韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 2. 제 44권, 제 1호, 41-65.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Febuary. 2005, Vol. 44, No. 1, 41-65.

근접발달영역을 고려한 중학교 수학의 학습지도방안 연구

김 성 경 (불로중학교)
이 동 원 (경북대학교)

I. 서 론

대통령자문 교육개혁위원회는 「세계화・정보화를 주도하는 신교육제 수립을 위한 교육개혁방안 II」에서 "우리나라의 현행 초・중등학교 교육과정은 보통 수준의 다수 학생을 대상으로 만들어지고 운용되어 왔기 때문에 잘하는 학생이나 못하는 학생 모두의 성장 잠재력을 높이지 못하고 있다. 이러한 교육의 낭비를 막고 학생 개인의 성장 잠재력과 교육의 효율성을 극대화하기 위해 수준별 교육과정을 도입해야 한다."고 제안하였고 이에 따라 제 7차 교육과정에서는 학생의 능력, 홍미, 적성, 진로에 따른 개인차를 존중하는 기본 정신을 바탕으로, 학습 결손을 예방하여 기초・기본 교육을 충실히 하고 자기 주도적 학습 능력을 고려하여 교육의 수월성을 높이고자 수준별 교육과정을 도입하였다.

제 7차 교육과정의 이론적 배경이 되는 구성주의가 사회에 미치는 영향을 살펴보자. 사회와 교육은 밀접한 상호관계 속에서 서로 영향을 주고받으면서 사회적 요구와 교육적 요구를 충족시켜주는 방향으로 전개되어 왔다. 정보화시대라는 이름으로 규정되는 요즘의 사회에서는 사회와 교육간의 상호 역동적 관계가 정보화시대의 여러 특징으로 인하여 다른 어느 때보다 극명하게 나타나고 있다. 이에 따라 기존의 교육환경, 목표, 철학 등에 대해서도 새로운 시각과 접근이 필요하게 되었다. 정보화 시대가 요구하는 교육환경-학습자 스스로 자신의 학습에 대하여 주도적인 역할을 하는 동시에 학습에 대한 책임을 지면서 능동적이고 적극적으로 학습할 수 있는 환경-을 구현하려는 학습이론으로 변화하고 있다. 이런 변화의 핵심은 가르치는 교사중심에서 배우는 학생중심으로 주체의 전환이라는 점이다. 학습의 주체와 객체가 완전히 뒤바뀌는 새로운 교육 패러다임의 변화를 대변해 주고 그 실천적 안을 제시해 주고자 하는 이론이 바로 구성주의이다(강인애, 1997).

구성주의는 크게 인지적 구성주의와 사회적 구성주의로 나눌 수 있다. 인지적 구성주의는 지식의 형성과정에서 인간의 개별적인 인지적 작용을 가장 중요한 요인으로 보는 입장으로 대표적인 학자로 피아제(Piaget)가 있다. 이들은 아동 스스로 자신의 지식을 구성하므로 교사는 아동에게 지식을 가르칠 수 없고 아동의 지식 구성에 도움이 되는 활동과 놀이를 중요시해야 한다고 주장하였다. 따라서 교수-학습의 과정에서 교사는 학생의 발달 수준에 적당한 학습 환경을 조성하는 역할을 해야 한다고 주장하였다.

버크와 윈슬러(Berk&Winsler,1995)는 이들의 주장에 대해 발달의 중요성을 너무 강조한 나머지 학습의 공헌을 과소평가했다고 주장했다. 이런 결점을 극복하고자 하는 한 방법으로 비고츠키(Vygotsky)의 사회적 구성주의를 예로 들고 있다. 피아제와는 대조적으로 비고츠키는 사회・문화적 요인이 아동 발달의 여러 측면에 영향을 미치므로 교수-학습의 과정에서 교사는 아동이 사회적 상호작용을 하는 중요한 대상으로 보았다. 송선희(1999)는 비고츠키의 이론은 아동의 삶에 있어서 중요한 사람이 미치는 영향을 강조할 뿐만 아니라 아동의 발달을 이끌어 가는데 학교 교육의 중요성을 강조한다는 점에서 교육적 시사점이 크다고 주장했다.

국내의 근접발달영역에 관한 연구들은 유아를 대상으로 부모 혹은 교사와의 상호작용의 효과(김선옥, 1990: 한은숙, 1996)를 연구하는 것, 지능과 근접발달영역의 측정값중 어느 것이 아동의 학습 잠재력을 더 잘 나타내고

* 2004년 5월 투고, 2005년 2월 심사 완료.
* ZDM분류 : C33, C73
* MSC2000분류 : 97C80
* 주제어 : 근접발달영역, 비고츠키 이론, 비계설정

있는가를 탐구(한순미, 1993)하는 것 등이 있다. 최근들어 초등학생을 대상으로 근접발달영역을 고려한 학습지도방안에 대한 연구(반은희, 2001: 정윤경, 2002: 곽해진, 2003)가 이루어졌으며 중학생을 대상으로는 근접발달영역을 측정한 연구(이상하, 1998)가 있고, 근접발달영역을 고려한 학습지도방안의 탐구(송선희, 1999)가 있으나 실제 교육과정을 내용으로 한 것이 아니라 귀납적 추론과제로 연구하였다.

본 논문에서는 지금까지 국내에서 한번도 실시된 적이 없는 비고츠키가 제시한 근접발달영역을 고려한 중학교 3학년 실제 교육과정상의 내용(통계와 도형)에 대한 학습지도방안을 연구해 보고자 한다. 특히 이전의 연구에서 학습자의 실제적 발달수준을 고려하지 않고 동일한 문제로 학습하게 하였는데 이는 실제적 발달수준이 높은 아동은 천장효과를 나타내는 문제가 발생할 수 있으므로 이를 고려한 학습지도방안을 모색하고자한다. 또한 근접발달영역에서의 학습지도를 통한 학습자의 인지적 측면의 변화 및 정의적 측면의 변화를 살펴보고자 한다. 나아가 본 연구는 정보화 시대가 요구하는 패러다임의 변화에 대한 실천적인 안을 사회적 구성주의, 특히 아동의 발달과 사회적 상호작용을 중시한 비고츠키의 이론 중 학습의 잠재력이라고 볼 수 있는 근접발달영역, 에서 찾고자 한다. 또한 학생의 성장 잠재력을 높이고 개인차를 고려한 수준별 교육과정을 추구하는 제 7차 교육과정의 목표와 잘 부합되는 비고츠키의 근접발달영역을 고려한 학습지도를 소개하고 그 방안을 개발하고자 하는데 본 연구의 목적이 있다.

II. 근접발당 영역 이론

1. 근접발달영역 개념

근접발달영역은 1920년대와 1930년대에 걸쳐 교육학 및 심리학 분야에서 다수의 저술을 남긴 러시아의 유태계 심리학자 비고츠키가 제시한 개념이다. 그러나 스탈린 정권에 의해 그의 연구물은 금서로 지정되어 있다가 서방세계에 알려지기 시작한 것은 1960년대 말이었다. 당시는 냉전시기였고 발달심리학이나 교육학에서 피아제 이론과 행동주의적 관점이 각광받고 있던 시기여서 널리 알려지지 못하다가 최근 들어 미국을 중심으로 여러나라에서 새로이 조명되고 있다. 우리나라는 1990년 이후 꾸준히 소개되고 있지만 아직은 연구가 미흡한 실정이다.

근접발달영역은 독립적으로 문제를 해결하는 실제적 발달 수준과 성인의 안내나 더 유능한 동료와의 협동을 통해서 문제를 해결하는 잠재적 발달수준 사이의 거리이다. 비고츠키는 교수-학습이 바로 이 근접발달영역 안에서 일어나야 한다고 주장하였다. 많은 연구자들이 근접발달영역의 개념을 인정했고 근접발달영역을 좀 더 구체적으로 밝히고자 노력해 왔다. 근접발달영역에 관해 많은 논의를 해온 심리학자들(Wood; Bruner & Ross, 1976: Tharp & Gallimore, 1988)은 근접발달영역 안에 포함되는 것이 어떤 것인지 다른 방법으로 연구하여 근접발달영역의 개념과 근접발달영역에서의 상호작용의 방법을 이해하는데 도움을 주었고, 근접발달영역을 이용하여 수업을 개선하고자 하는 교사들에게 길잡이가 되고 있다(Bodrova & Leong, 1996).

근접발달영역의 연구에서는 아동의 발달을 선도할 수 있는 구체적 교수방법으로 근접발달 내에서의 비계설정(scaffolding)을 제시하고 있다. 비계설정은 비고츠키가 직접 제안한 개념은 아니지만 그의 이론을 적용하여 우드·부르너·로쓰(Wood; Bruner & Ross, 1976)가 소개한 개념이다. 비계설정의 사전적 의미는 "건물을 건축하거나 수리할 때 인부들이 재료를 운반하며 오르내릴 수 있도록 건물 주변에 세우는 장대와 두꺼운 판자 또는 볼트로 죄어 맞춘 금속관으로 된 발판을 세우는 것"인데 아동의 학습에 있어서 비계설정은 보다 능력 있는 협력자가 과제에 대한 상대방의 수행 능력에 따라 도움을 조절해 가는 것으로써 교수를 하는 동안 도움의 질은 계속 변화한다. 즉 교사는 과제가 학습자에게 새로운 것일 때 보다 많은 도움을 주고, 학습자의 능력이 증가함에 따라 도움을 줄여서 점차적으로 학습자가 과제에 대한 많은 책임을 지게 함으로써 학습자의 자율성, 독립성 및 책임감을 길러주는 것이다. 비계설정을 통한 학습은 아동의 성취도 증가를 가져온다는 연구결과들이 다수 있다.

비고츠키는 평가에 대해서도 전통적인 능력과 성취도 검사들이 아동의 학습능력을 측정하는 타당한 척도가 아니라고 주장했다. 그는 두 아동이 동일한 검사에서 같은 점수를 받았다면 단지 이들의 현재 능력 수준만 측정한

것이기 때문에 아동들을 어떻게 가르쳐야하는지에 대해서 아무 것도 알려주지 못한다고 지적했다(Berk & Winsler, 1995). 비고츠키 이론에 많은 영향을 받은 역동적 평가는 교육평가에 대한 새로운 패러다임으로 학습결과에 대한 평가보다는 학습 과정에 대한 평가를 강조하며 학습자들을 분류, 선발하는 목적으로 평가를 이용하기보다 교수-학습을 개선시키려는 목적으로 평가를 하는 것이다. 역동적 평가에서는 학습자의 오개념과 오류를 파악할 수 있고 진정한 학생의 능력을 찾을 수도 있다. 근접발달영역의 평가는 이러한 역동적 평가의 성격을 지닌다는 측면에서 중요한 의미를 갖는다.

2. 근접발달영역 개념의 확장

비고츠키는 근접발달영역이나 잠재적 발달 수준을 어떻게 측정, 평가해야하는지 구체적으로 언급하지 않았으므로 아동의 능력과 발달을 근접발달영역 개념을 통해 설명하려는 노력이 증가함에 따라 이론을 좀 더 명료화하는 일과 근접발달영역에서 발달을 구체적인 수준으로 세분화하는 일이 중요한 일이 되었다.

대표적으로 웨르치(Wertsch,1984)는 근접발달영역을 명료하게 이해하기 위해 '상황정의(situation definition)', '상호주관성(intersubjectivity)', '기호의 매개(semiotic mediation)'를 설명하고 있다. 한순미(1993)는 이 세 가지가 비고츠키의 근접발달영역에 대한 아이디어를 보다 명료화하고 확장시키는데 도움이 된다고 보았다. 이 세 가지를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

상황 정의는 어떤 상황(setting)이나 맥락(context)이 표상(represention)되는 방식으로 그 상황에서 작용하고 있는 사람들에 의해 정의된다. 상황 정의의 개념은 근접발달영역에서 성인과 아동의 공동 작업이 대상(objects)과 사상(events)에 대한 성인의 표상과 아동의 표상을 포함하기 때문에 근접발달영역을 설명하려 할 때에 반드시 필요하다. 성인과 아동이 같은 시공간적 맥락에 있지만 그들은 이 맥락을 서로 달리 이해하고 있어 과제 상황을 표상하는 방식이 다르다. 그러므로 아동과 성인의 상황 정의를 분석하는 것이 필요하다. 아동의 상황 정의는 아동의 실제적 발달수준과 일치하지만 성인의 상황 정의는 반드시 아동의 잠재적 발달수준과 일치하지는 않는다(Wertsch, 1984). 즉 성인과 아동은 어떤 문제가 주어졌을 때 문제에 대한 정의가 다르기 때문에 인지과정 및 전략이 다르다는 것이다. 이를 아동의 근접발달영역에 적용해서 설명하면 아동의 문제에 대한 정의와 인지과정 및 전략은 아동의 실제적 발달수준과 일치하지만 성인은 아동의 잠재적 발달수준과 일치하지 않고 더 높은 수준일 수 있다는 것이다(한순미, 1999). 주어진 문제에 대해 아동은 자신의 실제적 발달수준에서 이해하고 있는데 성인이 아동의 잠재적 발달수준보다 더 높은 수준에서 도움을 준다면 실제적 도움이 되지 못한다.

