수준에서 취급하고 있는 수학적 지식을 탐구할 수 있을 수 있다는 점을 설득력 있게 기술(記述)하여 보았다. 이 과정을 도식화하면 아래 그림처럼 도식화 할 수 있다.



<그림 9> 학생들이 수학을 학습하는 과정에 대한 모형

<그림 9>에서 타원 안에 있는 것은 수학을 창의적으로 학습하는 과정에서 접하게 되는 하위 수학적 대상들을 나타내고 있다. 그리고, 타원과 타원을 연결해 주는 화살표는 각 하위 수학적 대상으로부터 옮겨 가는데 필요한 수학적 사고들을 나태내고 있다. 수학자가 새로운 수학적 지식을 창조해 내듯이 학습자들도 수학을 학습할 수 있는 가상적 수학적 세계에 참여할 수 있도록 하는 것이 학교수준에서 수학을 창의적으로 학습하는 것으로 본다면, 모델을 구성하는 과정에서도 두 가지 요소(지식을 생성해 가는 과정뿐만 아니라 최종 생성된 산출물)가 포함되어야 한다. 이 모형은 이를 잘 반영하고 있다. 타원 위 아래로 흐르는 화살표는 이 수학적 사고들이 선형적으로 이루어지는 것이 아니라 순환적으로 이루어짐을 표현하는 것이다. 즉, 이들 수학적 사고 과정은 창의적인 수학 학습을 수행하는 전 과정을 관통하는 것을 의미하며, 한 수학적 대상에서 다른 수학적 대상으로 이행하기 위해 특별히 요구될 것 같은 수학적 사고들을 기록하였을 따름이다.

①과정은 가상적 대상(현실; 학습 소재)으로부터 학습의 대상이 되는 수학적 대상을 추출해 내는 과정으로, 직관적 사고, 추상적 사고, 최적화 과정 등을 포함하고 있다. 가상적 대상 그 자체로 수학적 대상이 되는 사례는 그리 흔하지 못하다. 필연적으로 가상적 대상 속에 잠재해 있는 수학적 대상을 표상해야 한다. 이 과정이 수학학습에서 우선적으로 실천되어야 할 것이다. 수학은 현실적으로 존재하지 않는 관념들을 대상으로 취급하는 것은 분명하지만, 이 수학은 실세계를 기반으로 하여 형성된 것이라는 점에서 명백하다. 이때 필요로 하는 사고가 직관적 사고이다. Bruner (1960)는 "직관적 사고자는 논리적 사고자들이 할 수 없는 문제를 발명하거나 발견할 수도 있다는 것이다."라고 주장하고 있는데, 이 주장이 의미하는 바는 "직관이 반드시 창조적인 성격을 갖는

수학에 접근하는 첫 단계가 되어야 한다."는 것이다. 즉, 창조적인 수학은 필연적으로 이 직관과 연결되어 있다 (Chapman, 1972, pp. 54-55).

NCTM(1991) 또한 연역적 추론 뿐만 아니라 귀납적 추론 및 직관적 추론도 수학의 발전과 적용에 있어 중요한 역할을 수행하기 때문에, 학교 수학을 교수·학습하는 과정에서도 중요하게 다루어져야 한다고 주장하고 있다. 학생들은 직관적(귀납적, 연역적 추론은 물론이고) 추론도 모든 학년 수준에서의 수학 수업 활동에 통합되어야 한다(Baroody, 1998). 예를 들어, 한자리 수 곱하기 한자리 수 곱하기를 학습하고, 홀수와 작수를 학습한 어린이들은 직관적으로 "홀수와 홀수를 곱하면 홀수가 되네." 라고 생각할 수 있다. 학생들이 하는 직관적 사고가 항상 옳은 '가설'을 형성하는 것은 아니지만, 이는 후에 경험적 추론이나 연역적 추론을 거치면서 반박하는 과정을 거칠 수 있다. 이런 후속 학습 과정들도 중요하지만, 여기서 주시해야 할 점은 학생이 스스로 학습할 소재(가설)을 형성하였다는 점이다. 비록 학생의 가설이 검증되지 않은 것이라고 해서 하찮게 보아서는 안 된다. 이 검증은 후속 학습과정이다.

