韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 2호, 2005. 7. 453-469

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 2, Jul. 2005. 453-469

수학영재교육 프로그램의 설계 및 교수전략[1]

- 기하학을 중심으로 -

김 창 일 (단국대학교)
전 영 주 (충남과학고등학교)

기하는 수학의 기초를 이루는 중요한 영역이다. 그러나 기하교육을 위한 프로그램 설계와 교수전략에 대한 연구가 부족한 실정이다. 그러므로 현장의 수학교사들에 의한 프로그램개발과 동시에 프로그램과 지도방법을 통합하는 수학교사들의 지속적인 연구가 절실히 요구된다. 이에 본 연구는 영재의 특성들을 고려하고 교사 중심의 강의식 수업보다는 토론, 발표, 세미나에 적합한 프로그램을 구안해 보았다. 프로그램 설계의 내용적 면에서는 기하학의 한 방법인 해석기하학과 현재 고등학교에서 다루는 Euclid 초등기하의 한계를 넘어 공선(共線), 공점(共點)의 비계량적 개념의 사영기하학을 도입하였다. 그리고 프로그램을 운영하는 방법적인 면에서는 문제제시단계, 문제해결단계, 수학적 개념추출단계, 수학화 단계, 확장단계의 단계별 절차를 두었다. 이와 같은 수학영재교육 프로그램의 설계 및 교수전략의 목적은 수학영재들을 새로운 문제와 지식을 제안하고 생산하는 수학 창조자를 만들고자 하는데 있다.

Ⅰ. 서 론

21세기는 노동과 자본이 주된 생산요소였던 산업사회 대신에 '지식'이 생산의 중요 요소가 되는 지식기반사회가 되었다. 이러한 지식은 일상생활과 분리된 학교의 교과서적 지식이 아니라 사회 통합적 지식이며, 새로운 경제에 있어서 단순히 전통적인 생산요소로서의 노동, 자본, 토지와 같은 하나의 자원이라기보다 하나의 의미 있는 자원이 되고 있다. 이런 점에서 지식사회는 지식력(knowledge power)의 강화 요구와 지식정보혁명을 피할 수 없는 대세로 이끌고 있다. 이처럼 급변하는 사회에 대처할 수 있는 방안중의 하나로서 인재육성을 위한 교육패러다임(paradigm)의 변화를 들 수 있다. 이러한 변화는 교육가치 향상 방안(方案)의 일환으로 평등성에서 수월성으로, 평준화에서 개별화로, 전통에서 혁신으로의 교육전환이 이루어져야 한다는 것을 전제로 한다. 또한 교육이 개별차를 인정하는 기본적인 바탕에서 시작하고, 개체의 특성을 고려하여 학습자 모두를 다른 개체성을 지닌 인격체로서 양육해야 한다는 것을 의미한다(전영주, 2004).

이러한 출발선상에서 시작된 영재교육은 국가경쟁력 향상을 위한 고급두뇌 양성이라는 국가적 시스템의 구축차원에서 마련되어지고 있다. 지난 4월 개교한 의정부과학고를 비롯하여 2006년에 개교 예정인 울산과학고를 포함하면 전국에는 18개의 과학고와 1개의 영재학교에서 약 1500명 정도의 학

1) 이 논문은 2004년 한국과학재단 과학고 교육프로그램개발사업비에 의하여 연구되었음.

생들이 체계적인 영재교육을 받게 된다. 또한 2000년 1월에 공포된 영재교육진흥법에 따라 영재학교, 영재학급, 영재원이 운영되면서 영재교육 대상이 고등학생에서 초·중학교 학생까지 확대되고 있다. 그러나 이러한 뜨거운 영재교육의 열기(熱氣)속에서도 그 안을 들여다보면 수학영재교육이 가야할 가시밭길이 보인다. 그것은 경시대회의 과열을 막는다는 취지(趣旨)하에 지난 2004년부터 전국 수학·과학 경시대회의 폐지를 시작으로 도 단위의 경시대회가 축소되거나 폐지되어 수학영재교육 방향에 변화를 요구하고 있어 그동안의 영재교육에 약간의 혼선이 예상되고 있다. 그러나 이보다도 현장에서 직접적으로 수업에 투여할 수 있는 교재나 프로그램의 부족이다. 대학이나 한국교육개발원을 중심으로 프로그램을 개발하고 있으나 이 또한 각 기관에 소속된 영재들의 개인별 수준과 특성을 전체적으로 반영하지 못한다는 점이 있다. 이러한 상황에서 영재교육을 직접 담당하고 있는 현장교사들에 의한 실제적이고 구체적인 수학영재교육 프로그램 개발의 필요성을 재인식하고, 프로그램의 설계 및 교수전략을 검토·수립할 필요가 있다.

본 논문에서는 수학영재의 특성인 고급사고력과 높은 지적욕구, 자율적 탐구 능력에 맞춘 기하학을 중심으로 한 프로그램 설계와 구성되어진 프로그램 활동 속에서 수학영재들이 기하학습을 유용하게 할 수 있도록 하는 교수전략을 제시하였다. 한편, 연구의 결과로서 프로그램의 설계과정과 교수전략단계에서 나타난 문제점을 제시하고 이를 바탕으로 수학영재교육 프로그램 설계 및 교수전략이 나아가야 할 방향을 모색하는데 몇 가지 제언을 하였다.

Ⅱ. 기하 프로그램의 분석

1. 기하교육의 목적과 필요성

눈부신 현대문명들은 자연과학의 발달과 더불어 이루어져왔으며, 자연과학의 발달에는 기초학문으로서의 수학이 크게 기여해 왔다. 특히 기하는 인간의 이성과 치밀한 사고, 엄격한 논리체계를 바탕으로 고대로부터 지금까지 “수학의 꽃”이라 불리 울 만큼 사랑받는 수학의 한 분야로 여겨지고 있다. 플라톤은 이러한 기하의 논리성에 대해 “신은 기하학적으로 생각한다.”라고 하였다. 기하학적인 사고를 익힌 사람은 신과 같이 올바르게 사고하고 판단할 수 있다는 것이다. 기하는 연역적인 추론 방법에 대한 이해뿐만 아니라 사고능력 신장에 대한 기초토대를 마련해 주는 역할을 한다.