상호주관성은 성인과 아동이 같은 상황 정의를 공유하고, 공유한다는 사실을 알 때 성인과 아동사이에 존재한다. 상호주관성은 여러 가지 다른 수준에서 존재할 수 있다. 극단적인 예로 의사소통 상황에서 구체적인 대상에 대한 합의만 있을 수도 있고 또 다른 예로 동일한 방식으로 대상과 사상을 표상하는 거의 완전한 상호주관성이 존재하는데, 이러한 경우가 일어난다면 성인은 더 이상의 도움을 줄 필요가 없게 된다. 그런데 비고츠키가 염두에 둔 상호작용 유형은 성인이나 아동이 나름대로 정의한 상황과는 다른 상황 정의에 기초하여 의사소통하는 것이다. 근접발달영역에서 성인-아동의 상호작용은 절충된 상호주관적 상황 정의를 통해 성인과 아동은 의사소통이 가능한 방식으로 대상과 사상을 표상하게 된다. 이런 절충된 상호주관적 상황정의는 아동에게는 대상과 사상에 대한 자신의 이해를 바꾸는 것이며 성인에게는 아동과의 의사소통을 위해 상황정의를 절충하는 것이다(Wertsch, 1984). 즉 아동과 성인이 주어진 문제에 대해 상황 정의를 공유할 때, 자신의 상황 정의가 아닌 성인-아동 간에 의사소통이 되도록 절충된 성황 정의를 가지게 된다.

기호의 매개는 성인과 아동 사이에 상황 정의가 서로 다를 때 적절한 형태의 기호를 의사소통에 사용하면 상호주관성을 확립할 수 있다는 것이다. 즉 성인은 대상과 사상을 특정한 말로 표상하여 자신의 상황을 다시 정의하여 아동이 이해할 수 있도록 하는 것이다.

웨르치의 상황 정의, 상호주관성, 기호의 매개를 고려해서 근접발달영역에서의 교수-학습을 계획할 때에는 동일한 문제에 대해서 성인과 아동이 문제에 대한 정의와 해결 전략이 다를 수 있으므로 대화를 통해 서로 절

충을 해야 한다.

3. 근접발달영역을 통한 발달 4단계

갈리모어와 타르프(Gallimore&Tharp,1990)는 근접발달영역에서의 발달을 4단계로 분류하였다.

제 1단계는 보다 유능한 성인에 의해 도움 받아 이루어지는 수행단계이다. 이 단계는 아동이 독립적인 수행을 하기 이전에 성인이나 유능한 동료에게 의존해 있는 단계이다. 아동에게 필요한 타인 조절(other regulation)의 종류와 양은 과제의 성격과 아동의 연령에 따라 다르다. 근접발달영역의 시초에 아동은 과제, 상황, 달성해야 할 목표에 대한 이해가 매우 제한적일 수 있다. 부모, 교사, 보다 유능한 동료가 지시를 주거나 시범을 보이게 되는데 이 때 아동의 반응은 묵묵히 따르거나 모방적이게 된다. 아동은 점차 어떤 활동의 부분들이 서로 어떻게 관련되는지를 이해하고 수행의 의미를 이해한다. 보통 이러한 이해는 과제를 수행하는 동안 보다 유능한 성인들과 갖는 대화를 통해 발달하는데 대화 속에는 질문이나 피드백 등이 있게 된다. 1단계의 전환은 과제 수행에 대한 책무감이 아동에게 넘겨지면서 점진적으로 이루어지게 된다.

제 2단계는 자기 자신에 의해 도움 받는 수행단계이다. 전환이 이루어지고 있는 동안 아동을 주의 깊게 관찰해보면, 아동의 행위 양식이 개인간 정신(intermental) 과정에서 문제해결을 위한 노력에 참여하다가 개인내적 정신(intramental)과정에서 과제를 수행할 수 있도록 변화됨을 볼 수 있다. 이 단계에서 아동은 다른 사람들의 도움없이 과제를 수행하긴 하지만 수행이 완전히 발달하거나 자동화되었음을 의미하는 것은 아니다. 성인으로부터 받았던 조절과 도움이 아동 자신에게로 건너와 자기 조절(self-regulation)을 하게 되는데, 이 때 자기 조절은 자기지향적 말(self-directed speech)의 형태를 띤 분명한 구두화로 이루어진다. 자기지향적 말이 나타나는 현상은 매우 의미있는 발달이 일어나고 있음을 반영한다. 아동에게 있어 자기지향적 말의 주 기능은 자기 안내(self-guidence)이다.

제 3단계는 내면화되고, 자동화되고, 화석화되는 수행단계이다. 자기 조절이 사라지면서 아동은 근접발달영역으로부터 빠져 나오게 된다. 과제 수행은 보다 원활해지고 통합되며 자동화된다. 성인이나 자기 자신으로부터의 도움도 더 이상 필요하지 않게 된다. 이 단계에서 타인의 도움이 계속된다면 아동은 혼란스럽게 된다. 심지어 자의식(self-conciousness)조차 모든 과제 요소들을 원활하게 통합하는데 방해가 된다. 이 단계는 자기 통제 및 사회적 통제를 넘어서며 수행은 더 이상 발달하지 않는데, 그 이유는 이미 발달했기 때문이다. 비고츠키는 이것을 발달의 열매라고 하였다. 그러나 이것은 사회적 또는 정신적 변화와는 거리가 멀어 "화석화된(fossilized)" 것으로 묘사되기도 한다.

제 4단계는 근접발달영역을 통한 회귀로 탈자동화가 이루어지는 수행단계이다. 어떤 개인에게 있어서나 일생에 걸친 학습은 근접발달영역 연속체로 이루어지게 된다. 즉 타인의 도움으로부터 자기 자신에 의한 도움으로, 그리고 새로운 능력의 발달을 위해 다시 근접발달영역으로 회귀하게 된다. 모든 사람에게는 타인 조절, 자기 조절, 그리고 자동화 과정이 혼재해 있기 마련이다. 여기에서 중요하게 고려해야 할 점은 탈자동화와 회귀가 규칙적으로 일어나서 정상적인 발달과정의 네 번째 단계를 이룬다는 점이다.

4. 근접발달영역을 고려한 교수-학습

비고츠키의 이론에 따른 수업의 양상을 몇 가지로 정리하여 보면 다음과 같다.(허혜경, 1996)

첫째, 잠재적 발달 수준에 상응하는 수업이 이루어져야한다. 도움을 받는 수행과 도움이 없는 수행을 비교함으로써 아동의 근접발달영역을 분간하는 것은 교육의 실제에 있어서 중요하다. 아동의 발달이라는 면에서 보면 효과적인 수업은 근접발달영역에서 이루어지는 수업이다. 근접발달영역에서 아동의 수행을 보조하는 교사는 당연히 아동의 잠재적 발달 수준을 알고 있어야 한다. 따라서 교사가 아동과 나누는 대화에는 아동의 근접발달영역에 의한 즉각적 진단이 함축되어 있어야하고 교사는 아동의 발달수준을 끊임없이 확인해야한다.

둘째, 교육적 대화가 이루어져야한다. 아동의 근접발달영역에서 수업이 이루어져 교사와 아동간의 교육적 대

화라는 효율적 상호작용이 필요하다. 교육적 대화는 암기답안과는 근본적으로 다르므로 교사가 이미 알고 있는 해답을 넘어 무엇인가를 아동에게 전하고자 하는 것이다. 아동이 말하는 취지를 알기 위하여 교사는 주의 깊게 듣고 대화의 의미를 추측하고 아동의 노력을 도와주는 적절한 반응을 보일 필요가 있다.

셋째, 수업의 이중적 전개이다. 교사의 수업계획은 일반적 법칙을 설명하기 위하여 교사는 일반적 개념과 법칙을 잘 나타내어주는 구체적 실례를 선택하여야 한다. 교사의 계획은 일반적인 것으로부터 구체적인 것으로 발전하는 반면, 아동의 학습은 무개념적 행동의 단계에서부터, 관찰·연구를 통하여 얻은 지식을 추상화하고 언어적으로 서술하는 단계로 발전하여야한다. 도입단계의 행동은 구체적 탐색이 이루어지도록 지도해야 하고 다음의 단계로 아동은 관찰활동을 통하여 인식하게 된 관계들을 추상화하여야한다. 마지막으로 아동은 인식한 관계들을 공식화 할 수 있어야 한다. 이와 같이 아동의 학습은 구체적인 것에서 일반적, 추상적인 것으로 발전한다. 즉, 교사의 가르침과 아동의 학습은 서로 반대방향으로 전개되어야 한다.

넷째, 활동환경(activity setting)의 설정이다. 아동의 근접발달영역에 상응하는 교사-아동 또는 동료간의 상호작용이 교수-학습의 기본원리이므로 아동의 공동참여를 통한 상호작용의 기회를 극대화하고 아동과 교사와의 교육적 대화를 극대화하는 활동환경을 설정함으로써 아동의 학습을 보조할 필요가 있다.

다섯째, 비감독적 도움을 주어야 한다. 비고츠키의 근접발달영역이론에 의한 수업의 원리에 기초하여 볼 때 효과적인 도움은 권위주의를 필요로 하지 않으며 오히려 참다운 권위는 올바른 가르침에서 비롯된다. 권위적 또는 감독적 요소는 교사와 아동의 상호작용을 위축시켜 효율적인 도움을 주는데 장애가 될 수 있다. 수행보조에 있어서 권위적 요소와 감독적 요소를 제거한 비감독적 보조는 동료 활동 내에서 많이 발견된다.

근접발달영역을 고려한 교수-학습에서의 교사의 역할은 대단히 중요하다. 교사의 역할을 나열해보면 다음과 같다(류성림, 1999).

첫째, 언어를 통해서 아동들과 인지활동의 매체를 공유한다. 여기서 매체는 구체적인 교구나 수학적 표기 등을 그 예로 생각할 수 있다. 아동의 발달이 진행되면 식이나 기호같은 추상적인 지시물이 인지활동의매체가 된다. 다음에는 언어에 의한 상호작용을 통해 아동의 인식을 매체에 집중시키고 그 매체에 관련된 의미를 형성해가게 된다.

둘째, 언어 의사소통을 통해서 개념 발달이 이루어지는 경로나 도달해야 할 종착점의 방향을 잡아준다. 물론 여기에는 소그룹에서의 풍부하고 다양한 수학적 의사소통의 기회를 가지도록 해주어야 한다.

셋째, 아동들과의 학습을 근접발달영역에서 적절한 비계설정을 해준다. 비계설정이 적절하게 이루어지기 위해서는 아동의 발달 수준에 적합한 과제를 선정하여 아동에게 적절한 조절을 제공하는 것이 중요하다. 아동의 발달 수준에 적합한 과제란 아동이 도움을 받아 풀 수 있는 과제를 말하며 적절한 조절을 제공한다는 것은 '아동이 이해할 수 있는 말로 문제를 정의해주기', '어려운 과제에 대해서는 부분적인 해결을 유도하기', '쉬운 과제는 어려움을 체계적으로 증가시키기', '문제를 해결하는데 필요한 지식 및 인지전략 가르쳐주기', '공동활동 중 따뜻하게 반응하기' 등을 들 수 있다.

넷째, 교사는 아동과 함께 절충된 상호주관성을 형성해야한다. 교사는 학생의 수학 학습을 위한 근접발달영역의 최저수준과 최고수준을 가늠하여 알맞은 도움을 제공하며 상호주관성의 형성을 촉진시키기 위해서는 학생들이 가지고 있는 수학적 생각이나 개념 및 경험을 조사하여 활용해야 한다.

마지막으로 교사는 훌륭한 인지적 모델이 되어야 한다. 수학에서 문제 해결 방법을 배울 때 학생들은 교사의 시범을 모델화 함으로써 고등정신기능을 배우게 된다. 교사의 사고과정을 학생이 알 수 있도록 '큰소리로 말하면서' 수학적 과제의 접근 방법에서부터 해결까지의 전과정을 보여주는 것이 하나의 방법이다. 여기서 중요한 것은 교사의 모델링이 반드시 근접발달영역 안에서 이루어져야 한다는 것이다. 그렇지 않으면 학생들은 무관심하거나 단순하고 무의미한 모방에 그치게 되어 학습이 제대로 이루어지지 않게 된다.

5. 근접발달영역에서 비계설정을 통한 교수-학습

가. 비계설정의 구성요소와 목표

근접발달영역에서의 구체적인 교수-학습방법으로 우드등에 의해 소개된 개념이 비계설정이라고 서론에서 언급했다. 비계설정의 사전적 의미인 건물을 지을 때에 비계를 설치하는 것처럼 아동이 새로운 능력을 발달시키고 구축해 가도록 성인은 아동과의 상호작용을 통해 비계를 설치해준다.

우드와 부르너는 비계를 아동이 문제를 해결하도록 어떠한 지지를 제공하는 일련의 과정으로 보았다. 그러면서 아동의 인지발달을 효과적으로 유도하기 위해서는 비계화가 아동이 독자적으로 해결할 수 있는 수준보다 바로 위 수준인 근접발달영역에서 설정되어야 하고 이러한 비계화된 상호작용 내에서 아동의 경험은 후속 발달에 매우 중요함을 강조하였다(한은숙, 1996)

버크와 윈슬러(Berk&Winsler,1995)는 이런 비계의 세 가지 구성요소-공동 문제 해결, 상호주관성, 따뜻함과 반응-와 두 가지의 목표-아동을 근접발달영역에 머물게 하기, 자기 조절 증진시키기-를 다음과 같이 제시하였다.

(1) 공동 문제 해결

비계설정의 첫 번째 구성 요소는 흥미 있고 의미 있는 문제 해결에 대한 아동의 공동참여이다. 참여자들은 성인-아동 또는 아동-아동 집단들 모두 될 수 있다. 중요한 것은 아동들이 누군가와 함께 상호작용하며 목표를 달성하기 위해 애쓰는 것이다. 사람들은 문제에 적극적으로 몰입되어 있는 동안 다른 사람들과 함께 일함으로써 가장 잘 배울 수 있다.