수학은 실세계에 기반을 두고 있지만, 실세계 그 자체가 수학적 대상이 아니듯이, 가상적 대상 그 자체가 학교수학에서 취급해야 할 대상은 아니다. 가상적 대상에 대응하여 나타낼 수 있는 하나의 모델을 형성하게 된다. 이것이 두 번째 타원에 있는 수학적 대상인 것이고 이는 학교수학에서는 ①의 정신활동 결과로 얻어진 산출물이다.

따라서 ②과정은 수학적 대상으로부터 일차적으로 추상화된 수학적 대상이 지니고 있는 의미를 탐구하면서 수학적 지식을 발견해 가는 과정이며, 이 과정에서는 귀납적 활동, 형식화. 일반화, 추상화, 기호화, 공리화(제n차 가설화) 등의 사고 작용을 필요로 한다. 직관적 추리에 의하여 형성된 제1차 가설을 경험적으로(귀납적)으로 검증하거나, 연역적으로('~이면, ~이다.', 반례, 귀류법 등과 같은 형식 논리를 사용)하면서 점진적으로 초기 가설을 세련시켜가는 과정이다. 이 활동의 결과로 학습자는 수학적 지식을 생성하게 된다. 이것이 3번째 타원이 의미하는 바이다. 이렇게 학습된 지식은 다시 더 고차원의 지식을 생성하기 위한 자원이 된다. 따라서, ③과정은 ② 과정과 유사한 수학적 사고들을 필요로 하지만, 이때 다루고 있는 수학적 대상이 수학적 지식 그 자체라는 점에서 ②에서 다루던 수학적 대상 즉 실세계에서 추출해낸 수학적 모델인 수학적 대상과는 구분이 된다.

V. 수학교육에의 시사점

창의적인 수학학습, 즉, '수학을 창의적으로 학습한다.' 는 표현은 직접적으로 사용하지 않았을지라도, 수학자들이 수학을 생성하듯이 학습자도 수학을 학습할 수 있도록 교육과정, 교재, 수업이 이루어져야 할 것이라고 하는 주장은 많은 연구자들이 피력하고 있다(강완, 1990; Freudenthal, 1973; Piaget, 1977/2001). 이들은 '수학자들이 수학을 생성하듯이'라는 표현을 달리하고 있을 뿐이다. 본 연구자는 이들과는 달리 수학자가 실제로 수학적 지식을 생성해 가는 과정에서 경험했음직한 과정을 사고실험을 통하여 펼쳐 보이면서 '수학자가 수학을 하듯이' 란 명제를 논술하였다. 이를 바탕으로 창의적인 수학 교수학습 모형을 제시하고자 노력하였다. 이런 모형이 의도한 대로 수학교실에서 실천될 수 있을 때 화석화되지 않고 살아 쉼쉬는 수학을 학생들에게 접하게 할 수 있을 것으로 기대된다.

이 수학 교수·학습 모형으로부터 얻을 수 있는 몇 가지 시사점이 있는데, 다음과 같은 것 들이다. 첫 번째, 교육대학 및 사범 대학에서 예비교사들을 대상으로 하는 수업내용이 적어도 두 가지 측면에서 변화를 가져와야 한다. 한 가지는 예비교사들은 학교수학과의 관계를 짓지 못하면서 지식체계로서의 수학을 학습하는 데서 벗어나, 그 지식 체계가 발견·발명하게 된 과정을 학습해야 한다. 물론, 수학사라는 강좌가 개설되기도 하지만, 대체로 일체의 수학적 지식이 변화해 온 역사이지, 수학자들이 논증과 반박을 해 오면서 어떤 수학적 지식을 조탁해 오는 과정을 그린 수학사 강좌는 그리 흔치 않다고 본다. 즉, 예비교사들은 간접적으로 수학을 창의적으로 학습할 수 있는 기회를 가져야 한다. 다른 한 가지는 예비교사들이 수학적 지식을 생성하는 경험을 해야 한다. 물론, 여기서 말하는 수학적 지식이란 최전선의 수학자들이 취급하고 있는 그런 수학적 지식을 지칭하는 것이 아니다. 학교수준에서 취급되는 있는 수학적 지식을 그 대상으로

하여 수학적 지식을 생성하는 것을 말한다. 지식을 발견해 보지 못한 사람이 지식을 발견하는 수업을 할 수 있겠는가? 예비교사들은 직접적으로 지식을 생성하는 경험을 해 보아야 한다.