루소는 그의 저서인 Emile에서, “나 자신은 Emile에게 기하를 가르치려고 의도하지 않는다. 기하학을 나에게 가르칠 사람은 Emile이다. 나는 관계를 찾을 것이고 그가 그것을 발견할 것이다. 이를테면, 컴퍼스를 이용하여 원을 그리는 대신에 나는 축 위에서 회전하는 실의 끝에 있는 점으로 원을 그린다. 그런 다음 내가 반지름을 서로 비교하고자 할 때, Emile은 나를 보고 웃을 것이고 줄 곧 당긴 같은 실이 다른 거리를 그렸을 리 없다는 것을 이해시켜 줄 것이다(우정호, 2000).”와 같이 Emile 스스로 기하학을 발견하는 가운데 웃음을 보여 줄 것이라고 이야기 한다.

Pestalozzi는 形·數·語의 직관은 모든 인식의 바탕이 되는 기본적인 직관으로 보고, 그 중 形에 의하여 사물을 분류하고, 사물의 공간적인 관계를 파악하고 수적인 관계를 이해하여 사물의 크기와 순서를 알고, 다시 그것을 명확한 언어와 결합하여 안으로는 사물의 명확한 관념을 확립하고 밖으로는 표현능력을 발전시키게 된다고 말하고 있다(우정호, 2000). 形은 사물이 갖는 體이며, 사고(思考)는 體를 인식하며 얻어진다.

이와 같은 입장에서 볼 때, 기하 교육은 매우 중요하며 기하교육의 목적을 '진리 발견'의 관점에서 이야기 할 수 있을 것이다. Euclid 원론 제1권에서 점, 선, 직선, 평면, 평면각, 각, 직각, 둔각, 예각, 원, 삼각형, 정사각형, 마름모, 평행선 등의 용어가 정의되었고, 특히 선(정의 2)과 직선(정의 4)에 관한 정의를 살펴보면 다음과 같다. 선은 폭이 없는 길이이다(A line is breadthless). 직선은 그 위의 점이 같은 모양으로 되어 있는 선이다(A straight line is a line which lies evenly with the points on itself). Euclid의 선에 대한 정의에 의하면 선은 보이지 않는 無形, 無體이다. 그럼에도 불구하고 우리는 '삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다.', '삼각형의 수심, 무게중심, 외심은 동일 직선 위에 있고, 무게중심은 수심과 외심을 2 : 1 로 내분한다.'라는 오일러의 직선 등, 보이지 않는 실체를 사고(思考)를 통해 거리낌 없이 마음속으로 받아들이고 있는 것이다. 결국 기하는 사고(思考)의 시작이며 토대로서 마음속에 묻어 둔 '진리의 눈'을 뜨게 만든다.

2. 수학영재를 위한 기하교육의 실태 및 대안

7차 교육과정에서 다루는 중·고등학교 기하 영역에서의 내용을 차례로 간단히 살펴보면 다음과 같다. 7단계에서는 기본적인 도형인 점, 선, 면, 각에 대한 간단한 성질을 파악하고 삼각형의 합동조건을 이해하며, 평면도형과 입체도형의 성질을, 8단계에서는 삼각형과 사각형의 성질, 도형의 닮음, 닮음의 응용을, 9단계에서는 피타고라스의 정리와 그 활용, 원과 직선, 원주각을, 10 단계에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동에 대하여 학습한다. 수학Ⅱ에서는 이차곡선에서 포물선, 타원, 쌍곡선을, 공간도형에서 직선, 평면의 위치 관계, 평행과 수직, 정사영을, 공간좌표에서 점의 좌표, 두 점 사이의 거리, 선분의 내분점과 외분점, 구의 방정식을, 벡터에서 벡터의 연산, 벡터의 내적, 직선과 평면의 방정식에 대하여 학습한다(교육부, 2001).

이처럼 현재 학교에서 다루는 기하는 Euclid의 초등기하로서 선분의 길이, 각의 크기, 평면도형의 넓이, 입체도형의 부피, 선분의 비와 같은 계량적인 것을 다루고 있다. 그것은 도형을 서로 비교하고, 그 결과 어떤 도형끼리 같은지 또는 같지 않은지를 알아보는 일이라고 할 수 있다. 그러나 Euclid 기하가 계량적인 것을 다루다보니 다른 조건이 주어진 공간에서는 유클리드 공간에서 갖고 있었던 도형들의 독특한 성질들이 어떻게 변할 것인가? 하는 의문을 발생시켰다. 여기서 유클리드 기하의 한계를 발견할 수 있다. 더욱이 Euclid 기하가 갖고 있는 결합들, 예를 들어, 무정의 용어를 인정하지 않은 것, '직선을 연장할 수 있다는 것'과 '직선의 크기가 무한하다'는 것은 그 개념이 다른데도 이것을 같은 의미로 혼동하고 있는 것, 도형의 이동 가정, 그리고 순서의 개념을 무시하여 '모든 삼각형

은 이등변삼각형이다', '직각의 크기는 직각보다 조금 큰 각의 크기와 같다'는 Paradox의 파생 등 도처에서 발생하는 문제들은 지금껏 학교 기하수업에서 간과되어 왔다.

또한, 지금까지 중 · 고등학교 영재를 대상으로 한국교육개발원이 개발한 기하학과 관련된 프로그램을 살펴보면, 기하의 세계(1998), 교육청 영재교육 심화 교수-학습자료 중3수학(2002), 교육청 영재교육 심화 교수-학습자료 삼각형의 마음(2004)이 있다. 이들의 구체적인 수업전개 방식 및 활동명, 주요 수업형태, 제시된 차시는 아래 <표>와 같다.

