韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 2호, 2005. 7. 445-452

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 2, Jul. 2005. 445-452

수학교사들의 내용지식이 학생들의 기하 평가에 미치는 영향

고 상 숙 (단국대학교)
장 훈 (단국대학교 대학원)

본 연구는 중 고등학교 교사 50명에 대하여 기하 문제의 논증기하적 또는 해석기하적 문제해결 전략이 학생들의 평가에 어떤 영향을 미치는가를 조사한 것이다. 중학교에서 고등학교로 진학하면 도형의 문제에 대한 해석기하적인 문제해결 능력은 교육과정 상 대단히 중요하게 가르쳐야 할 내용이다. 유클리드 기하에 바탕을 둔 논증기하의 지식은 좌표평면의 도형을 방정식으로 나타내고 연구하는 해석기하의 기본이다. 그럼에도 불구하고 많은 학생들은 논증기하적 문제해결을 선호하는 반면 해석기하적 문제해결은 어려워한다. 또한 논증기하적 문제 형태에는 논증기하적 문제해결 전략, 해석기하적 문제 형태에는 해석기하적 문제해결 전략을 구사하는 경향을 보인다. 본 연구는 중 고등학교 교사들의 기하 문제에 대한 내용 지식이 학생 평가에 미치는 영향에 초점이 맞추어져 있다.

서 론

본 연구의 초점은 근본적으로 학생들이 기하 학습을 해나갈 때 학생들이 논증기하적 또는 해석기하적 문제해결을 적절하게 사용할 수 있도록 자극하고 지원하는 교사들에게 맞추어져 있다. 이것은 일반적으로 교사들의 내용 지식, 태도, 신념이 학생들의 학습 결과에 영향을 주기 때문이다 (De Corte, Greer, & Vershaffel, 1996; Fennema & Loef, 1992; Shulman, 1986; Thompson, 1992; Verschaffel, De Corte, & Borghart, 1997; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000).

한편, Shulmann (1986, p. 9)에 의하면 내용 지식은 본질적으로 교사들의 각 영역에 대한 특별한 수학적 지식 기반으로 정의한다. 그리고 그 내용 지식은 교사의 마음에서 조직되고, 문제해결에 적용할 수 있어야 한다. 반면에 교육적 내용 지식은 각 내용이 어떻게 학습되고(학습되어야 하고) 지도해야 하는지에 대한 방법의 이해, 내용을 쉽게 또는 어렵게 하는 요인, 각 내용을 공부할 때 학생들의 연령에 따라 갖는 개념으로 구성된다.

역사적으로 기하는 논증기하(Proof Geometry, Euclidean Geometry, Synthetic Geometry)를 출발점으로 해석기하(Analytic Geometry), 벡터기하(Vector Geometry)로 발전해 왔다. 또한 학교 수학에서도 중학교에서는 논증기하, 고등학교에서는 해석기하를 주로 다룬다. 그러나 중학교에서도 좌표평면 위의 점의 좌표와 두 점사이의 거리, 함수의 그래프로서 직선의 방정식 등을 다루어 기초적인 해석기하를 배운다.

따라서 기하 문제의 풀이 방법은 일반적으로 논증기하, 해석기하, 벡터기하적인 방법이 있지만 벡터기하는 고등학교의 수 II에서 다루므로 제외하고 논증기하와 해석기하적인 방법 두 가지를 본 연

구에서의 내용지식의 기본 틀로 삼고자한다.

문장제 대수 문제에서 산술적 문제해결 전략과 대수적 문제해결 전략에 대한 예비교사의 내용 지식이 학생 평가에 영향을 준다(Wim Van Dooren, Lieven Verschaffel, Patric Onghena, 2002). 즉, 이들 연구에서 초등 예비 교사는 대수적 문제해결 전략보다 산술적 문제해결 전략에 더 좋은 점수를 주었고, 중등 예비 교사는 대수적 문제해결 전략에 더 좋은 점수를 주었다. 실제로 예비 교사들의 문제 풀이 전략도 같은 경향을 보이고 있다. 기하 문제의 문제해결 전략에도 비슷한 예측을 할 수 있다.