(2) 상호 주관성

좋은 비계 설정의 특징 중에서 상호 주관성(intersubjectivity)은 매우 중요하다. 상호주관성은 어떤 과제를 시작할 때는 서로 다르게 이해하고 있던 두 참여자가 공유된 이해에 도달하는 과정을 말한다. 공동 활동을 하는 동안 진정한 협동을 성취하고 효과적인 의사 소통을 하기 위해서, 참여자는 같은 목표를 향해 일하게 된다. 만약 한 사람이 과제에 대해 다른 사람과 전혀 다른 생각을 하고 있다면, 전자는 후자를 효과적으로 안내할 수 없다. 상호 주관성은 각 참여자가 서로 다른 사람의 관점에 맞추어 조정하는 것이다. 성인은 새로운 과제를 아동이 이해하기 쉽도록 상호주관성을 높이려고 노력한다. 예를 들면, 교사는 새로운 과제와 아동이 이미 알고 있는 것을 연관지어 설명하려 할 것이다. 아동이 교사의 해석을 이해하려고 생각을 전개해 나가면, 교사는 상황에 좀더 성숙하게 접근한다. 요약하면, 비계 설정의 가장 본질적인 요소는 사회적 상호작용에서 참여자들이 아동의 근접 발달영역에 있는 상황에 대한 공통된 의견을 얻기 위해 항상 협의하고 타협하는 것이다.

(3) 따뜻함과 반응

비계 설정의 또 다른 중요한 구성 요소는 상호작용의 정서적인 분위기를 고려하는 것이다. 과제에 대한 아동의 집중과 도전하려는 태도는 성인이 명랑하고 따뜻하고, 반응적일 때 그리고 언어적 칭찬과 적절하게 자신감을 북돋워 줄 때 최대화된다.

(4) 아동을 근접 발달 영역에 머물게 하기

비계 설정의 주요 목표는 아동이 그들의 근접발달영역의 과제를 해결하도록 하는 것이다. 이는 두 가지 방법으로 이루어질 수 있다. 하나는 아동에게 주어진 과제가 적절한 도전적인 수준이 되도록 과제와 주변 환경을 구성해 주는 것이고 다른 하나는 아동의 현재 요구능력에 맞도록 성인의 도움의 양을 조절하는 것이다. 예를 들면 과제와 환경을 구성함에 있어서, 주어진 시간에 가능한 활동들을 마련해 주어 아동의 활동을 구조화시키거나, 아동이 따라야만 하는 적절한 규칙들을 세울 수 있다. 또한 아동에게 지나치게 도전적인 과제는 어려움을 감소시키므로 과제를 작은 단위로 나누거나 과제의 자료들을 재배치하고, 과제가 너무 쉬우면 비계 설정자는 과제에 보다 많은 구성 요소를 첨가시키거나 활동의 규칙을 바꾸어 도전의 정도를 증가시킨다.

유능한 비계 설정자는 협동적 활동을 하는 동안 아동을 그들의 근접발달영역에 머물게 하는 두 번째 방법으로써 아동의 시시각각의 능력과 상응하도록 도움의 양을 조절한다. 아동이 도움이 필요할 때 도와주고 그들의 능력이 증가함에 따라 도움의 양을 줄이는 것이 비계 설정의 가장 일반적인 방법이다.

(5) 자기 조절 증진시키기

비계 설정의 또 다른 목표는 아동이 될 수 있는 한 여러 공동 활동을 조정함으로써 자기 조절을 증진시키는 것이다. 이를 위해 성인은 아동이 독립적으로 문제를 해결 할 수 있게 되면 가능한 한 빨리 조절과 도움을 멈추어야 한다. 이는 아동이 의문점과 문제를 파악하도록 허용하고 곤경에 빠져 있을 때에만 개입해야 하는 것을 뜻한다. 성인 도움이 이러한 특성을 지닐 때, 아동은 충분히 의사 결정과 협동 활동을 이끌어가게 된다.

요약하면, 비계 설정은 교사와 아동이 공동 문제 해결 활동에 몰입하고 있는 동안 따뜻하고 즐거운 협동을 의미한다. 협동하는 동안에 성인은 민감하고도 우연한 보조를 제공하고, 아동은 표상적이고 전략적인 사고를 육성한다. 아동의 기술이 증가하면 과제에 대한 보다 많은 책임을 갖도록 고무함으로써 아동의 자율성을 지원한다.

나. 효과적인 비계설정의 특징

우드(Wood&Wood,1996)는 로고프(Rogoff)가 제시한 효과적인 비계설정의 특징을 다음과 같이 요약하고 있다. 교사는 아동의 현재의 지식과 새로운 과제 사이에 다리를 제공하여야 한다. 아동은 과제가 이미 알고 있는 것과 서로 관련되어 있음을 혼자서 이해하지 못할 것이다. 아동의 활동에 도움을 제공함으로써 교사는 아동의 문제해결을 위한 구조를 제공한다. 아동이 처음에는 스스로 해결할 수 없는 문제로 시작할지라도 도움을 받아 참여함으로써 학습에서 능동적인 역할을 하고 문제를 해결 할 수 있게 된다. 아동을 효과적으로 돕는다고 하는 것은 과제 책무성을 교사로부터 아동으로 옮기는 것을 포함한다. 우드가 제시한 효과적인 도움의 두 가지 요소는 다음과 같다.

첫째는 아동이 어려움에 봉착하게 되면 교사는 즉시 이전에 제공했던 것 보다 더 구체적인 도움을 제공한다. 예를 들어 교사가 말한 바를 이해하지 못한다면 교사는 다음에 할 일을 아동에게 지적하거나 보여준다. 행위를 수반하여 보여줌으로써 말의 의미를 이해하게 하여 교사는 과제와 관련된 언어사용의 의미를 절충하고 아동을 그 상황에 대한 교사의 개념으로 끌어들인다.

두 번째 요소는 점차 도움을 주지 않기(fading)와 최소한의 도움을 제공하기이다. 아동이 과제를 해결하기 위해 도움이 필요하다면, 처음에는 교사는 행위를 수반하지 않은 말로써만 도움을 제공한다. 아동이 언어적 힌트를 이해하게 되면 교사는 도움을 줄이고 아동이 더 이상의 어려움이 없어지면 과제를 끝낼 수 있게 될 것이다.

다. 비계설정 교수-학습 방법

조선미(2001)는 비계설정의 특징을 고려한 교수-학습의 단계를 다음과 같이 설정하였다.

첫 번째 단계는 문제상황제시 단계이다. 즉 학생이 스스로 해결하기 곤란한 점이 있는 근접발달영역 내의 문제를 제시한다. 지나치게 어려운 문제는 도전감을 상실시킬 수 있으므로 적절한 난이도를 유지한다. 교사는 명세화된 목표를 제시하기보다는 폭넓게 목표를 잡아 아동이 스스로 문제속에서 학습의 목표를 찾아내도록 한다.

두 번째 단계는 상호주관성을 확립하는 단계이다. 이 단계에서는 문제 상황에 대해 교사와 학생이 공유된 이해에 도달하는 과정이다.

세 번째 단계는 비계설정을 제공하는 단계이다. 문제를 보고 목표를 설정했으면 구체적인 교수-학습의 전개가 이루어져야 한다. 언어적 상호작용을 통해 문제해결 방향에 대한 상호주관성을 확립하는 것이 우선 요구된다. 학생들의 요구나 인지발달수준에 맞추어 적절한 비계설정을 제공한다. 언어의 거리두기 전략, 모델링, 질문, 힌트주기, 밑줄긋기 등 다양한 도움이 학생들의 수준에 맞게 제시될 수 있다. 그리고 학생들의 학습 상태를 보고 서서히 도움을 줄여 가야한다. 비계설정은 정의적 측면에도 효과를 나타내므로 학생의 반응에 따뜻하게 반응해 줌으로써 학생의 학습의욕을 지속적으로 고취시킨다.

네 번째 단계는 내면화하는 단계이다. 교사의 도움으로 스스로 문제 해결의 방향을 찾고 문제를 해결하는 단계에 이르면 교사는 도움을 중지하고 지식의 내면화를 돕기 위해 비슷한 상황을 제시한다. 만약 문제를 해결하지 못하면 다시 적절한 비계설정을 제공하여 내면화 하도록 한다.

마지막으로 자기반성하는 단계이다. 학생은 이 단계를 통해 자신의 학습과정을 되돌아보고 반성의 기회를

갖는다. 문제 해결에 있어서 비합리적인 방법이나 태도를 반성하여 다음 학습시 오류를 줄인다. 교사 또한 자신의 교수과정을 돌아보고 적절한 비계설정을 제공했는지 또는 학생에게 따뜻하게 반응했는지 반성하여 다음의 교수-학습 과정을 향상시킨다.

라. 비계설정의 교육적 시사점

비계설정의 교육적 시사점은 다음과 같이 살펴볼 수 있다(한순미, 1997).

비계설정을 통한 학습이 아동의 새로운 근접발달영역을 창출하는 현상에 주목해 볼 때, 교육학자, 교사 및 부모는 아동에게 비계 설정하는 방법에 관심을 두게 된다. 비계설정이 적절하게 이루어졌다는 것은 아동의 발달 수준에 적합한 과제를 선정하고 아동에게 적절한 조절을 제공하는 것이다.

피아제는 발달과 학습을 분리하면서 일정한 발달이 이루어진 후 그에 따른 학습이 이루어질 것을 강조한다. 즉 아동의 지적 구조의 발달에 따라 그에 적합한 과제가 따로 있다는 것이다. 반면 비고츠키는 학습이 발달을 주도할 수 있다고 보는 입장으로 "정신지체 아동이 추상적 사고를 할 수 없을 것이라 가정하고 아예 추상적 사고를 가르치지 않는 것은 그로 하여금 천성적인 장애를 극복할 수 없게 할 뿐 아니라 구체적 사고에 배타적으로 습관들게 함으로써 그 아동이 가지고 있던 추상적 사고의 기본조차 억제하여 그의 장애를 강화 시킨다"고 주장했다. 따라서 비고츠키 입장에서 아동의 발달 수준에 적합한 과제를 선정하여 적절한 조절을 제공한다는 것은 성인이 아동의 근접발달영역 안에 있는 과제를 선정하여 성인의 적절한 도움으로 문제를 해결하여 나중에는 아동이 혼자 힘으로 할 수 있게 되는 상태에 이르게 하는 것이다. 이러한 일련의 학습과정은 아동에게는 새로운 근접발달영역을 창출하는 것이다.

복잡한 과제에서 비계설정의 적절성은 과제의 해결에 요구되는 특수한 인지과정 및 전략을 비계 설정자가 아동의 발달 수준을 고려하여 아동이 이해할 수 있는 언어나 기호체계로 제시해줄 수 있는가에 달려 있다. 이는 복잡한 과제일수록 그 과제가 요구하는 특수한 지식, 인지과정, 문제해결 전략에 대해 훈련받은 성인이 훈련받지 않은 성인에 비해 더 효과적인 비계설정자가 될 수 있음을 시사한다. 즉, 훌륭한 비계설정자가 되기 위해서는 과제가 요구하는 특수한 지식, 인지과정, 전략에 능통하여야 한다.

III. 연구 방법

1. 용어의 정의

가. 실제적 발달 수준

학생이 문제를 독립적으로 해결할 수 있는 수준으로 여기서는 학교에서 정기적으로 시행하는 시험 중에서 3학년 1학기 기말고사의 수학 성적을 실제적 발달 수준으로 삼는다.

나. 학업성취도

근접발달영역을 고려한 실제의 교수-학습에서 다룬 32문제를 약간 수정하여 30문항의 검사지를 개발하였고 15문항을 하위문제, 15문항을 상위문제로 구성하여 두 가지 수준으로 나누었다. 30문항의 검사지를 이용한 평가에서의 점수를 학업성취도라 하고, 하위문제에서의 점수를 학업성취도1, 상위문제에서의 점수를 학업성취도2로 한다.

다. 정의적 영역

UCLA대학의 CSE Technical Report 463에서 제시한 설문지를 사용하였다. 이 설문지는 하위 변인으로 계획, 인지전략, 자기점검, 노력, 자기효능감 등의 변인을 포함하고 있는데 이 다섯 가지 모두를 문제해결능력으로 보고 정의적 영역으로 본다.

2. 실험대상

본 연구의 실험대상은 대구 동구 소재 B중학교 3학년 여학생 2개 학급 74명으로 통제집단과 실험집단으로 나누었다. 3학년 1학기 기말고사 수학성적을 실제적 발달 수준으로 보고 3학년 전체 평균점수를 고려하여 60점을 초과하는 학습자를 상위집단, 60점 이하의 학습자를 하위집단으로 나누었다. 통제집단과 실험집단의 구성은 <표 1>과 같다.

<표 1> 통제집단과 실험집단

구 분		인 원	
통제집단	상위집단	23	37
	하위집단	14	
실험집단	상위집단	19	37
	하위집단	18	

근접발달영역을 고려한 학습지도방안이 학업성취도와 문제해결에 대한 태도에 미치는 영향을 알아보기 위하여 본 연구를 <표 2>와 같은 방식으로 진행했다.

<표 2> 실험설계

구 분		사 전	처 치	사 후
학업성취도	통제집단	O_1	X_1	O_2
	실험집단	O_1	X_2	O_2
문제해결에 대한 태도	통제집단	O_3	X_1	O_3
	실험집단	O_3	X_2	O_3

O_1 - 3학년 1학기 기말고사
X_1 - 근접발달영역을 고려하지 않은 학습지도
X_2 - 근접발달영역을 고려한 학습지도
O_2 - 학업성취도 검사
O_3 - 문제 해결에 대한 태도 검사

본 연구에 사용된 검사도구는 크게 학업성취도를 알아보기 위한 도구와 문제해결에 대한 태도를 알아보기 위한 도구로 나누어진다.