<표> 기하학과 관련된 프로그램(한국교육개발원)

	기하의 세계	교육청 영재교육 심화 교수-학습자료 중3수학	교육청 영재교육 심화 교수-학습자료 삼각형의 마음
수업전개방식 및 활동명	[정리1] 평면기하 [정리2] 입체기하 [활동1] 평면도형 [활동2] 도형의 이동 [활동3] 대칭성 [활동4] 시각적인 접근 [활동5] 확률의 기하학적인 접근 [연습1] 기본연습문제 [연습2] 심화연습문제	[1단계] 계획하기 원뿔곡선 발견하기 [2단계] 지식 및 기능습득하기 직접 만들어보는 원뿔곡선 컴퓨터로 만드는 원뿔곡선 [3단계] 수행하기 원뿔곡선 관련 논증하기 [4단계] 발표 및 평가/반성하기 주제보고서 및 아이디어 제안서 발표하기	[1단계] 계획수립하기 균형잡기가 힘들어요 삼각형의 마음 엿보기 [2단계] 지식 및 기능습득하기 삼각형의 마음 확인하기 삼각형의 마음 연결하기 [3단계]수행하기 삼각형의 마음 넓히기 (연구보고서 발표 및 평가)
주요 수업형태	[정리1] 그림 그려서 이해하기 [정리2] 입체도형 그리기 입체도형 상상하기 [활동1,2,3,4,5] 도형의 성질 적용하여 문제풀기 [연습1,2] 문제풀기	[1단계] 원뿔곡선 만들기 [2단계] GSP 조사해오기 GSP 이용 원뿔곡선 작도 [3단계] 원뿔곡선 논증해보기 [4단계] 주제보고서작성해오기 반성하기	[1단계] 개인실험, 모듬활동, 전체토론, 조별발표, 조사활동, 교사강의 [2단계] 개인실험, 모듬활동, 전체토론, 조별발표, 조사활동, 교사강의 [3단계] 모둠활동, 조별발표 전체토론, 평가활동
제시된 차시	26차시	14차시	10차시

<표>를 통해 알 수 있듯이 한국교육개발원이 개발한 프로그램들의 전개방식은 대체로 단계별 형태를 띠고 있으며, 수업형태는 학생들의 활동을 통한 문제해결이다. 여기서 다음과 같은 몇 가지 시

사점을 얻을 수 있다. 첫째, 프로그램 설계를 하면서 우선 고려해야 할 것이 교사지도와 학생 활동 간의 적절한 배합이다. 교사의 지도를 최소한으로 하고 학생들의 활동을 장려하여 학생들이 독립적이며 독창적인 문제 해결자가 되도록 지도하여야 한다. 둘째, 수학영재들에게 확장된 기하학의 세계를 엿볼 수 있게 해 준다. 그들은 이미 학교에서 가르치는 내용들을 습득하였거나 적은 시간 내에 학습을 마칠 수 있기 때문이다. 셋째, 학습 내용에 따른 적절한 지도방법을 구안해야 한다. 학습내용과 지도방법, 이 두 가지를 하나의 틀로 이해해서 학생들이 기하학습을 유용하게 할 수 있도록 전략을 수립해야 한다.

이러한 상황적 근거들은 수학영재를 위한 기하교육의 내용과 지도방법에 대한 깊이 있는 성찰이 필요함을 간접적으로 시사한다 하겠다.

수학적으로 재능이 있는 영재는 광범위한 수학적 기능을 가지고 있기 때문에 프로그램 구성에 있어 그러한 기능을 가지고 있지 못하는 평재를 지도하는 것과는 다른 방법적 설계와 교수전략이 필요하다. 이것을 수학적 재능이 뛰어난 영재의 재능 발달과 그들의 수학학습에 대한 성취욕을 만족시키기 위한 두 가지 측면에서 생각할 수 있다. 즉, 수학영재에게 필요한 것은 과중한 훈련과 연습이 아니라 발견적 접근, 통합적 통찰을 할 수 있도록 하는 프로그램 설계와 교수전략 수립이다. 결국은 이러한 것들을 통해 수학영재들을 우수한 문제 해결자의 양성 그 이상으로, 새로운 문제와 지식을 제안하고 생산하는 수학 창조자가 되도록 육성하고자 하는데 있다.

수학영재들은 대개 기하에 대한 강한 지적 호기심을 지닌다. 그것은 기하학이 품고 있는 "수학의 원리"에 매료되기 때문이다. 영재들이 보이는 이러한 태도들을 수학교사들이 놓쳐서는 안 된다. 오히려 이러한 기회를 살려 영재들이 수학의 기초인 기하를 좀 더 넓게 좀 더 깊이 학습할 수 있도록 도와주어야 한다. 한 가지 방법으로 한 직선 위에 있다든가, 직선이 한 점을 지난다든가하는 공선(共線), 공점(共點)의 비계량적 개념을 학습할 수 있도록 하여 Euclid 기하의 한계를 뛰어넘는 심화된 기하학인 평면사영기하학을 다루어 보도록 해 주는 것이다. 이때 사영기하학은 기하학의 한 분야로, 해석기하학은 기하학의 한 방법(Eves, 1998)으로서 두 기하학을 동시에 접근하는 것이 필요하다.

Ⅲ. 프로그램 설계 및 교수전략2)

수학영재교육 프로그램의 설계 및 교수전략에 있어 두 가지를 고려하였다. 하나는 무엇을 가르칠 것인가에 관련되는 내용 요소로, 유클리드 공간에서 도형들 사이에 형성되는 관계나 모양 그리고 성질에 이르기까지 Cartesian 좌표를 해석적으로 연구하는 한 방법인 해석기하학(Analytic geometry)과 사영평면을 정의하고 그 안에서 형성되는 기하학적 성질을 대수적 방법으로 해결하는 방법인 사영기하학(Projective geometry)을 심도 있게 다루는 것이었다. 다른 하나는 어떻게 가르치고 어떻게 학습

2) 본 논문의 프로그램설계와 교수전략은 충남과학고 수학반 12명(2학년)을 대상으로 2004년 5월부터 2005년 2월까지 10개월간 연구되었음.

하는가에 관련되는 과정 요소로, 제한된 시간 내에 교육효과를 달성하기 위하여 압축된 교육과정을 적용하고 보다 비 구조화된 문제를 사용하여 그 문제를 해결하는 과정에서 수학영재 스스로 필요한 수학적 사실을 구성할 수 있도록 프로그램을 조직하는 것이었다.