두 번째, 교실상황에서 수학자가 수학을 하듯이 학생들도 학교수학을 이해(학습)해 가려면, 최종결과물로서의 수학이 아닌 과정으로서의 수학을 학습할 수 있는 기회를 학생들에게 제공해 주어야 한다. 수학교과서 저자들이 의도한 바는 아니겠지만, 현실적으로 수학교과서는 연역적 사고의 틀에서 지식을 다룰 것을 암암리에 강조하고 있다. 이런 경향은 학생들로 하여금 자신을 포함한 모든 사람들이 수학을 할 수 있다는 신념 보다는 특수한 재능을 지닌 일부 사람들만이 할 수 있는 학문으로 여기게 한다. 과정으로서의 수학이란 관련된 지식을 형성하는데 있어서 인류가 경험한 원초적 지식을 학습자가 경험하는 것을 의미한다. 학습자가 이런 경험을 할 수 있도록 교재를 구성하려면, 학습자의 직관, 귀납적 추론, 추상적 반성 활동을 강조하는 활동들이 포함되어야 함에도 불구하고, 교과서에 많은 수학적 지식이 마치 사회적 지식 또는 관습적 지식인양 소개되어 있다(Kamii, 2001). 과정으로서의 수학을 경험하지 못한 학생이 형성한 수학지식은 매우 그 지식의 확장가능성이 낮고(Skemp, 1987), 이것은 계통적인 특성이 있는 수학을 학습하는데 분명 저해 요인으로 작용할 수 있다.

세 번째, 교사는 학생들이 수학을 창의적으로 학습할 수 있다는 신념을 지녀야 한다. 즉, 학생들의 능력을 믿어야 한다. 전통적인 교육관에 사로잡힌 교사들은 학생들은 미완성의 인격체로 보는 경향이 있다. 이들은 학생들에게 지식을 전수해야 한다는 강박관념에 사로잡혀 있다. 이런 학생관을 지닌 교사위주의 수업을 진행할 가능성이 농후하기 때문에 창의적인 수학학습을 기대하기는 어렵다. 제3차 수학과 교육과정에서 수학 수업 교수법으로 학습자 스스로 지식을 발견·발명 할 수 있는 교수법을 강조하였지만, "여전히, 지식은 전달되는 것"으로 보게 되었던 것(오병승, 2000)은 이런 신념이 교사들에게 자리잡지 못하였기 때문으로 본다.

네 번째, 제3차 수학과 교육과정은 나선형으로 수학적 지식을 교과서에 다루고 있었지만, 제4차 수학과 교육과정부터 지금까지 교과서에 실린 내용이 개조식(個條式)으로 표현되고 있다. 개조식으로 지식을 배열하는 것이 수학적 지식간의 결합을 방해하는 것이 아닌가 싶다. 일선 수학교사들이 수학교과서에 있는 내용을 순서적으로 제시하고 학생들은 이를 연습하는 형식으로 된 수업은 창의적인 수업을 방해하는 수업방식이라고 아니할 수 없을 것이다. 따라서, 교사들은 각 수학 지식이 담고 있는 의미 중심으로 재구성하여야 한다. 수학 지식이 담고 있는 의미 중심으로 재구성한다는 것은 수학적 지식의 절차적 속성의 강조에서 개념적 속성의 강조를 의미하며, 이는 또한 수학적 지식과 지식간의 결합이 강조되어야 함을 의미한다. 지식을 결합했을 때에 새로운 지식의 의미를 생성할 수 있다(김진호, 2003; Hiebert 1986; Kim, 2002). 일반적으로 교사들은 개념, 사고력 등을 강조한다고 하면서 실천적인 면에서 보면, 절차적, 기계적, 반복적 학습을 강요하고 있으며(강민정, 2003; 신민아, 2002), 개념을 강조한다 하더라도, 개념 그 자체만을 강조하지 결합을 시키지는 못한다.(이 남숙, 2004; 수업 관찰 중 개인 대화).

참 고 문 헌

강민정 (2002). 우리나라 수학 교수법 및 독일, 일본, 미국과의 비교 연구-TIMSS 비디오 연구의 방법을 적용하여. 한국교원대학교 석사학위논문.

강시중 (1995). 수학교육론. 서울: 교육출판사.

강완 (1990). 수학적 지식의 교수학적 변환. 수학교육, **30** (3), pp.71-89.