가. 학업성취도를 실험하기 위한 도구

학업성취도를 테스트하기 위하여 사전검사와 사후검사를 실시하였다. 사전검사는 2003년 1학기에 실시한 기말고사 수학점수로 하였다. 이 점수를 학습자의 실제적 발달수준으로 보고 통제집단과 실험집단을 각각 상위집단과 하위집단으로 나누었다. 학습자에게 16차시동안 매 차시마다 수준이 상·하인 2문항으로 형성평가를 실시하였고 사후검사는 형성평가시에 사용한 32문항 중 난이도가 하인 15문항(홀수문항), 상인 15문항(짝수문항)으로 총 30문항을 재구성하여 실시하였다. 검사지는 [부록1]에 제시된 16차시의 형성평가지와 유사하므로 참조하기 바란다. 편의상 사후검사를 학업성취도 검사로 하고 이중에서 난이도 하인 15문항을 학업성취도1, 난이도 상인 15문항을 학업성취도2로 하였다.

나. 문제해결에 대한 태도

문제해결에 대한 태도 검사는 UCLA대학의 CSE Technical Report 463에서 제시되어 있는 설문지로 송선희(1999)와 정윤경(2002)이 사용한 것을 이용하였다. 이 설문지는 하위 변인으로 계획, 인지전략, 자기점검, 노력, 자기효능감 등의 변인을 포함하고 있는데 이 변인들은 문제를 해결하는 태도와 관련이 있어서 사용하였다. 그리고 5가지의 변인을 따로 보지 않고 전체를 문제해결에 대한 태도로 보았다. 이 설문지를 사전, 사후에 각각 작성하도록 하여 학습자가 받은 점수를 문제해결에 대한 태도에 관한 사전, 사후검사의 점수로 하였다. 설문지는 [부록2]에 제시해 놓았다.

3. 실험절차

가. 근접발달영역을 고려한 학습지도방안 연구

근접발달영역을 고려한 학습지도방안에 관한 국내의 연구는 유아들의 학습에서 주로 이루어졌고, 이용하는 과제도 실제 교육과정상의 과제보다는 IQ유형의 귀납적 추론과제를 이용한 연구들이 많다. 또 1명의 교사와 다수의 학습자라는 실제 교육현장이 아닌 특수한 상황, 즉 1명의 교사에 1명의 학습자 혹은 소수의 학습자로 구성된 상황에 대한 연구가 많았다. 본 연구에서는 일반적인 학교수업현장에서 이용 가능한 근접발달영역을 적용한 학습지도방안을 연구하고자 하였다.

비고츠키의 주장에 따르면 학습은 근접발달영역에서 이루어져야 효과적인데, 한 학급이 보통 35~40명인 상황에서 학습자 개개인의 실제적 발달수준과 잠재적 발달수준을 고려한다는 것은 한 명의 교사가 감당하기 어려운 일이다. 본 연구는 한 학급을 학습자의 실제적 발달수준을 고려하여 상위, 하위 두 개의 집단으로 나누었다. 그리고 근접발달영역을 고려한 학습지도는 근접발달영역의 측정에서와 마찬가지로 시간이 많이 소요된다는 점과 근접발달영역의 측정과 같은 역동적 평가는 평가가 단지 결과라기보다는 그 자체가 학습의 과정이라는 점을 고려하여 수업전체에 적용하기보다는 수업 중에 실시하는 형성평가시간에 적용하기로 하였다. 본 연구에서는 위의

두 가지 사항을 고려하여 16차시에 걸쳐서 매 차시마다 수준별 형성평가지를 개발하였다. 한 차시에 비슷한 유형이되 난이도가 상·하인 2문제씩을 만들었다. 이 문제가 학습자의 근접발달영역의 문제인지를 알아보기 위해서 실험집단과 통제집단이 아닌 다른 학급의 수업시간 중 형성평가 2문제를 제시하여 학습자들이 어떻게 푸는지를 관찰하였다. 다수의 학습자가 독립적으로 해결할 수 있는 문제는 이미 실제적 발달수준에 있는 문제로 보고 제거하였다. 그리고 연구자와 학습자간에 상황정의가 달라서 문제에 대한 해결전략이 다를 수 있으므로 학습자들이 어떤 부분에서 어려워하는지 어떤 실마리를 이용하여 문제를 푸는지를 관찰한 다음 실험에 사용할 형성평가지의 힌트를 구성하였다. 또한 각 문제에 대한 힌트는 형성평가 시간에 사용할 것이므로 5개씩으로 구성하였다. 힌트의 구성은 이상하(1998)가 근접발달영역을 측정하기 위한 힌트를 구성할 때 사용한 방법으로 Polya의 문제해결 단계를 힌트 구성의 틀로 이용하였는데 <표 3>과 같다.

<표 3> 힌트 구성의 틀

힌트 순서	힌트 내용	Polya의 문제 해결 단계
1	문제를 재정의하는 일반적인 정보	문제이해
2	문제를 해결하기 위한 구체적인 정보	계획수립
3	문제해결과정의 각 단계에 대한 정보	계획실행
4	문제해결의 전체적인 과정/절차 제시	반 성

본 연구에서는 비고츠키의 근접발달영역을 고려한 학습지도를 하기 위해 다수의 학습자의 근접발달영역에 있는 문제로 형성평가지를 개발하였다. 학습자는 실제적 발달수준보다 높은 수준의 문제를 연구자가 제시하는 힌트인 비계를 통해 해결하는 방식의 학습지도방안을 개발하였다. 16차시의 형성평가지는 [부록1]에 제시되어 있다.

나. 학습지도 내용

본 연구에서 사용한 교과서는 실험대상의 학교에서 사용하는 것으로 <수학 9-나, 한서출판사, 황석근·이재돈>이고 단원은 I.통계, II.피타고라스의 정리, III.원의 성질 일부이다. 본 연구에서 차시별로 지도한 상세한 내용은 <표 4>와 같다.

<표 4> 학습지도 내용

차시	학 습 지 도 내 용	교과서(쪽)
1	상관도	9-10
2	상관표	11-12
3	피타고라스정리	22-30
4	피타고라스정리	22-30
5	피타고라스정리	22-30
6	피타고라스정리	22-30
7	피타고라스정리	22-30
8	피타고라스정리의 평면도형에의 활용	32-33
9	피타고라스정리의 평면도형에의 활용-삼각도형	34
10	피타고라스정리의 평면도형에의 활용	34
11	피타고라스정리의 입체도형에의 활용-각뿔	38-39
12	피타고라스정리의 입체도형에의 활용-원뿔	39-40
13	피타고라스정리의 입체도형에의 활용-최단거리	40
14	피타고라스의 정리-단원종합문제	43
15	원과 현	49-53
16	원과 현	49-53

다. 학습지도 절차

실험집단에서 학습지도 절차는 다음과 같이 진행되었다. (1) 본시수업을 정리하는 단계에서 개발한 형성평가지를 미리 지정해 놓은 수학도우미(3학년 1학기 수학시험 만점자 중 한 명)를 통해 나누어준다. 학습자는 자신이 하위집단에 속하면 1번 문제를 상위집단에 속하면 2번 문제를 푼다. (2) 연구자는 수학도우미에게 정답을 미리 알려준다(연구자 혼자서 힌트를 제공하면서 학습자가 푼 것이 정답인지 오답인지를 확인하기는 어렵다). (3) 문제를 다 푼 학습자는 자신의 형성평가지를 앞으로 가지고 나와서 수학도우미 또는 연구자에게 정답인지를 확인 받는다. (4) 정답이면 형성평가지를 제출하고 자리로 돌아가고 오답이면 자리로 돌아가서 문제를 계속 푼다. (5) 적당한 시간-정확히 정해놓은 시간이 아니고 연구자가 문제를 푸는 학습자를 살펴 스스로 풀 수 있는 사람

이 없을 정도에 혹은 학습자들이 문제가 어렵다고 힌트를 달라고 할 즈음에-에 연구자는 구두로 혹은 칠판에 첫 번째의 힌트를 제시한다. (6) 힌트를 제공받은 학습자는 형성평가지의 힌트란에 첫 번째 힌트를 받았음을 표시한 후 다시 문제를 푼다. (7) 다시 (3)의 과정으로 돌아가 (6)의 과정까지를 거치게 된다. 이때 연구자가 제시하는 힌트는 두 번째 것이 된다. (8) 이러한 반복적인 과정을 거쳐서 5개의 힌트가 모두 제시되었는데 문제를 해결하지 못한 학습자는 연구자의 도움을 받는다. (9) 독립적으로 문제를 해결한 학습자는 6점, 매 힌트를 받을 때마다 1점씩 감하여, 마지막 힌트까지 받고 문제를 해결한 학습자는 1점으로 기록한다.

통제집단의 학습절차는 일반적인 학습지도절차를 따라 진행한다. 즉 형성평가문제를 제시하고 학습자가 풀 수 있는 시간을 제공한 뒤 연구자가 풀이를 해준다. 통제집단에서는 맞으면 6점, 틀리면 0점으로 편의상 누가 기록한다.

통제집단과 실험집단의 형성평가는 동일한 시간동안 실시하였다.

라. 사후검사

16차시의 학습지도를 하기 위해 개발한 문항은 난이도가 상인 16문항과 난이도가 하인 16문항으로 모두 32문항이다. 이 중에 2차시 상관표에 관한 문제를 제외한 30문항을 재구성하여 학업성취도에 관한 사후검사지를 만들고 16차시의 수업이 끝난 17차시에 실시하였다. 문제해결에 대한 태도 사후검사는 18차시에 실시하였다.

4. 연구의 제한점

본 연구는 대구시내에 소재하는 중학교 1개교를 연구자가 임의로 선정하였기 때문에 본 연구의 결과를 모든 학생을 대상으로 일반화하는데 무리가 있을 수 있다. 또한 본 연구는 중학교 수학 9-나의 통계 및 도형영역에 한정된 실험이므로 교과 전반에 걸친 결과로 해석하는데 무리가 있을 수 있다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 학업성취도에 관한 결과 분석 및 논의

학업성취도에 관한 결과를 논의하기 전에 통제집단과 실험집단의 동질성을 살펴보았다. 학업성취도에 대한 사전검사인 3학년 1학기 기말고사로 전체학습자의 동질성을 살펴본 결과는 <표 5>와 같다.

두 집단의 동질성 비교는 양측검증이므로 T-검증 결과 유의수준 5%에서 P-value가 0.05보다 크므로 동질집단이라고 볼 수 있다.

<표 5>학업성취도 사전검사에서 전체학습자의 동질성

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	37	59.78	24.89	-.204	72	.839
실험집단	37	60.97	25.36			

T = 검정통계량 T에 의해 계산되어진 결과값
P-value = 검정통계량의 확률값

사전검사 점수로 통제집단과 실험집단 각각을 실제적 발달수준이 상위인 집단과 하위인 집단으로 나누었는데 상위집단과 하위집단의 동질성을 살펴본 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6>학업성취도 사전검사에서 상·하위집단의 동질성

발달수준	집단	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
상위	통제집단	23	76.52	11.96	-1.306	40	.199
	실험집단	19	81.26	11.40			
하위	통제집단	14	32.29	12.79	-1.349	30	.187
	실험집단	18	39.56	16.68			

실제적 발달수준이 상위인 집단은 통제집단과 실험집단의 P-value가 0.05보다 크므로 유의수준 5%에서 동질성을 갖는다. 실제적 발달수준이 하위인 집단도 통제집

단과 실험집단의 P-value가 0.05보다 크므로 유의수준 5%에서 동질성을 갖는다. 즉 통제집단과 실험집단은 전체집단도 유의수준 5%에서 동질성을 갖는 집단이고 상위집단과 하위집단으로 나누어도 유의수준 5%에서 동질성을 갖는 집단임을 알 수 있다.

학업성취도의 사후검사는 30문항으로 이루어져 있는데 15문항을 하위문제, 15문항을 상위문제로 구성하여 두 가지 수준으로 나누었다. 30문항의 검사지를 이용한 평가에서의 30문항에 대한 점수를 학업성취도 전체점수, 15문항의 하위문제에서의 점수를 학업성취도1 점수, 15문항의 상위문제에서의 점수로 학업성취도2 점수로 한다. 이 세 가지의 학업성취도 점수에 대한 결과분석 및 논의는 다음과 같다.

가. 학업성취도 전체점수

(1) 전체집단의 학업성취도 전체점수

통제집단과 실험집단의 실제적 발달수준을 고려하지 않고 전체집단의 학업성취도 전체점수를 비교해 보면 <표 7>과 같다.

<표 7> 전체집단의 학업성취도 전체점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	37	59.62	22.81	-.815	72	.418
실험집단	37	63.86	21.96			

통제집단에 대한 실험집단의 학업성취도가 높은가를 알아보고자 하여 단측검증을 하였으므로 T-검증 결과 유의수준 5%에서 P-value의 절반이 0.05보다 작으면 실험집단이 통제집단보다 높은 점수를 받았다고 할 수 있다. 그런데 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 전체 집단의 학업성취도를 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다. 실험집단이 통제집단보다 평균이 높게 나오기는 하였으나 통계적으로 유의미한 수준이 아니다.

(2) 하위집단의 학업성취도 전체점수

통제집단과 실험집단에서 실제적 발달수준이 하위인 집단의 학업성취도 전체점수를 비교해 보면 <표 8>과 같다.

실제적 발달수준이 하위인 집단에서는 통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 하위 집단의 학업성취도를 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다. 그러나 P-value가 0.110이라는 것은 유의수준을 10%로 보면 근접발달영역을 고려한 학습지도가 실제적 발달수준이 하위인 집단의 학업성취도를 높이는데 효과가 있다고 볼 수 있다. 학업성취도에 대한 사후검사지가 15문항(50%)이 상위 집단의 학습자에게 제시되었던 문제임을 고려해 본다면 유의수준 10%에서 의미있는 결과를 얻었다는 것은 근접발달영역을 고려한 학습지도가 하위집단 학습자의 학업성취도를 높이는데 효과적이라는 하나의 연구가 된다고 볼 수 있다.