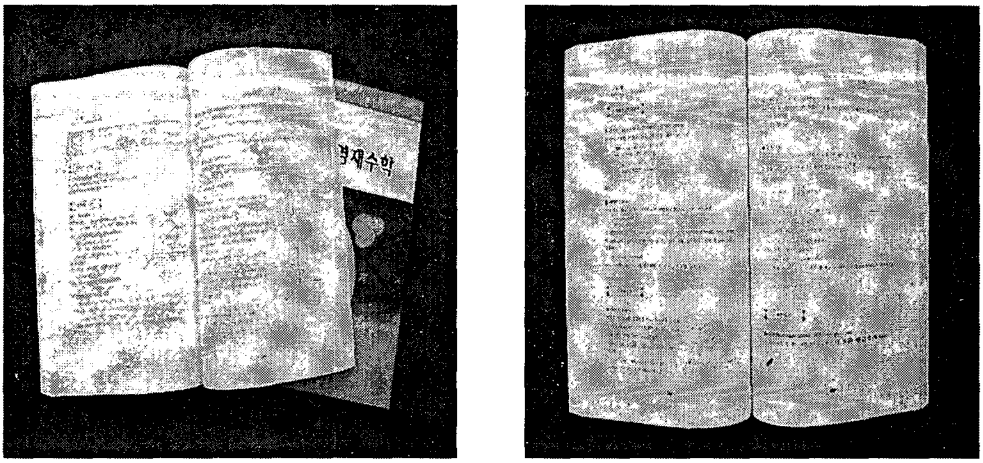
프로그램은 총 16차시 분(1차시는 2시간)으로 설계되었으며 구체적인 내용은 다음과 같다.

1) 해석기하학

제 1차시부터 5차시까지는 점과 직선, 그리고 원추곡선의 성질에 관하여 제시하고, 제6-8차시에는 유클리드 공간에서 점과 직선, 그리고 평면 사이의 관계에 관하여, 제9-10차시에는 이차곡면, 특히 구면, 타원면, 쌍곡면, 포물면, 선직면에 관한 기하학적 성질들에 관하여 기술하고, 그 이차곡면들을 분류하는 방법을 제시하였다.

2) 사영기하학

제11-12차시에는 결합기하학을 소개하면서 아핀평면과 사영평면을 도입하여 이에 관한 공리체계를 확립하고 그 안에서 기하학의 성질들에 관하여 제시하였다. 제13-14차시에는 공선변환(Collineation)으로 한 직선으로부터 또 한 직선으로 보내주는 함수를 정의하고, 그러한 함수들의 특성에 관하여 제시하였다. 제15-16차시에는 Desargues 평면과 Pappus 평면을 정의하고 그 평면에서 형성되는 유익한 기하학적 성질들을 제시하였다.



<그림 1> 개발된 프로그램[3]

프로그램을 설계하면서 그에 따른 교수전략을 함께 수립하기 위해 프로그램을 각 차시별 문제제시단계, 문제해결단계, 수학적 개념추출단계, 수학화 단계, 확장 단계, 창의성 문제와 같은 절차적 구성으로 조직하였으며, 단계별 구체적인 실천 내용은 아래와 같다.

3) 프로그램의 구체적인 내용(16차시 중 12차시 내용으로)은 부록으로 제시하였다.

1) 문제제시단계

이 단계에서는 학습목표를 달성하기 위해 알아야 하는 구체적인 학습과제를 제시하였다.

2) 문제해결단계

이 단계에서는 문제제시단계에서 제기된 구체적 과제에 대한 기초 지식과 해당차시에서 꼭 파악하고 있어야 하는 내용들을 필수예제(문제)로 두었다. 이 단계에서 교사의 최소한의 지식전달이 이루어졌다.

3) 수학적 개념추출단계

수학적 개념추출단계는 학생이 해결한 문제로부터 해결방법과 사용한 개념들을 분석하는 단계로서 수학적으로 유의미한 개념들을 명확하게 하고 그 개념을 관련된 개념과 연결하여 새로운 개념구조를 조직하였다.

4) 수학화 단계

추출된 개념을 바탕으로 관련된 수학적 구조를 조직하는 단계로, 기존의 수학적 구조가 될 수도 있고 새로운 구조로 발전 될 수 있도록 학생들을 유도한다. 따라서 교사는 여러 가지의 추출물을 기존의 개념과 결합하고 재구성할 수 있도록 예상되는 구조를 미리 파악하고 있었다.

5) 확장 단계

수학화 단계에서 조직된 개념을 한 차원 높게 확장하는 활동이 이루어졌다.

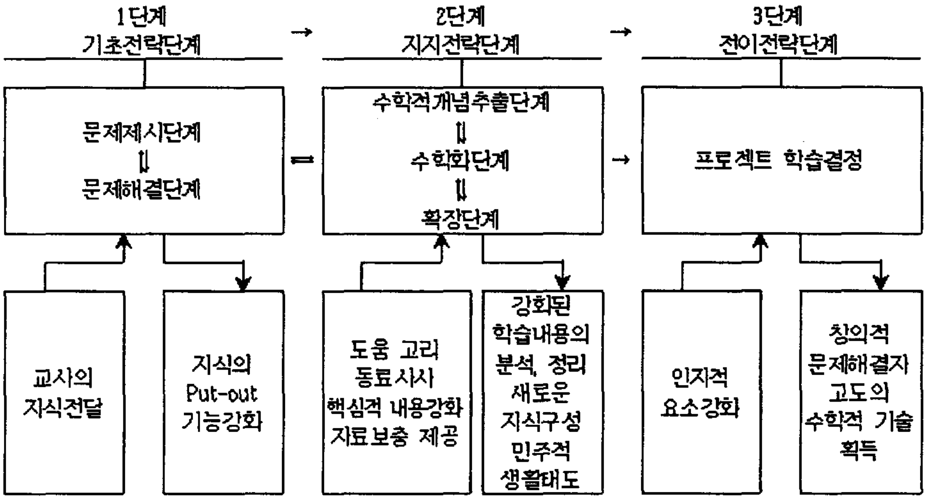
6) 창의성 문제

각 차시의 프로그램 마무리에 사고와 문제 접근에 있어서의 독창성과 융통성, 그리고 기하영역에 있어서 호기심과 모험심을 발휘할 수 있는 창의성 문제를 두었다.