강완 (2003). 창의성 개발을 위한 수학과 교육과정 구성. 이화여자대학교 교육과학연구소 2003 정기학술대회 발표논문 (pp. 213-216). 서울: 이화여자대학교.

강완·백석윤 (1998). 초등수학교육의 이해. 서울: 동명사.

교육과학연구소 (2003). 초등학교 수업 관찰 비디오 자료. 교육과학연구소 기초학문연구 과제.

김진호 (2003). 학교수준에서의 수학적 창의성에 대한 논의- 새로운 수학적 지식의 생성이란 관점에서. 교육과학연구, **34** (2), pp.149-165.

류희찬·조완영·김인수 (2003). 고등수학적 사고. 서울: 경문사.

신민아 (2002). TIMSS 비디오 연구의 방법을 적용한 수

학과 수업분석. 이화여자대학교 석사학위논문.

오병승 (1974). 수학학습에서의 발견학습. 동심, 7, .pp.31-39. 서울교육대학교.

오병승 (1976). 수학 교수-학습에서의 기본 정리. 과학과 수학교육 논문집, 2, pp.93-110.

오병승 (2000). 수학교육, 지식 정보화 시대의 새로운 패러다임. 제7차 교육과정에 따른 초등학교 수학 수업 보조 교재(멀티미디어) 개발에 관한 연구, (pp.13-20). 서울교육대학교 수학 멀티미디어 자료 개발 위원회.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

유윤재 (2002). 수학적 창의성의 검사. 한국수학교육학회지 시리즈 F, 수학교육학술지, 7, pp.1-22.

Allendoerfer, C. B. (1965). *Mathematics for parents*. New York, NY: Macmillan Company.

Baroody, A. (1998). *Fostering children's mathematical thinking*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. New York, NY: Random House.

Chapman, L. R. (1972). *The process of learning mathematics*. Pergamon Press Ltd.

David, P., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experiences*. Boston: Houghton Mifflin.

Dieudonne, J. A. (1971). Modern axiomatic methods and the foundations of mathematics. In F. Le Lionnais (Ed.), Great currents of mathematical thought(Vol. 1). New York: Dover. (류희찬, 조완영, 김인수 (2003). 고등수학적 사고. 서울: 경문사.)

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel: Dordrecht.

Hiebert, J. (Ed.), (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates.

Kamii, C. (1994). *Children continue to reinvent arithmetic-3rd grade*. New York, NY: Teachers College Press.

Kamii, C. (2001). *Children reinvent arithmetic-1st grade* (2nd Ed.). New York, NY: Teachers College Press.

Kamii, C. (2003). *Children reinvent arithmetic-2nd grade* (2nd Ed.). New York, NY: Teachers College Press.

Kim, J. (2002). *Development of instructional units connecting informal and formal mathematical knowledge of equivalency and addition*. Unpublished Doctoral Dissertation of Teachers College, Columbia University.

NCTM, (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers for Mathematics Press.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers for Mathematics Press.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers for Mathematics Press.

Piaget, J. (1977/2001). *Studies in reflecting abstraction* (Edited and translated by R. L. Campbell). Sussex, BN3 2FA: Psychology Press.

Polya, G. (1953). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1956). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Popper, K. (1997). *The logic of scientific discovery*. New York, NY: Routledge Classic Publisher.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillside, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp.3-21). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

A Paper on the Pedagogy Focused in the Mathematical Thinking Mathematicians used

Kim, Jin Ho

11-1, Daehyun-Dong, Seodaemun-Gu, Seoul, 120-750

Ewha Womans University, College of Education, Educational Research Institute

E-mail: jk478kim@ewha.ac.kr

The purpose of this paper is to propose a teaching method which is focused on the mathematical thinking skills such as the use of induction, counter example, analogy, and so on mathematicians use when they explore their research fields. Many have indicated that students have learned mathematics exploring to use very different methods mathematicians have done and suggested students explore as they do. In the first part of the paper, the plausible whole processes from the beginning time they get a rough idea to a refined mathematical truth. In the second part, an example with Euler characteristic of 1. In the third, explaining the same processes with π, a model modified from the processes is designed. It is hoped that the suggested model, focused on a variety of mathematical thinking, helps students learn mathematics with understanding and with the association of exploring entertainment.

* ZDM classification : C42

* 2000 Mathematics Classification : 97C50

* key word : Mathematical creativity, Mathematical thinking, Model of teaching and learning