<표 8> 하위집단의 학업성취도 전체점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	14	41.50	12.18	-1.646	30	.110
실험집단	18	50.94	18.55			

(3) 상위집단의 학업성취도 전체점수

통제집단과 실험집단에서 실제적 발달수준이 상위인 집단의 학업성취도 전체점수를 비교해 보면 <표 9>와 같다.

실제적 발달수준이 상위인 집단에서는 통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 상위 집단의 학업성취도를 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다.

<표 9> 상위집단의 학업성취도 전체점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	23	70.65	20.69	-.906	40	.370
실험집단	19	76.11	17.73			

나. 학업성취도1 점수

학업성취도 30문항 중 난이도가 하인, 학습지도과정에서 하위집단 학습자들이 풀었던 문제와 유사한 15문항을 100점으로 계산하여 다음과 같이 분석하였다.

(1) 전체집단의 학업성취도1 점수

통제집단과 실험집단의 실제적 발달수준을 고려하지 않고 전체집단의 학업성취도1 점수를 비교해 보면 <표 10>과 같다.

<표 10> 전체집단 학업성취도1 점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	37	69.51	21.93	-1.168	72	.246
실험집단	37	75.19	19.80			

통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 전체 집단의 학업성취도1을 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다.

(2) 하위집단의 학업성취도1 점수

통제집단과 실험집단의 실제적 발달수준이 하위인 집단의 학업성취도1 점수를 비교해 보면 <표 11>과 같다.

<표 11> 하위집단의 학업성취도1 점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	14	52.29	14.57	-2.432	30	.021
실험집단	18	68.22	20.85			

실제적 발달수준이 하위인 집단에서는 통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 작으므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 하위 집단의 학업성취도1을 높이는데 효과가 있다고 볼 수 있다. 비고츠키의 근접발달영역을 적용한 학습지도는 하위집단의 학습자에게 더 도움이 되어왔던 이전의 연구와 일치한다. 하위집단의 학업성취도 전체점수에서는 유의수준 10%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도의 효과를 보았는데, 학업성취도1에서는 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도의 효과를 확인할 수 있다. 이는 하위집단의 학습자는 수업시간에 제공받은 비계(힌트)를 통해서 잠재적 발달수준에 있는 문제를 해결하였고 또 내면화되어 사후 학업성취도1에서 높은 점수를 받은 것이라고 본다.

(3) 상위집단의 학업성취도1 점수

통제집단과 실험집단의 실제적 발달수준이 상위인 집단의 학업성취도1 점수를 비교해 보면 <표 12>와 같다.

<표 12> 상위집단의 학업성취도 전체점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	23	80.00	18.91	-.322	40	.749
실험집단	19	81.79	16.72			

실제적 발달수준이 상위인 집단에서는 통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 상위 집단의 학업성취도1을 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다. 통제집단과 실험집단 모두 평균이 80점 이상이라는 것은 학업성취도1의 대부분의 문제는 상위 집단의 학생의 근접발달영역의 문제라기보다는 이미 실제적 발달수준에 있는 문제라는 것을 의미한다.

다. 학업성취도2 점수

학업성취도 30문항 중 난이도가 상인 학습지도과정에서 상위집단 학습자들이 풀었던 문제와 유사한 15문항을 100점으로 계산하여 다음과 같이 분석하였다.

(1) 전체집단의 학업성취도2 점수

통제집단과 실험집단의 실제적 발달수준을 고려하지 않고 전체집단의 학업성취도2 점수를 비교해 보면 <표 13>과 같다.

<표 13> 전체집단 학업성취도2 점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	37	49.38	25.59	-.434	72	.665
실험집단	37	52.05	27.40			

통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 전체 집단의 학업성취도2를 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다.

(2) 하위집단의 학업성취도2 점수

통제집단과 실험집단의 실제적 발달수준이 하위인 집단의 학업성취도2 점수를 비교해 보면 <표 14>와 같다.

<표 14> 하위집단의 학업성취도2 점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	14	30.50	13.75	-.457	30	.651
실험집단	18	33.33	19.75			

실제적 발달수준이 하위인 집단에서는 통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 하위 집단의 학업성취도2를 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다.

(3) 상위집단의 학업성취도2 점수

통제집단과 실험집단의 실제적 발달수준이 상위인 집단의 학업성취도2 점수를 비교해 보면 <표 15>와 같다.

<표 15> 상위집단의 학업성취도2 점수 비교

구분	인원	평균	표준편차	T	자유도	P-value
통제집단	23	60.87	24.39	-1.250	40	.219
실험집단	19	69.79	21.22			

실제적 발달수준이 상위인 집단에서는 통제집단과 실험집단의 P-value가 0.1보다 크므로 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도가 상위 집단의 학업성취도2를 높이는데 효과가 있다고 볼 수 없다. 평균의 차이가 8.92점이나 되는데도 이러한 이유는 표준편차가 크기 때문이다. 즉 집단속에 상위집단과 하위집단이 혼재되어 있는 양상을 나타내고 있으므로 집단을 조금 더 세분한다면 상위집단에서도 근접발달영역을 고려한 학습지도가 학업성취도를 높이는데 효과적이라고 할 수 있는 결과가 나타날 것이다.

2. 문제해결에 대한 태도변화의 분석

문제해결에 대한 태도검사에 대해서는 사전검사의 값이 사후검사의 값과 어떠한 차이가 있는지를 보았다. 그런데 실험대상이 전-후 두 번 조사된 내용이다. 이는 같은 사람이 응답한 전-후 답안은 서로 그 사람에 의해서 종속적인, 즉 서로 연관성이 있는 자료이므로, 이는 같은 사람의 전-후 결과값의 차이를 가지고 이 값이 "0"인지 아닌지를 가지고 분석을 실시하게 되는데 이때 사용하는 분석이 대응비교이며, 이를 짝진 표본 T-검정(Paired T-Test)이라고 한다. 전-후의 값 차이를 가지고 분석을 실시하게 되므로 대응비교표에는 그 값들의 평균 차이와 표준편차를 비교하게 된다.

문제해결에 관한 태도에 대한 통제집단과 실험집단의 기초통계자료는 <표 16>과 <표 17>에 제시되어 있다.

<표 16> 태도에 관한 통제집단 기초통계

구분	검사시기	인원	평균	표준편차
전체집단	사 전	37	82.97	22.61
	사 후	37	84.51	28.61
상위집단	사 전	23	92.87	20.61
	사 후	23	95.78	29.17
하위집단	사 전	14	66.71	15.45
	사 후	14	66.90	15.26

<표 17> 태도에 관한 실험집단 기초통계

구분	검사시기	인원	평균	표준편차
전체집단	사 전	37	85.86	21.64
	사 후	37	88.81	23.48
상위집단	사 전	19	96.89	13.91
	사 후	19	101.26	18.42
하위집단	사 전	18	74.22	22.53
	사 후	18	75.67	21.27

문제해결에 관한 태도에 대한 통제집단과 실험집단의 사전-사후 대응비교는 <표 18>과 <표 19>와 같다.

<표 18> 통제집단의 사전-사후 대응비교

구분	인원	평균 차이	표준 편차	T	자유도	P-value
전체 집단	37	-1.54	13.19	-.711	36	.482
상위 집단	23	-2.91	14.63	-.955	22	.350
하위 집단	14	.71	10.52	.254	13	.803

<표 19> 실험집단의 사전-사후 대응비교

구분	인원	평균 차이	표준 편차	T	자유도	P-value
전체 집단	37	-2.95	14.98	-1.196	36	.239
상위 집단	19	-4.37	14.30	-1.332	18	.199
하위 집단	18	-1.44	15.94	-.385	17	.705

대응비교 결과 P-value에 의해 유의수준 5%에서 근접발달영역을 고려한 학습지도는 전체, 상위, 하위 각 집단에 대해서 학습자의 문제해결에 대한 태도변화에 영향을 미친다고 할 수 없다. 그러나 본 연구를 통해 긍정적인 변화를 보였으므로 지속적인 지도가 이루어진다면 문제해결에 대한 태도에 변화가 있을 것으로 기대한다.

V. 결 론

비고츠키의 근접발달영역이 학습자의 잠재력을 개발할 수 있는 하나의 이론으로써 관심이 높아지고 있지만 학교현장에서 사용하기에 적합한 구체적 학습지도방안에 관한 연구가 미비한 현실이다. 본 연구에서는 비고츠키의 근접발달영역을 고려한 학습지도방안을 모색하여 그 학습지도방안이 학습자의 학업성취도와 문제해결에 대한 태도에 어떠한 변화를 가져오는지를 알아보고자 하였다.

본 연구는 비고츠키의 근접발달영역을 고려한 학습지도방안으로 실제 수업 중 형성평가시간에 제시하는 수준별 문제에 힌트를 구성하여 학습자에게 적절한 비계를 제공하는 학습지도방안을 모색하였다. 근접발달영역은 학습자의 실제적 발달수준을 고려하여야 하는데 학교현장에서는 개개인의 발달수준을 모두 고려할 수가 없는 제약이 따른다는 점과 근접발달영역을 측정하는 역동적 평가는 평가가 결과라기보다는 과정을 강조한다는 점, 평가 자체가 교수-학습이라는 점, 에 주목하여 위와 같은 학습지도방안을 구성하였다. 16차시에 걸친 형성평가 문제를 제작하고 각 차시의 수준별 2문항에 대한 각각의 힌트를 5개씩 구성하였다. 이 작업은 실험의 대상이 되지 않는 다른 학급에서 예비로 형성평가를 해보고 수정 보완하였다. 통제집단의 학습지도는 한 차시에 형성평가 문제 2개를 제시하고 실제적 발달수준에 따라 자신에게 해당하는 문제를 풀도록 지시한 후 적당한 시간이 지나면 풀이를 하는 방법으로 진행하였다. 실험집단에서는 통제집단에서와 마찬가지로 형성평가 문제를 2개를 제시하고 자신에게 해당하는 문제를 풀도록 지시한 후에 적절한 시간이 경과함에 따라 미리 구성한 힌트를 하나씩 제공하는 방식으로 진행하였다.

학업성취도와 문제해결에 대한 태도의 변화를 알아보고자 사전, 사후 검사를 실시하였고 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학업성취도의 면에서는 선행연구들과 마찬가지로 근접발달영역을 고려한 학습지도는 실제적 발달수준이 하위인 집단의 학업성취도를 높이는데 효과적이라는 결론을 얻었다. 전반적으로 평균이 높으나 통계적으로 유의미한 차이점을 나타내지 않는 것은 표준편차가 크기 때문이다. 그러므로 집단을 조금 더 세분화하여 지속적으로 학습지도를 한다면 학업성취도를 높이는데 효과적일 수 있다. 특히 상위집단에서는 평균이 8.92나 차이가 나므로 집단의 세분화와 적절한 힌트구성으로 학습을 실시하면 학업성취도를 높이는데 효과적일 수 있다.

둘째, 문제해결에 대한 태도변화에서는 근접발달영역을 고려한 학습지도로 유의미한 차이를 보이지는 않았지만, 대체로 본 연구를 통해 긍정적으로 변화를 한 것으로 나타나 좀 더 지속적인 지도가 이루어진다면 학습자의 문제해결에 대한 태도에 변화를 가져올 것이다는 결론을 얻었다.

본 연구의 미비점을 보완하고 보다 나은 후속연구를 위하여 다음과 같이 제언한다.

첫째, 본 연구에서는 근접발달영역에 있는 문제를 선정하는데 주관적인 요소를 완전히 배제하지 못하였으므로 근접발달영역을 측정할 수 있는 객관적인 검사지의 개발이 필요하다.

둘째, 본 연구에서 다룬 소재가 중학교 3학년 교과과정 일부였는데 보다 다양하고 광범위한 영역에서의 후속연구가 필요하다.

셋째, 본 연구에서 근접발달영역을 고려한 학습지도는 실제적 발달수준이 하위집단의 학습자에게 효과적인 것으로 나타났으므로 특별보충수업이나 부진아 수업에 적용한 학습지도방안 개발에 대한 후속연구가 필요하다.

끝으로 본 연구에서 문제해결에 긍정적인 태도변화를 가져왔으므로 보다 장기간에 걸친 연구를 통해 정의적 영역의 변화에 대한 후속연구가 필요하다.

참 고 문 헌

강인애 (1997). 왜 구성주의인가?, 서울: 문음사.

김선옥 (1990). 비고츠키 발달이론에 따른 교사-아동의 상호작용 분석, 부산대학교 유아교육전공 석사학위논문.

곽해진 (2003). 근접발달영역(ZPD) 이론을 적용한 수학적 문제해결 활동에 대한 연구, 서울교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

류성림 (1999). 수학교육에서 피아제와 비고츠키의 사회적 상호작용의 역할에 관한 고찰, 과학 · 수학 교육연구 **제22집**, pp.109-131.

반은희 (2001). 근접발달영역을 고려한 초등학교 수학과 학습지도 방안에 관한 연구, 부산교육대학교 대학원 석사학위논문

송선희 (1999). 근접발달영역을 고려한 교수-학습방법의 효과성 연구, 고려대학교 대학원 박사학위논문.

이상하 (1998). 근접발달영역과 수학성취도와의 관계 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정윤경 (2002). 수학 학습 부진아와 교사의 유관 조절식 상호작용의 효과, 대구교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

조선미 (2001). Vygotsky의 '근접발달영역(ZPD)'이론에 따른 교수-학습 방법 탐색, 인천교육대학교 대학원 석사학위논문.