이와 같은 각 단계별 절차는 동시 다발적으로 이루어지고 각 영재들의 발달단계와 능력 수준을 고려하여 프로그램이 진행되었다. 또한, 프로그램 진행과정에서 사용한 교수전략은 기초전략단계(draft Strategies Step), 지지전략단계(Supportive Strategies Step), 전이전략단계(transference Strategies Step)가 있다.

1단계인 기초전략단계에서의 교수전략은 영재들은 통찰과 원리의 이해가 빠르며 하나의 사물과 사건을 통해서도 일반 학생들보다 많은 것을 느끼고 이해한다. 이러한 영재들의 특성이 발휘되도록 하기 위해 그들이 갖고 있는 기존의 많은 정보를 조직하고 분류하고 일반화할 수 있도록 교사의 최소한의 지식전달 과정이 이루어졌다. 1단계 교수전략은 문제제시단계와 문제해결 단계에서 적용되었고 지식의 Put-in 보다는 Put-out에 중점을 둔 교수전략단계이다. 2단계 지지전략단계에서의 교수전략은 학생들 상호가 도움 고리(loop)가 되어 수학적 개념과 지식을 확장하여 어려운 과제도 해결할 수 있도록 이끄는 단계이다. 영재들 스스로가 교사를 돕는 동료 Mentor로서 서로의 지적 자극을 이끌어 내고 교사는 보충자료를 제공함으로써 학생들이 학습내용을 분석, 정리, 새로운 지식까지 구성할 수 있도록 도와주었다. 2단계는 수학적 개념추출단계, 수학화 단계, 확장 단계에서 적용되었다. 3단계 전이전략단계에서의 교수전략은 앞선 인지적 요소를 더욱 강화하고 독립적인 연구기술 발달을

목적으로 두었다. 즉, 영재 스스로 프로젝트 문제를 정하고 책과 다른 자료, 발견의 해석 등을 통해 창의적인 문제해결자로서의 성장에 초점을 두어 고도의 수학적 기술을 얻을 수 있도록 도와주었다.



<그림 2> 프로그램의 설계 및 교수전략

Ⅳ. 결론 및 제언

기하학은 수학의 꽃이다. 이러한 신선하고 아름다운 기하의 성질들을 학생들이 마음껏 느끼도록 하기 위한 기하프로그램 설계 및 교수전략 수립과정에서 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 프로그램 설계에 있어 흩어져 있는 별개의 학습 요소들을 찾아 통합하는 작업이 우선적으로 선행되어야 한다. 예를 들어 파스칼과 브리앙송 정리 사이의 주목할 만한 유사성에 주의를 기울여 보면 두 정리는 짝을 지어 각각은 다른 것과 닮게, 말하자면 구조적으로 같게 나타나는 쌍대성 (duality)이 있다.

둘째, 영재의 특성과 그들이 학습하는 진행정도에 따라 학습내용이 유기적으로 작용하고 결합할 수 있는 교육 프로그램으로 설계되어야한다. 예를 들면 파스칼과 브리앙송의 정리가 쌍대라는 사실을 통해 다른 정리들, 체바의 정리와 메넬라우스의 정리 등도 서로 쌍대라는 사실을 찾아낼 수 있도록 프로그램의 조작적 작업이 필요하다.

셋째, 탐구활동 속에서 학생들의 지적 호기심 유발과 과제 집중력을 높여 주고, 지적인 성취감을 느낄 수 있는 교수전략이 수립되어야 한다. 예를 들어 산술적인 항등식 $2\cdot3+1\cdot4-5\cdot2=0$은 점 $(3,4,2)$가 직선 $(2,1,-5)$위에 있다고 해석할 수도 있고 또는 점 $(2,1,-5)$가 직선 $(2,1,-5)$ 위에 있다는 의미로 해석될 수도 있다는 것을 기초전략단계에서 교사의 지식전달과정에 포함시키는 것이다.

넷째, 지지전략단계에서 거치게 되는 협동학습에서 도움 고리 사이에 활발한 동료사사가 이루어지도록 하며, 이 과정에서 다른 사람의 의견을 존중하고 서로 협동하는 등의 민주적 생활 태도를 함양시키는 교수전략이 필요하다.

다섯째, 수학영재들이 영재교육 프로그램의 설계 및 교수전략의 최종 목표인 창의적인 문제해결자로 성장할 수 있도록 자연스러운 단계향상의 전이(轉移)를 돕는다.

여섯째, 프로그램 설계는 전체 숲을 볼 수 있도록 구성해야한다. 예를 들어, 쌍대를 다루기 위해서는 유클리드 기하, 아핀 기하, 사영 기하의 개념과 내용을 충분히 학습한 후 쌍대에 대한 학습이 이루어져야 한다. 사영기하학에서는 '쌍대(双對)의 원리'를 빼놓고 이야기 할 수 없다. 그것은 이 원리가 사영기하학의 근본 사상이기 때문이다. 따라서 내용의 연계성을 체계적으로 설계하여 학습을 강화시켜야 한다.

또한 본 연구를 통해서, 프로그램을 설계할 때는 학생의 수준, 흥미에 맞추어 학습내용이 적절하게 혼합되어야 한다는 것, 그리고 영재들은 일반적으로 자기 주도적이고 도전적이므로 수업이 우연하게 이루어지도록 프로그램이 조직되어야 한다는 과제를 남겨둔다. 또한, 영재들의 맹목적인 속진학습은 그들의 창의성을 떨어뜨리게 된다. 그것은 속진을 하기 위해서 교사들의 지나친 간섭이 뒤따르게 되기 때문이다. 이러한 이유에서 영재교육을 위한 프로그램 설계는 속진과 심화학습의 병행이 바람직하다. 그리고 영재교육 프로그램 설계에서 교사는, 정형화된 문제나 틀 보다는 개방적이고 비 구조화된 자료 제시와 프로그램 진행시 학습자의 반응에 적절하게 대처하는 교수전략이 요구된다. 이것은 지도방법과 학습내용에 대한 전문적인 능력을 갖추어야 가능하다. 따라서 영재교육 담당교사들은 자기연찬을 성실하게 이행하고 영재교육기관에서는 영재교육을 담당한 교사들에게 개발된 자료와 연수기회를 풍부하게 제공해야 한다.

참 고 문 헌

교육부 (2001). 수학 고등학교 교육과정 해설서, 서울: 대한교과서주식회사.

우정호 (2000). 수학 학습지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판부.

전영주 (2004). 미성취 수학영재의 특성에 따른 진단-처방적 교육방법에 관한 연구, 단국대학교 박사학위논문.

한국교육개발원 (1998). 기하의 세계, 수탁연구 CR98-18-26, 서울: 한국교육개발원.

____________ (2002). 영재 심화 교수-학습 자료 중등수학 3학년용(교사용 지도서) 서울: 한국교육개발원.

____________ (2004). 삼각형의 마음, 수탁연구 RM 2004-45-19, 서울: 한국교육개발원.

Howard Eves (1998). 수학사(이우영 · 신항균 역), 서울: 경문사.

[부록] 프로그램 내용(12차시)

[부록] 프로그램 내용(12차시)

지도일시	년 월 일 요일	대 상	수학반	지도차시	12
교 과	기하학	대영역	사영기하학		
학습주제	동형사상과 쌍대				학습모형
학습목표	· 동형사상과 쌍대에 관한 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.				

문제제시단계

▶ 동형사상이란 무엇인가?

▶ 쌍대란 무엇인가?

☞ 유클리드기하학에서 다루는 도형은 이동해서 서로 겹치기만 하면 "같은 것=합동" 으로 간주한다.

☞ 「여러 가지 변환에 따르는 기하학의 특징적인 성질을 표현한다」 라는 구상 아래, 아핀변환에 의해 변하지 않는 기하학의 이론을 '아핀기하학' 이라고 부른다. 합동변환 변환(이동) f 의 성질 중 (ⅰ), (ⅱ)의 두 가지 조건만 갖추면 된다. 즉, 평행투영에 의한 변환을 아핀변환이라고 한다.

(ⅰ) 1 대 1의 점대응(點對應)

(ⅱ) 선분(또는 직선)은 선분(또는 직선)에 대응

☞ 평면사영기하학에서 쌍대라 함은 점은 직선으로, 직선은 점으로 바꾸는 것을 말한다. 가령 「서로 다른 두 점은 한 직선을 결정한다」 의 쌍대는 「서로 다른 두 직선은 한 점을 결정한다」 이다. 이것은 사영기하학에서는 성립하나 유클리드기하학에서는 성립하지 않는다.

문제해결단계

◑ 기초학습

현재의 기하 교과서의 원형이라 할 수 있는 유클리드의 <원론>에는

「선은 폭이 없는 길이이다」 (제 1권, 정의 (2))

「둔각이란 직각보다 큰 각이다」 (동 (11))

「예각이란 직각보다 작은 각이다」 (동 (12))

는 등의 명제가 나오는데, 이것은 선분이나 각이 저마다 '길이' 와 '크기' 를 지닐뿐더러, 도형을 이동 시킨다고 해서 이것들이 변화되는 일이 없으며, 따라서 그 개소를 비교하기 위하여 도형을 이동 시켜도 된다는 것을 전제로 삼고 있다. 요컨대, 유클리드기하학에서의 변환(이동) f 에 관해서는 다음과 같이 말할 수 있다.

「$f: X \to Y$는 1대 1의 점대응(點對應)이며, 이 대응으로 길이가 변하지 않는다」

(i) 1 대 1의 점대응(點對應)

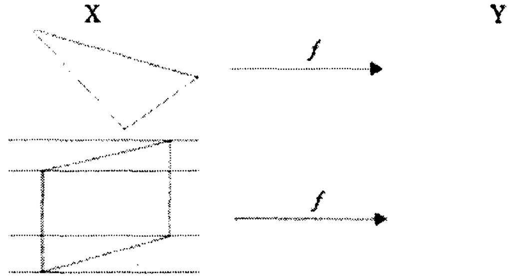
(ii) 선분(또는 직선)은 선분(또는 직선)에 대응

(iii) 길이를 바꾸지 않는 대응

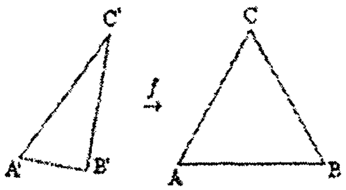
즉, 합동변환에 의해서 도형을 비교하고, 합동이 어떤지를 알아보고, 이 변환으로 어떤 성질이 여전히 변하지 않고 있는가를 살펴보는 기하학이다.

【문】 다음 주어진 원상(原象)을 이용하여 화상(畵像)을 그려라.

원상(原象) 화상(畵像)



【문】 모든 삼각형은 같은 도형이다. 즉, 임의의 3각형 $A'B'C'$를 정3각형 ABC와 겹치게 하는 경우를 그림으로 나타낸 것이다. 아핀변환의 성질을 이용하여 각 단계별로 설명하여라.



◑ 동형사상(isomorphism)

평면 $\sigma = (\wp, \mathcal{L}, \mathscr{f})$와 $\sigma' = (\wp', \mathcal{L}', \mathscr{f}')$이 동형(isomorphic)이 될 필요충분조건은 $(p, L) \in \mathscr{f}$이면 $(f(p), F(L)) \in \mathscr{f}'$이고 그 역도 성립하는 전단사 $f: \wp \to \wp'$와 $F: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$가 존재하는 것이다. 이 때 함수들의 쌍 (f, F)을 σ와 σ'의 동형사상이라고 한다. σ와 σ'의 동형일 때 $\sigma \sim \sigma'$로 표시한다.

◑ 쌍대구조

결합구조 $\sigma = (\wp, \mathcal{L}, \mathscr{f})$의 쌍대구조는 $\sigma^d = (\mathcal{L}, \wp, \mathscr{f}^{-1})$으로 정의된다. 즉 σ^d의 점은 σ의 선으로, σ^d의 선은 σ의 점으로 바뀌고 $\mathscr{f}^{-1} = \{(L, p) \mid (p, L) \in \mathscr{f}\}$으로 정의된다.

◑ 쌍대명제

H를 결합구조에서 점과 선에 관한 한 명제라 하자. 이 때 H의 쌍대명제 H^d는 H에서 점과 선을 교환하는 명제이다.