한순미 (1993). 귀납벽 추론과제에서의 아동의 근접발달대 측정, 숙명여자대학교 대학원 박사학위논문.

한순미 (1997). 아동의 수학적 문제해결에 부모의 비계설정, 초등교육연구 **11**, pp.115-134.

한순미 (1999). 비고츠키와 교육-문화 · 역사적 접근, 서울: 교육과학사.

한은숙 (1996). Vygotsky이론에 의한 성인과 유아의 상호작용과 유아의 문제해결과의 관계, 중앙대학교 대학원 박사학위논문.

허혜경 (1996). Vygotsky의 ZPD이론에 기초한 교수-학습방법, 교육학연구 **34(5)**, pp.311-330.

Berk, L. E. & Winsler, A. (1995). *Scaffolding children's learning: Vygotsky and early childhood education.* 홍용희 역 (1995). 어린이들의 학습에 비계설정-비고츠키와 유아교육. 서울: 창시자.

Bodrova, E. & Leong, D. J. (1996). *Tools of the mind: the Vygotskian approach to early childhood education*, Prentice-Hall. 김억환 · 박은혜 역 (1998). 정신의 도구:비고츠키 유아교육. 서울:이화여자대학교 출판부

Brown, A. L. & Ferrara, R. A. (1985). Diagnosing zones of proximal development. *In Culture, communication, and cognition: Vygotskianper-spectives, ed.* J. Wertsch, pp.273-305. New York: Cambridge University Press.

Missiuna, C. & Samuels, M. (1989). Dynamic as-sessment: Review and critipue. *Special Services in the Schools* **5 (1/2)**. pp.1-22.

Tharp, R. G. & Gallimore, R. (1988). *Rousing minds to life.* New York: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V. (1984). The zone of proximal development: Some conceptual issues. In Rogoff, B. & Wertsch, J. V. (Eds.) *Children's learning in the zone of proimal development.* San Francisco: Jossey-Bass.

Wertsch, J. V. (1985). *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives.* New York: Cambridge University Press.

Wood, D.; Bruner, J. S. & Ross, G. (1976). *The Role of Tutoring in Problem Solving,* Journal of child Psychology and Psychiatry, **17**, pp.89-100.

Wood, D. & Wood, H. (1996). Vygotsky, tutoring and learning. *Oxford Review of Education,* **22(1)**, pp.5-15.

A study of teaching methods in middle school mathematics in consideration of the Zone of Proximal Development

Kim, Sung Kyung

Bulro middle school, Bulro-dong 1010, Dong-gu, Daegu 701-805, Korea

E-mail: biblemany@hanmail.net

Lee, Dong Won

Department of Mathematics, Teachers College, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea

E-mail: dongwon@mail.knu.ac.kr

In this paper we make an experiment in order to test whether the teaching method with the Zone of Proximal Development (ZPD) developed by Vygotsky can be more effective and well applied in the middle school pratices.

Based on this investigation, we conclude that ZPD help to efficiently enhance the study of students, in particular, the inferior student group. Moreover, if we divide the student by more precise groups, the ZPD will be more effective on teaching and learning in middle school. Lastly, we arrive at the conclusion that a continuous teaching with ZPD will improve the student attitude positively in solving mathematical problem even it does not appeared apparently on this test.

* ZDM Classification : C33, C73

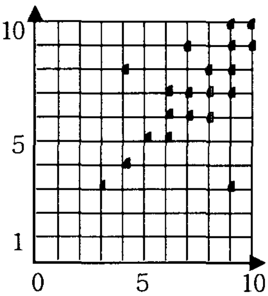
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80

* Key Word : Zone of Proximal Development, Vygotsky's theory, Scaffolding

[부록 1] 16차시 형성평가 문제 및 힌트

1차형성평가 문항 및 힌트.

오른쪽 도표는 학생 20명의 2차에 걸친 영어듣기평가 성적에 대한 상관도이다. 다음 물음에 답하시오.



문제1. 1, 2차 모두 7점 이상인 학생은 전체의 몇 % 인지 구하시오.

문제2. 1, 2차 성적의 평균이 7점 이상인 학생의 평균을 구하시오.

문제1의 힌트와 정답. 정답: 50%

힌트1: 1차 성적와 2차 성적이 동시에 7점 이상인 사람을 찾는다. 힌트2: 1차와 2차에서 성적이 7, 8, 9, 10점인 점을 ○표 와 △표를 각각해서 ○표와 △표가 동시에 표시된 점을 찾는다. 힌트3: 상관도에 1차와 2차에 7점에 해당하는 곳에 각각 보조선을 그어 해당하는 점의 수를 센다. 힌트4: 모두 10명이다. 힌트5: $\frac{10}{20}\times100$.

문제2의 힌트와정답. 정답: $\frac{92}{11}$

힌트1: 1, 2차 시험이 동시에 7점 이상이 아니라 평균이 7점 이상인 점을 찾는다. 힌트2: 예를 들어보면 (7, 7), (8, 6), (8, 7) 이다. 힌트3: 상관도에 힌트2에서 제공한 점을 포함한 영역을 표시해준다. 평균이 7점 이상인 점이다. 힌트4: 평균이 7점인 점이 2개, 7.5점이 1개, 8점이 3개, 8.5점이 1개, 9점이 1개, 9.5점이 2개, 10점이 1개를 가리킨다. 힌트5:

$$\frac{1}{11}(7\cdot 2+7.5\cdot 1+8\cdot 3+8\cdot 5+9\cdot 1+9.5\cdot 2+10\cdot 1).$$

2차형성평가 문항 및 힌트

*다음은 학생 50명의 수학과 과학의 임시시험에 대한 상관표이다. 물음에 답하시오.

수학(점) / 과학(점)	0	1	2	3	4	5	합계
5					G	2	5
4				D	4	E	9
3			7	5	2	F	15
2		3	A	B			11
1		2	3	2			7
0	1	C					3
합계	1	7	14	15	9	4	50

문제1. 두 과목 성적의 합이 7점 미만인 학생은 몇 명인지 구하시오.

문제2. 두 과목의 성적이 상위 34%인 학생들의 과학 성적의 평균을 구하시오.

문제1의 힌트와 정답. 정답: 33명

힌트1: 두 과목 성적의 합이 0점에서 6점까지인 학생을 구하면 된다. 힌트2: 가로의 과학점수와 세로의 수학점수를 더해서 몇 점인지를 계산한다. 힌트3: 상관표에 각 칸에 점수의 합을 기록해보고 그 합이 0~6점인 경우를 찾는다. 힌트4: 문자로 주어진 경우는 가로, 세로의 합계를 이용해서 값을 찾는다. 힌트5: 상관표에서 합이 0~6점인 경우를 모두 ○표 해준다. 그러면 A=4, B=4, C=2 이다.

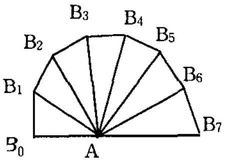
문제2의 힌트와 정답. 정답: $\frac{70}{17}$

힌트1: 상위 34%가 몇 명인지를 구해서 해당 학생들의 과학 성적의 평균을 구한다. 힌트2: 전체 학생수가 50명이므로 34%는 $50\times\frac{34}{100}=17$명이다. 힌트3: 상위 17명이므로 점수의 합계가 높은 학생부터 찾는다. 과학, 수학 모두 5점인 경우가 가장 크다. 힌트4: 도수표로부터 표시해가며 두 과목의 합이 9인 경우는 G+E=3+1; 두 과목의 합이 8인 경우는 4+F=4+1; 두 과목의 합이 7인 경우는 D+2=4+2를 찾는다. 힌트5: 구한 17명의 과학성적의 평균이므로 5점-5명, 4점-9명, 3점-3명의 평균을 구한다.

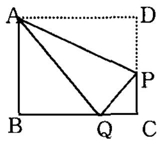
3차형성평가 문항 및 힌트

문제1. 오른쪽 그림에서 길이 $\overline{B_iB_{i+1}}=1\text{cm}$ 이 고, $\angle A_iB_iB_{i+1}=90°$ 일EO $\overline{AB}=\sqrt{3}\text{cm}$ 이다.

$\overline{AB_7}$의 길이를 구하여라.



문제2. 두 변 $\overline{AB}=9$㎝, $\overline{AD}=15$㎝인 직사각형에서 ABCD에서 꼭지점 A를 지나는 직선 AP를 접어 꼭지점 D를 변 BC 위의 점 Q에 겹치게 할 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오.



문제1의 힌트와 정답. 정답: $\overline{AB_7}=\sqrt{10}$㎝

힌트1: 직각삼각형이 7개 연결되어있다. 힌트2: 먼저 길이 $\overline{AB_1}$을 구해야 한다. $\overline{AB_1}^2=1^2+\sqrt{3}^2=4$ 이므로 $\overline{AB_1}=2$. 힌트3: $\overline{AB_2}^2=1^2+\overline{AB_1}^2=1^2+2^2=5$ 이고 $\overline{AB_3}^2=1^2+\overline{AB_2}^2=1^2+5=6$이다. 힌트4: $\overline{AB_4}^2=1^2+\overline{AB_3}^2=1^2+6=7$이고 또다시 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB_5}^2=1^2+\overline{AB_4}^2=1^2+7=8$이다. 힌트5: $\overline{AB_6}^2=1^2+\overline{AB_5}^2=1^2+8=9$이고 또한 $\overline{AB_7}^2=1^2+\overline{AB_6}^2=1^2+9=10$ 이다.

문제2의 힌트와 정답. 정답: $\overline{PQ}=5$㎝

힌트1: 접어서 만든 도형이므로 같은 변이 있다. 즉, $\overline{AD}=\overline{AQ}=15$ 이고 $\overline{PQ}=\overline{PD}=x$ 이다. 힌트2: 피타고라스 정리에 의해 $\overline{BQ}^2=\overline{AQ}^2-\overline{AB}^2=15^2-9^2$. 힌트3: $\overline{BQ}=12$, $\overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=15-12=3$. 힌트4: $\overline{PC}=9-x$ 이고 $\triangle$PQC는 직각삼각형. 힌트5: $3^2+(9-x)^2=x^2$로 써 $9+81-18x+x^2=x^2$이고 $90-18x=0$ 이다.

<u>4차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 직각삼각형의 세변의 길이가 가각 5, 7, a 일 때, a의 값을 구하여라.

문제2. 세변의 길이가 각각 $a+2,\ a-2,\ 20$인 직각삼각형의 최대의 넓이를 구하여라.

문제1의 힌트와 정답. 정답: $a=2\sqrt{6}$ 또는 $a=\sqrt{74}$

힌트1: 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리. 힌트2: 가장 긴 변의 길이가 7인 경우와 a인 경우로 나눈다. 힌트3: I) $5^2+a^2=7^2$ 이거나 ii) $5^2+7^2=a^2$ 이다. 힌트4: I) $a^2=49-25=24$ 또는 ii) $a^2=25+49=74$ 이다. 힌트5: i) $a=\sqrt{24}$ ii) $a=\sqrt{74}$.

문제2의 힌트와 정답. 정답: 480

힌트1: $a+2>a-2$이므로 가장 긴 변의 길이가 20인 경우와 $a+2$인 경우. 힌트2: 20이 가장 긴 변인 경우는

$$(a+2)^2+(a-2)^2=20^2$$

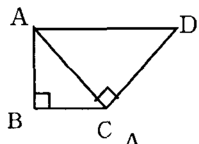
이고 $a+2$가 가장 긴 변인 경우는

$$(a-2)^2+20^2=(a+2)^2$$

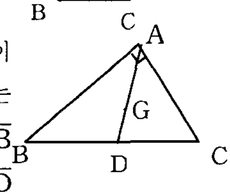
이다. 힌트3: $2a^2+8=400$, $8a=400$ 이다. 힌트4: $a=14$로 세 변의 길이가 16, 12, 20 이거나 $a=50$로 세 변의 길이가 52, 48, 20. 힌트5: 각각의 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times14\times16$ 이고 $\frac{1}{2}\times20\times48$ 이다.

<u>5차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 오른쪽 그림에서와 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=3cm$, $\overline{AC}=\overline{CD}$ 일 때, x값을 구하여라.



문제2. 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$이고 점 G는 $\triangle$ABC의 무게중심이다. $\overline{AB}=12$cm, $\overline{AC}=9$cm일 때, $\overline{GD}$의 길이를 구하여라.



문제1의 힌트와 정답. 정답: 6㎝

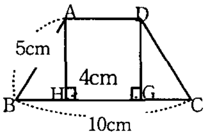
힌트1: $\triangle$ABC는 직각삼각형이고 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$이므로 $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있다. 힌트2: 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=9+9=18$이다. 힌트3: $\overline{AC}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ 이고 $\overline{AC}=\overline{CD}$, $\overline{CD}=3\sqrt{2}$ 이다. 힌트4: $\triangle$ACD는 직각삼각형이고 $x^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$ 이다. 힌트5: $x^2=(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=36$

문제2의 힌트와 정답. 정답: $\frac{5}{2}$㎝

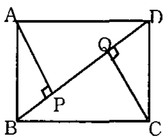
힌트1: △ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스정리. 힌트2: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$이므로 $\overline{BC}=15$ 이다. 힌트3:점 G가 삼각형의 무게중심이므로 $\overline{AD}$는 중선이다. 그러므로 $\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{15}{2}$이다. 힌트4: 점D는 직각삼각형의 빗변의 중점으로 외심이다. 힌트5: $\overline{GD}=\overline{AD}\times\frac{1}{3}$이고 $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{15}{2}$ 이다.