◑ 쌍대원리

결합구조의 모임을 C라 할 때, C에 속한 각 구조의 쌍대가 C에 속한 또 하나의 구조가 되는 경우에 C에서 쌍대원리(principle of duality)가 성립한다고 한다.

◑ 자기쌍대평면(self dual plane)

σ와 σ^d가 자동적으로 동형사상이 되는 경우에 평면 σ를 자기쌍대평면이라 한다.

◑ 도형

$\wp \cup \mathcal{L}$이 유한일 때 평면 $\sigma=(\wp, \mathcal{L}, f)$을 도형이라 한다.

[문제1] 임의의 평면은 선들이 점들의 집합으로 구성된 한 평면과 동형이다.

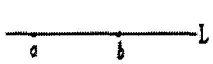
증명

$\sigma=(\wp, \mathcal{L}, f)$을 평면이라 하자. $L \in \mathcal{L}$에 대하여 $L'=\{p \in \wp \mid p$는 L 위에있다$\}$, 즉 L의 점렬을 L'라 할 때 $\mathcal{L}'=\{L' \mid L \in \mathcal{L}\}$, $f'=\{(p, L') \mid p \in \wp, L' \in \mathcal{L}', p \in L'\}$라 하자. 이제 $\sigma'=(\wp', \mathcal{L}', f')$라 놓고, $f: \wp \to \wp$을 항등사상이라 하면, 함수 f는 분명히 정의(동형사상)의 가정을 만족한다. 따라서 $\sigma \sim \sigma'$이다.

[문제2] $\sigma=(\wp, \mathcal{L}, f)$이고 $\wp=\{a, b\}$, $\mathcal{L}=\{L\}$, $f=\{(a, L), (b, L)\}$이라 할 때 σ와 σ^d를 그림으로 나타내어라.

풀이

σ:



σ^d:

σ는 평면이지만 σ^d는 평면이 아니다. 그것은 평면의 두 번째 공리를 만족하지 않기 때문이다.

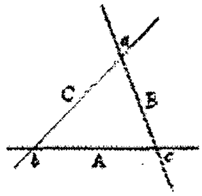
[문제3] 삼각형의 결합표를 찾고 그것을 이용하여 그림을 그려라.

풀이

도형은 하나의 유한평면이다. 이 도형들은 결합표(incidence table)에 의하여 나타낼 수 있다. 표의 세로에는 점들을 가로에는 선들을 배열하고 'x' 는 ×표가 있는 위치의 왼쪽에 있는 점이 그 위치의 위에 있는 선 위에 있다는 것을 표시한다고 하자.

삼각형의 결합표

	A	B	C
a		×	×
b	×		×
c	×	×	



수학적개념추출단계

◆ **두 평면이 동형사상이 될 필요충분조건**

두 평면 $\sigma=(\wp,\mathcal{L},f)$, $\sigma'=(\wp',\mathcal{L}',f')$에 대하여 $\sigma\sim\sigma'$이 될 필요충분조건은 점 $a_1, a_2, \cdots(\in\wp)$이 공선이면 그들의 상 $f(a_1), f(a_2), \cdots(\in\wp')$도 공선이고, 그 역도 성립하는 전단사 $f: \wp\rightarrow\wp'$가 존재하는 것이다. 증명은 다음과 같다. 우선 (f, F)가 동형사상이 되는 함수 $F: \mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}'$을 도입하고 $L\in\mathcal{L}$라 가정하자. σ는 평면이므로 L위에 두 점 x, y가 존재한다. x와 y는 σ에서 공선점이므로 $f(x)$와 $f(y)$을 지나는 유일한 선 L'가 존재한다. 이 때 $F(L)=L'$라 하면, σ와 σ'는 평면이므로 F는 잘 정의되어 있다. 이제 F가 일대일 사상임을 보이기 위하여 $F(L_1)=F(L_2)$라 가정하자. 만약 $x_1, y_1 : x_2, y_2$를 각각 L_1과 L_2 위에 있는 두 점이라 하면 $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2)$는 모두 같은 선 위에 있는 점들이다. 그러므로 x_1, y_1, x_2, y_2는 공선점이다. 따라서 $L_1=L_2$이다. 다음으로 F가 위로의 사상(onto) 임을 보이자. $L'\in\mathcal{L}'$라 하면 f는 위로의 사상이므로 $x', y'\in L'$에 대하여 $f(x)=x', f(y)=y'$을 만족하는 $x, y\in\wp$가 존재한다. 따라서 $F(xy)=L'$이다. 끝으로 F가 정의되어진 방법 때문에 결합성질 (f, F)에 의하여 분명히 보존된다. 따라서 (f, F)는 동형사상이고 $\sigma\sim\sigma'$이다.

◆ 쌍대성 원리

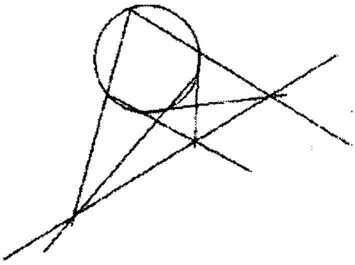
평면사영기하학에서 쌍대라 함은 점은 직선으로, 직선은 점으로 바꾸는 것을 말한다. 가령 「서로 다른 두 점은 한 직선을 결정 한다」의 쌍대는 「서로 다른 두 직선은 한 점을 결정 한다」 이다. 이것은 사영기하학에서는 성립하나 유클리드기하학에서는 성립하지 않는다.

◆ 파스칼 정리

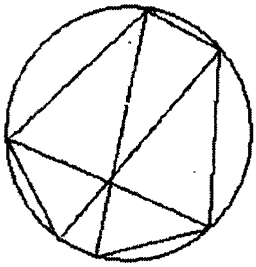
점 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$가 동일한 원둘레 상에 있고

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 = B_1,\ A_2A_3 \cap A_5A_6 = B_2,\ A_3A_4 \cap A_6A_1 = B_3$$

이면 B_1, B_2, B_3는 동일 직선상에 있다.



[그림1] 파스칼의 정리



[그림2] 브리앙숑의 정리

▸ 파스칼의정리와 브리앙숑의 정리비교

파스칼의 정리	브리앙숑의 정리
육각형의 꼭지점들이 두 직선 위에 엇갈리게 놓여 있다면, 그 마주보는 변들이 만나는 점들을 같은 직선 위에 있다.	육각형의 변들이 두 점을 엇갈리게 지난다면, 그 마주 보는 꼭지점을 연결한 직선은 같은 점을 지난다.

수학화단계

◆ 집합 대수에서의 쌍대성 원리

다음 기호들: ⊂ 와 ⊃, ∅ 와 U, ∪와 ∩

을 서로 바꾸면 그 결과도 다음의 법칙들 중의 하나가 된다. 예를 들어

(1) $A \cup B = B \cup A$가 $A \cap B = B \cap A$

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$가 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(3) $A \cap \varnothing = \varnothing$가 $A \cup U = U$
는 서로가 쌍대 정리이다.

◆ 쌍대원리

쌍대원리가 성립하는 결합구조의 모임을 C라 할 때, 정리 S가 C안에서 참이면 정리 S^d역시 C안에서 참이다. 또, S를 지기쌍대평면 σ의 한 정리라 하면 S^d 또한 σ의 한 정리이다. 왜냐하면 $\sigma \sim \sigma^d$이고 S는 σ에 관하여 참이므로 S또한 σ^d에 관하여 참이다. 따라서 S^d는 σ^d에 관하여 참이다.

확장단계

❶ 사영평면

사영평면에서 쌍대원리가 성립한다.

π를 사영평면이라 할 때 π^d도 사영평면이 됨을 증명하면 된다. 정의에 따라 평면 π는 명제 P1~P5(사영평면의 공리계)을 만족한다. 그러므로 π^d는 다음 명제들을 만족한다.

$P1^d$: 두 선 L과 M위에 있는 점은 오직 하나 존재한다.

$P2^d$: 두 점 p와 q위에 있는 선은 적어도 하나 존재한다.

$P3^d$: 점 p를 지나는 선은 적어도 3개 존재한다.

$P4^d$: 점 p위에 있지 않은 선이 적어도 하나 존재한다.

$P5^d$: 적어도 하나의 점이 존재한다.

만일 $P1^d \sim P5^d$가 성립하면 P1~P5 또한 성립한다는 것을 증명함으로서 π^d가 사영평면이라는 것을 보이면 된다.

P1. $P2^d$는 주어진 두 점을 지나는 선은 적어도 하나 있음을 말해 준다. 이제 L과 M을 두 점 p와 q를 지나는 두 개의 선이라 하자. 그러면 p와 q는 L과 M 위에 있으므로 $P1^d$에 위반된다. 따라서 많아야 한 선만이 주어진 두 점을 지나야 한다.

P2. $P1^d$로부터 직접 나온다.

P5. $P3^d$ 또한 $P4^d$와 더불어, $P5^d$가 성립하면 P5는 즉시 성립한다.

P4. L을 주어진 선이라 하자. $P5^d$ 에 의하여 적어도 하나의 점 p가 존재하는데 만약 p가 L 위에 있지 않으면 P4는 즉시 성립한다. 만약, p가 L위에 있으면 한 선 $M(\nmid p)$이 존재한다($P4^d$). 또한 제2의 선 $N(\nmid p)$이 존재한다($P3^d$). 이때 L위에 있지 않은 점 $q=\langle M, N\rangle$이 존재한다($P1^d$). 왜냐하면 만약 $q \mid L$라 하면, L과 M 은 모두 p와 q를 지난다. 이것은 P1에 위배되기 때문이다.

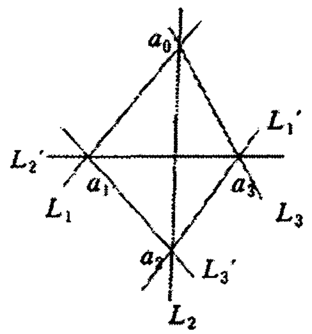
P3. L을 주어진 선이라 하면, P4에 의하여 $p(\nmid L)$가 존재한다. 그런데 $P3^d$에 의하여 세 개의 선 $A, B, C(\mid p)$가 존재하므로, 세점 $r=\langle L, A\rangle, s=\langle L, B\rangle, t=\langle L, C\rangle$가 L위에 존재한다.

따라서 π^d는 P1~P5를 만족하므로 사영평면이다.

❷ 완전사각형(complete quadrangle)
완전사각형의 결합표와 그림을 그리고 설명하라.

풀이

	L_1	L_1'	L_2	L_2'	L_3	L_3'
a_0	×		×		×	
a_1	×			×		×
a_2		×	×			×
a_3		×		×	×	



완전사각형이란 네 점 a_0, a_1, a_2, a_3 (g, p)와 그들 중 두 개씩에 의하여 결정되는 6개의 선으로 이루어진 도형이다. 이 네 점 a_0, a_1, a_2, a_3을 완전사각형의 꼭지점(vertices), 6개의 선 $L_1, L_2, L_3, L_1', L_2', L_3'$을 변(sides). L_1과 L_1', L_2과 L_2'와 L_3과 L_3'을 대변(opposite sides), 대변의 교점 $L_1 \cap L_1'$, $L_2 \cap L_2'$, $L_3 \cap L_3'$을 대각점(diagonal points)이라고 한다.

창의성 문제

(Ceva의 정리1) 삼각형 ABC의 변 BC, CA, AB 위에 점 X, Y, Z를 잡을 때, 세 개의 선분 AX, BY, CZ(이들을 각각 Cevian 이라고 한다.)가 한 점 P에서 만나면, 다음이 성립한다.

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1 \text{ ------①}$$

역으로, ①이 성립하면 세 개의 선분 AX, BY, CZ는 한 점 P에서 만난다.

(Menelaus의 정리2) 한 직선이 $\triangle ABC$의 세 변 AB, BC, CA(또는 그 연장선)를 잘랐을 때의 교점이 각각 X, Y, Z이면 $\frac{AX}{XB}\frac{BY}{YC}\frac{CZ}{ZA}=1$이다.

역으로, 위 식을 만족하는 점 X, Y, Z는 한 직선 위에 있다.

각 정리를 증명하고 발견한 점을 말하라.