<u>6차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 오른쪽 그림과 같은 등변사다리꼴 ABCD 넓이를 구하여라.



문제2. 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD의 꼭지점 A, C에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자. 선분 $\overline{AB}=3\ cm$ $\overline{AD}=4\ cm$ 이면 $\overline{PQ}$ 의 길이는 얼마인가?



문제1의 힌트와 정답. 정답 : 28㎠

힌트1: 등변사다리꼴이므로 △ABH와 △DCG는 합동. 힌트2: $\overline{BH}=\overline{CG}$이므로 $\overline{BH}=3$. 힌트3: △ABH는 직각삼각형이므로 $\overline{AH}^2+\overline{BH}^2=\overline{AB}^2$, $\overline{AH}^2+9=25$. 힌트4: $\overline{AH}=4$이고 사다리꼴의 넓이 공식을 쓴다. 힌트5: $(10+4)\times4\div2$.

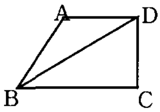
문제2의 힌트와 정답. 정답: $\frac{7}{5}$㎝

힌트1: △ABP와 △CDQ는 합동이다. 힌트2: $\overline{BP}=\overline{DQ}$이고 $\overline{PQ}=\overline{BD}-\overline{BP}-\overline{DQ}$. 직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD}$의 길이를 구한다.힌트3: $\overline{BD}=5$, $\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AP}$.

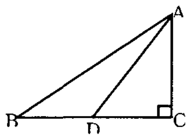
힌트4: $3\times4=5\times\overline{AP}$, $\overline{AP}=\frac{12}{5}$ 힌트5: △ABP는 직각삼각형이므로 $\overline{BP}^2+\frac{144}{25}=9$ 이고 $\overline{BP}=\frac{9}{5}$ 이다.

<u>7차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{DA}=3$ 일 때, $\overline{CD}=x$와 $\overline{BD}=y$의 값을 구하여라 (단, $\angle C=\angle D=90°$)



문제2. 오른쪽 그림의 삼각형 ABC 에서, $\overline{AB}=5$ cm,, $\overline{AD}=3$ cm,, $\angle C=90°$이고 $\overline{BD}=\overline{CD}$일 때, $\overline{CD}=x$와 $\overline{AC}=y$의 값을 구하여라.



문제1의 힌트와 정답. 정답: $x=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{37}$

힌트1: A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 힌트2: $\overline{AH}=\overline{DC}=x$, $\overline{BH}=5-3=2$인 △ABH는 직각삼각형. 힌트3: $x^2+2^2=4^2$, $x^2=16-4=12$이다. 힌트4: $x=\sqrt{12}$ 이고 직각삼각형 △DBC로부터 $y^2=x^2+5^2$. 힌트5: $y^2=12+25=37$.

문제2의 힌트와 정답. 정답: $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{33}}{3}$

힌트1: 삼각형 △ABC와 △ADC는 각각 직각삼각형이다. 힌트2: $\overline{BD}=\overline{DC}=x$ 이고 △ABC에서

$$(2x)^2+y^2=5^2\ \cdots①$$

이고 △ADC에서

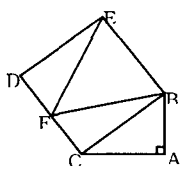
$$x^2+y^2=9\cdots②$$

이다. 힌트3: ①-②로부터 $3x^2=16$이므로 $x=\sqrt{\frac{16}{3}}$.

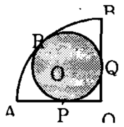
힌트4: $x^2=\frac{16}{3}$이므로 위의 ②식에 대입한다. 힌트5: $y^2=9-\frac{16}{3}$ 이므로 $y=\sqrt{\frac{11}{3}}$.

<u>8차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC는 ∠A=90°, $\overline{AB}=6$cm, $\overline{AC}=8$cm인 직각삼각형이고, □BEDC는 정사각형이다. $\overline{CD}$위에 한 점 F를 잡을 때, △BEF의 넓이를 구하여라.



문제2. 오른쪽 그림에서 원 O′이 반지름이 4cm 인 사분원 O에 내접할 때, 원O′의 넓이를 구하여라. (점 P, Q, R은 사분원 O와 원 O′의 교점이다.)



문제1의 힌트와 정답. 정답: 50㎠

힌트1: △ABC는 직각삼각형. $\overline{BC}$의 길이 계산. 힌트2: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. 힌트3: 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$이므로 $\overline{BC} = 10$이다. 힌트4: □BEDC는 정사각형이므로 $\overline{BC} = \overline{BE} = 10$. 힌트5: △BEF의 밑변이 10, 높이가 10.

문제2의 힌트와 정답. 정답: $(48 - 32\sqrt{2})\pi$㎠

힌트1: 원 O′의 반지름을 r이라 하면

$$\overline{PO'} = \overline{QO'} = \overline{RO'} = r$$

힌트2: ∠O′PO = 90°이므로 △O′PO는 직각삼각형이고 $\overline{PO'} = \overline{PO} = r$, $\overline{OO'} = \overline{OR} - \overline{RO'} = 4 - r$ 이다. 힌트3: $\overline{PO'}^2 + \overline{PO}^2 = \overline{OO'}^2$ 힌트4: 위의 식으로부터 $r^2 + r^2 = (4-r)^2$ 이 되고 $r^2 + 8r - 16 = 0$ 이다. 힌트5: 근의 공식에 의해서

$$r = \frac{-8 \pm \sqrt{64+64}}{2} = \frac{-8 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 4\sqrt{2}$$

인데 반지름은 양수이므로 $r = -4 + 4\sqrt{2}$.

<u>9차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 세 변의 길이가 6㎝, 6㎝, 8㎝인 삼각형의 넓이를 구하여라.

문제2. 세 변의 길이가 8㎝, 10㎝, 12㎝인 삼각형의 넓이를 구하여라.

문제1의 힌트와 정답. 정답: $8\sqrt{5}$

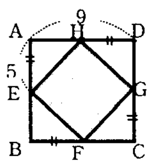
힌트1: (칠판에 주어진 세 변으로 이루어진 삼각형을 그린다.) 주어진 삼각형은 이등변삼각 형이다. 힌트2: 이등변삼각형이므로 밑변에 수선을 내리면 밑변은 수직이등분된다. 힌트3: (삼각형의 수선을 내려 밑변이 수직이등분점을 표시한다.) 밑변이 4㎝인 두개의 변으로 이등분되었다. 이등변 삼각형이 두 개의 직각삼각형으로 나누어진다. 힌트4: 높이를 h라고 하면 $h^2 + 4^2 = 6^2$. 힌트5: $h^2 = 36 - 16 = 20$, $h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{5}$ 이다.

문제2의 힌트와 정답. 정답: $15\sqrt{7}$

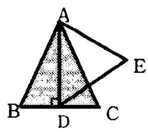
힌트1: (주어진 세 변 중 12㎝인 변을 밑변으로 하는 삼각형을 칠판에 그린다.) 삼각형의 높이를 구해서 넓이를 구한다. 힌트2: 꼭지점에서 밑변으로 수선을 내리면 밑변은 두개의 변으로 나누어진다. 이때 한 변을 x라고 하면 밑변이 12㎝이므로 밑변 중 다른 쪽은 12- x이다. 힌트3: 삼각형 내부에 두 개의 직각삼각형이 있으므로 높이를 h라 두면 피타고라스의 정리로부터 $x^2 + h^2 = 8^2$, $(12-x)^2 + h^2 = 10^2$이다. 힌트4: 위의 두 식으로부터 $x = \frac{9}{2}$. 힌트5: 관계식 $x^2 + h^2 = 8^2$로부터 $x = \frac{9}{2}$를 대입하면 $h = \frac{5\sqrt{7}}{2}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \times 12 \times \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

<u>10차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 한 변의 길이가 9cm인 정사각형 ABCD의 각 변 위에 $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 5\text{cm}$가 되도록 점 E, F, G, H를 잡을 때, □EFGH의 넓이는?



문제2. 정삼각형 ABC의 높이 AD를 한 변으로 하는 정삼각형 ADE의 넓이가 $3\sqrt{3}\text{cm}^2$일 때, △ABC의 넓이는?



문제1의 힌트와 정답. 정답: 41㎠

힌트1: 정사각형 ABCD안에 4개의 삼각형과 하나의 사각형이 있다. 힌트2: 4개의 삼각형에서

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 5\text{cm},$$
$$\overline{HA} = \overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = 4,$$
$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$$

가 된다. 힌트3: △AEH≡△BFE≡△CGF≡△DHG이므로

$$\overline{EH} = \overline{FE} = \overline{GF} = \overline{HG},\ \angle E = \angle F = \angle G = \angle H = 90°$$

가 된다. 힌트4: □EFGH는 정사각형이므로

$$\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AH}^2 = 25 + 16 = 41$$

이다. 힌트5: $\overline{EH} = \sqrt{41}$

문제2의 힌트와 정답. 정답: $4\sqrt{3}$㎠

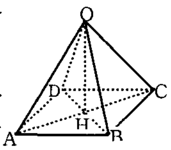
힌트1: 한변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$이고 넓이는 $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$이다. 힌트2: △ADE의 한 변의 길이를 x라면 넓이는 $\frac{\sqrt{3}x^2}{4} = 3\sqrt{3}$이므로 $x^2 = 12$. 힌트3: △ADE의 한 변 $\overline{AD}$는 △ABC의 높이이다. 힌트4: 삼각형 ABC의 한 변을 y라고 두자. 그러면 삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}y}{2} = x = \sqrt{12}$. 힌트5: $y = \sqrt{12} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 4$

<u>11차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 밑면은 한 변의 길이가 8㎝인 정사각형이고 옆면의 모서리의 길이가 9㎝인 정사각뿔의 부피를 구하시오.
문제2. 아래 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12㎝인 정사면체의 부피를 구하시오.

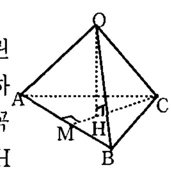
문제1의 힌트와 정답. 정답: $\frac{448}{3}$㎤

힌트1: (칠판에 정사각뿔 O-ABCD를 그린다. 정사각뿔의 수선을 그리며)부피를 구하려면 사각뿔의 높이를 구해야 하므로 꼭지점 O에서 수선을 내려 수선의 발을 H라 하자. $\overline{OH}$의 길이를 구하면 된다. 힌트2: 높이 $\overline{OH}$의 길이를 구하려면 △OAH가 직각삼각형임을 이용하라. 그리고 H는 정사각형ABCD의 대각선의 교점이다.힌트3: $\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AC}$인데 $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$. 힌트4: $\overline{AH} = 4\sqrt{2}$이므로 $\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2$. 힌트5: $\overline{OH} = 7$이므로 뿔의 부피는 $\frac{1}{3} \times 64 \times 7$ 이다.



문제2의 힌트와 정답. 정답: $144\sqrt{2}$

힌트1: (칠판에 정사면체 O-ABC를 그린다. 사면체의 수선을 그리며)부피를 구하려면 사면체의 높이를 구해야 하므로 꼭지점 O에서 수선을 내려 수선의 발을 H라 하자. $\overline{OH}$의 길이를 구하면 된다. 힌트2: $\overline{OH}$의 길이를 구하려면 △OCH가 직각삼각형임을 이용하라. 그리고 H는 △ABC의 무게중심이므로 중선을 2 : 1로 나눈다. 힌트3: 중선 $\overline{CM}$은 한 변이 12인 정삼각형의 높이로써 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$이므로 중선의 성질을 이용하여 $\overline{CH} = \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 힌트4: 직각삼각형의 성질로부터 $\overline{OH}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CH}^2$, $\overline{OH} = 4\sqrt{6}$. 힌트5: 뿔의 밑면은 한 변이 12인 정삼각형의 넓이므로



밑넓이 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 36\sqrt{3}$ 로 부터

$$\text{부피} = \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이}) = \frac{1}{3} \times 36\sqrt{3} \times 4\sqrt{6}$$

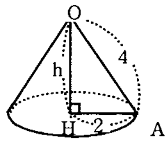
을 얻는다.

<u>12차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 밑면의 반지름의 길이가 2㎝, 모선이 4㎝인 원뿔의 부피를 구하시오.
문제2. 반지름이 15㎝이고 중심각이 120°인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴로 원뿔의 옆면을 만들 때, 이 원뿔의 부피를 구하시오.

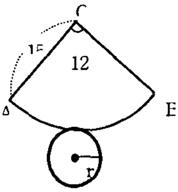
문제1의 힌트와 정답. 정답: $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$(㎤)

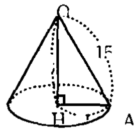
힌트1: (원뿔을 칠판에 그려서 높이를 표시해 주면서) 그림에서 원뿔 h의 높이를 구하고 (부피 = $\frac{1}{3}$ × 밑넓이×높이).
힌트2: △OHA로부터 $h^2 + 2^2 = 4^2$.



힌트3: $h^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$, $h = 2\sqrt{3}$. 힌트4: 밑넓이 공식으로부터 밑넓이는 $\pi r^2 = 4\pi$이다. 힌트5: 부피의 공식으로부터 부피는 $\frac{1}{3} \times 4\pi \times 2\sqrt{3}$ 이다.

문제2의 힌트와 정답. 정답: $\frac{250\sqrt{2}}{3}\pi$(㎤)





힌트1: 원뿔의 밑면의 반지름과 높이를 구해야 한다. 밑면 원의 둘레와 부채꼴OAB에서 호AB의 길이는 같다. 힌트2: 호의 길이는

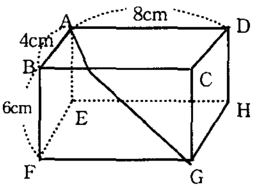
$$\overset{\frown}{AB}=2\pi\times(\text{반지름})\times\frac{(\text{중심각})}{360°}$$

$$=2\pi\times15\times\frac{120}{360}=10\pi$$

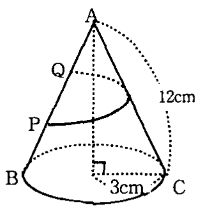
이다. 힌트3: 밑면의 반지름을 r이라 하면 $2\pi r=10\pi$, $r=5\pi$. 힌트4: 원뿔의 높이를 h 라면 $h^2+r^2=15^2$ 이고 $h^2=225-25=200$ 이다. 힌트5: $h=10\sqrt{2}$이므로 부피는 $\frac{1}{3}\times25\pi\times10\sqrt{2}$ 이다.

<u>13차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 오른쪽 그림에서 직육면체에서 점 A를 출발하여 모서리 BC를 지나 점 G에 이르는 최단거리를 구하여라.

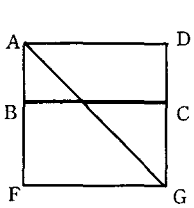


문제2. 밑면의 반지름의 길이가 3cm , 모선의 길이가 12cm인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 모선 $\overline{AB}$를 삼등분하는 점을 P, Q라 할 때, 그림과 같이 면을 따라 점 P를 출발하여 모서리 AC를 지나 점 Q에 이르는 최단거리를 구하여라.



문제1의 힌트와 정답. 정답: $2\sqrt{41}$ cm

힌트1: 전개도를 그려서 푼다. (전개도의 일부를 칠판에 그린다.) 힌트2: 전개도에서 점A에서 $\overline{BC}$와 점G를 지나는 최단거리를 찾는다. 힌트3: 최단거리는 $\overline{AG}$의 길이다.

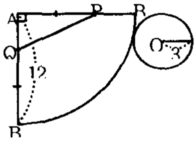


힌트4: △AFE로부터 $\overline{AG}^2=\overline{AF}^2+\overline{FG}^2$. 힌트5: 직각삼각형이므로

$\overline{AG}^2=\overline{AF}^2+\overline{FG}^2=10^2+8^2=164$.

문제2의 힌트와 정답. 정답: $4\sqrt{5}$ cm

힌트1: 전개도를 그려서 푼다. 힌트2: (전개도를 칠판에 그린다.) 원뿔의 전개도의 옆면은 부채꼴이 되고 이 부채꼴에서 P에서 Q에 이르는 최단거리는 $\overline{PQ}$ 의 길이이다. 힌트3: $\overline{AB}=12$이고 이를 삼등분한 점이 P, Q이므로 $\overline{AP}=8$, $\overline{AQ}=4$이다. 힌트4: ∠A의 크기를 x라고 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면 원의 둘레와 같음을 이용하면

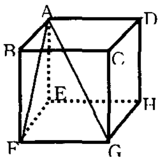


$$2\pi\times12\times\frac{x}{360}=2\pi\times3$$

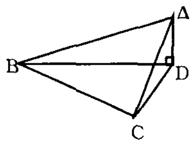
힌트5: ∠A= 90°이므로 △APQ는 직각삼각형이 되고 피타고라스 정리로부터 $\overline{PQ}^2=8^2+4^2$ 이다.

<u>14차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4㎝인 정육면체에서 삼각형 AFG의 넓이를 구하여라.



문제2. 오른쪽 그림과 같이 밑면의 세 변의 길이가 각각 $\overline{BC}=12$㎝, $\overline{CD}=5$㎝, $\overline{BD}=13$㎝ 인 삼각기둥을 잘라서 만든 삼각뿔이다. 잘린 삼각뿔의 높이 $\overline{AD}=4$㎝일 때 단면 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



문제1의 힌트와 정답. 정답: $8\sqrt{2}$㎠

힌트1: △AFG의 세 변의 길이를 모두 구해야 한다. 힌트2: 모서리의 길이가 4인 정육면체이므로 $\overline{FG}=4$, $\overline{AF}$는 정사각형의 대각선이므로 $\overline{AF}=4\sqrt{2}$. 힌트3: $\overline{AG}$는 정육면체의 대각선이므로 $\overline{AG}=4\sqrt{3}$. 힌트4: △AFG의 세 변의 길이가 각각 4, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여 △AFG는 직각삼각형. 힌트5: 삼각형의 넓이는 $4\times4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$ 이다.

문제2의 힌트와 정답. 정답: $6\sqrt{41}$㎠

힌트1: 삼각기둥을 잘라서 만든 삼각뿔이다. △ABC의 세 변의 길이를 모두 구해야 한다. 힌트2: △ADB와 △ADC는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$를 구할 수 있다.

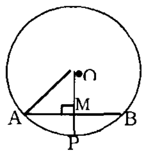
힌트3: $\overline{AB}^2 = 4^2 + 13^2 = 16 + 169 = 185$,

$\overline{AC}^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

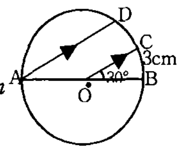
힌트4: $\overline{AB}^2 = 185$, $\overline{AC}^2 = 41$, $\overline{BC}^2 = 144$이므로 $\overline{AB}$가 빗변인 직각삼각형. 힌트5: 삼각형의 넓이는 $12\times\sqrt{41}\times\frac{1}{2}$ 가 된다.

<u>15차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 오른쪽 그림과 같이 원 O에서 선분 $\overline{AB}$와 선분 $\overline{OP}$는 수직이고 선분의 길이가 각각 $\overline{AB} = 8$cm, $\overline{MP} = 2$cm일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하여라.



문제2. 오른쪽 그림에서 선분 $\overline{AB}$ 는 원 O의 지름이고 $\overline{OC}$는 $\overline{AD}$와 평행이다. $\angle BOC = 30°$이고 $\overset{\frown}{BC} = 3cm$일 때, 호 $\overset{\frown}{AD}$의 길이를 구하여라.



문제1의 힌트와 정답. 정답: 5

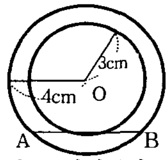
힌트1: 원의 중심에서 현에 수선을 내렸다. 힌트2: 수선은 현을 수직이등분하므로 $\overline{AM} = \overline{BM} = 4$. 힌트3: $\overline{OA} = r$, $\overline{OM} = \overline{OP} - \overline{MP} = r - 2$. 힌트4: 직각삼각형 △OAM로부터 $r^2 = (r-2)^2 + 4^2$. 힌트5: 전개하여 보면 $4r = 20$.

문제2의 힌트와 정답. 정답 : 12㎝

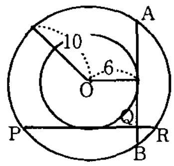
힌트1: 호AD의 길이를 구하려면 ∠AOD를 구해야 한다. 선분 OD를 그으면 평행으로 동위각과 엇각이 같다. 힌트2: ∠DAO = ∠COB=30° (동위각). 힌트3: 반지름이므로 $\overline{OA} = \overline{OD}$이다. △OAD는 이등변삼각형이 되므로 ∠DAO=∠ADO. 힌트4: ∠AOD=180°-30°-30°. 힌트5: 부채꼴의 호의 길이는 중심각에 비례한다.

<u>16차형성평가 문항 및 힌트</u>

문제1. 다음의 두 동심원의 반지름의 길이는 각각 3cm, 4cm이고 현 AB가 작은 원의 접선일 때, 현 AB의 길이는?



문제2. 오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고, 반지름의 길이가 각각 6, 10인 두 원이 있다. $\overline{AB}$는 $\overline{PR}$에 수직이고, $\overline{AB}$와 $\overline{PR}$이 작은 원에 접할 때, $\overline{QR}$의 길이는 ?



문제1의 힌트와 정답. 정답: $2\sqrt{7}$

힌트1: 점 O에서 현AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 힌트2: △OAH는 직각삼각형이다. 힌트3: $\overline{OA} = 4$, $\overline{OH} = 3$, $\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2$, $4^2 = 3^2 + \overline{AH}^2$. 힌트4: 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 $\overline{AH} = \overline{BH}$. 힌트5: $\overline{AH} = \overline{BH} = \sqrt{7}$.

문제2의 힌트와 정답. 정답: 2

힌트1: 원의 중심O에서 현 AB와 현 PR에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. 힌트2: □ONQM에서 $\overline{ON} = \overline{OM} = 6$, $\angle OMB = \angle ONB = \angle NBM = 90°$. 힌트3: □ONQM는 정사각형이고 $\overline{MB} = \overline{NB} = 6$. 선분 OP를 그으면 △OPN은 직각삼각형이다. 힌트4: $\overline{OP} = 10$, $\overline{ON} = 6$, $6^2 + \overline{PN}^2 = 10^2$. 힌트5: $\overline{PN} = 8$, $\overline{PN} = \overline{NR}$.

[부록2] 문제해결에 대한 태도검사지

다음 각 항목을 읽고 수학문제를 풀 때, 여러분들이 일반적으로 어떻게 생각하고 느끼는가를 해당 란에 표시하시오. 한 문제에 너무 많은 시간을 사용하지 말고 평소에 생각을 느끼는 대로 답하시오.

항 목	거의그렇지 않다	때때로 그렇다	자주그렇다	항상그렇다
1. 나는 과제를 시작하기 전에 어떻게 그 과제를 해결할 것인가를 결정한다.	1	2	3	4
2. 나는 과제를 이해하기 위해서, 가능하다면 도표를 그려본다.	1	2	3	4
3. 나는 과제를 해결하면서 내가 제대로하고 잇는지 확인한다.	1	2	3	4
4. 나는 싫어하는 과제도 그것을 해결하기 위해서 노력한다.	1	2	3	4
5. 나는 이 과목에서 좋은 점수를 받을 것이라고 믿는다.	1	2	3	4
6. 나는 과제를 할 때 내가 제대로 하고 있는지를 나 자신에게 질문해 본다.	1	2	3	4
7. 나는 문제를 해결해 가면서 해결과정을 생각해본다.	1	2	3	4
8. 나는 문제해결 과정을 주의 깊게 계획한다.	1	2	3	4
9. 나는 과제를 할 때 최선을 다 한다.	1	2	3	4
10. 나는 이 과목을 위해 읽기 자료로 아무리 어려운 것이 제시되더라도 할 수 있다고 확신한다.	1	2	3	4
11. 나는 과제를 이해한 후, 그것을 해결하려 한다.	1	2	3	4
12. 나는 과제를 해결할 때, 여러 가지 방법을 사용해서 과제를 해결하려고 한다.	1	2	3	4
13. 나는 공부를 하는 동안에 잘 하고 있는지 점검한다.	1	2	3	4
14. 나는 가능한 한 최선을 다해서 과제를 수행한다.	1	2	3	4
15. 나는 이 과목에서 배운 기본 개념들을 이해할 수 있다고 확신한다.	1	2	3	4
16. 나는 거의 항상 내가 앞으로 얼만큼의 과제를 더 해야하는지 안다.	1	2	3	4
17. 나는 과제에 답하기 전에 과제의 의미를 파악해 본다.	1	2	3	4
18. 나는 나의 지식을 향상시키기 위해서 기꺼이 과제와 관련된 다른 자료들을 부한다.	1	2	3	4
19. 나는 질문에 답하기 전에 그 질문의 의도를 이해하려 한다.	1	2	3	4
20. 나는 이 과목에서 선생님이 복잡한 자료를 제시하더라도 이해할 수 있을 것이라고 확신한다.	1	2	3	4
21. 나는 과제를 해결하기 위해서 관련된정보를 선택하고 조직한다.	1	2	3	4
22. 나는 내가 과제를 제대로 했는지를판단해 본다.	1	2	3	4
23. 나는 최대한 주의를 집중해서 과제를해결한다.	1	2	3	4
24. 나는 이 과목의 숙제와 시험을 매우잘 해낼 수 잇다고 확신한다.	1	2	3	4
25. 나는 과제의 목표가 무엇이며 그 목표를 달성하기 위해서 무엇을 해야 하는지를 이해한다.	1	2	3	4
26. 나는 성적에 포함되지 않는 과제라도 열심히 한다.	1	2	3	4
27. 나는 이 과목을 잘 할 것이라고 기대한다.	1	2	3	4
28. 나는 내가 해결해야 할 과제의 해결과 정을 머리 속에 그려본다.	1	2	3	4
29. 나는 어려운 과제일지라도 그것을 이해하려 노력한다.	1	2	3	4
30. 나는 문제 해결과정에서 잘못된 부분을 바로 잡는다.	1	2	3	4
31. 나는 과제를 수행하면서 내 지식이 어느 정도인가 점검한다.	1	2	3	4
32. 나는 이 과목에서 선생님이 가르쳐준 내용을 잘 숙달할 수 잇다고 확신한다.	1	2	3	4
33. 나는 과제를 수행할 때 무엇을 어떻게 해야하는지 이해하고 있다.	1	2	3	4
34. 나는 과제에서 중심내용을 찾으려 한다.	1	2	3	4
35. 나는 과제를 수행해 가면서 내가 올바르게 하고 있는지 점검한다.	1	2	3	4
36. 나는 과제를 수행하는데 무엇이 필요한지 알려한다.	1	2	3	4
37. 나는 이 과목의 수준, 담당교사, 나의 능력을 고려해 볼때,내가 이 과목을 잘 할것이라 생각한다.	1	2	3	4
38. 나는 이 과제를 내가 이미 알고 있는 것과 어떻게 관련시킬 것인가를 스스로에게 질문해 본다.	1	2	3	4
39. 나는 과제를 수행해 나가면서 내가 얼마나 잘 할 수 있을지 스스로 질문해 본다.	1	2	3	4
40. 나는 연습을 통해서 과제를 더 잘할 수 있을 것이라 생각한다.	1	2	3	4