일반적으로 중학교 교사는 논증기하, 고등학교 교사는 해석기하에 익숙하기 때문에 기하 문제에 대한 내용 지식은 논증기하를 주로 다루는 중학교 교사와 해석기하를 다루는 고등학교 교사 간에 의미 있는 차이가 있을 것으로 예상된다. 또한 남교사와 여교사, 대학원을 다니거나 졸업한 교사와 그렇지 않은 교사 간에도 두 가지 문제해결 전략에 대한 선호의 차이가 있을 수 있다.

한편 문제의 형태가 문제해결 전략을 결정할 수도 있다. 즉, 논증기하 형태의 문제는 논증기하 문제해결 전략, 해석기하 형태의 문제는 해석기하 문제해결 전략을 선택할 가능성이 매우 높다. 그러나 적어도 고등학교 교사의 내용 지식으로는 문제의 형태 보다는 문제 풀이의 용이함을 더 중요하게 생각할 것이다. 대체로 논증기하적 문제해결은 그 풀이가 간결하고 쉽게 보이는 경우가 많지만 그 풀이를 착상하는 데는 많은 생각과 노력이 든다. 반면에 해석기하적 문제해결은 계산 과정이 복잡할 가능성이 있지만 대체로 무리 없이 풀 수 있다. 이러한 기하 문제 풀이의 내용 지식은 중학교 교사들은 익숙하지 않을 수 있지만 교육과정에 비추어 볼 때, 고등학교 교사들은 익숙해야 한다. 고등학교 교사가 해석기하적 문제해결 전략을 잘 구사하지만 문제에 따른 적절한 풀이 전략을 사용하는 것이 더욱 중요하다.

중 고등학교 수학교사들이 교과서의 기술 내용을 학생 평가에 영향을 줄 수 있는 내용 지식으로 받아 드리는지에 대한 결과를 위해 두 종류의 의문을 제기한다.

첫째로는, 중학교 교과서에 나오는 무게중심의 성질을 증명할 때, 중 고등학교 교사들은 교과서에 기술되어 있는 논증기하적 증명에 대하여 해석기하적인 증명을 어떻게 받아들일까? 예를 들어, 파푸스의 중선정리는 해석기하에 입문하는 좋은 예로 그동안 많은 교과서에서 그 내용이 다루어져 왔다. 이 증명을 논증기하적 방법으로 했을 때, 중 고등학교 교사들은 어떤 반응을 보일까? 둘째로는 피타고라스의 정리를 증명할 때, 교과서에서 제시하는 증명에 대하여 삼각비를 이용하여 증명하는 것을 어떻게 받아들일까? 또한 코사인 법칙을 증명할 때, 기존의 교과서 증명에 대하여 중학교 내용의 삼각비를 이용하여 증명하는 것에 대하여 어떤 반응을 보일까? 이 두 증명은 모두 논증기하적인 증명이지만 교과서에 기술된 방법과 다른 방법의 증명을 제시하여 교사들의 교과서 풀이에 대한 인식의 반응을 보고자 한다.

많은 교사들은 교과서를 기본으로 학생을 지도하기 때문에 교과서는 교사들의 내용 지식에 필연적으로 관계한다. 따라서 교과서가 교사의 내용 지식에 해당하는 수학적 지식 기반을 획득하는 하나의 의미 있는 자료로서 활용되고 있는지에 대한 조사는 매우 의미 있는 일이다.

연구방법

연구대상

연구 대상은 중학교 교사 25명(남:12, 여:13), 고등학교 교사 25명(남:13, 여:12) 모두 50명이다. 모든 교사들은 4년제 사범대학을 졸업하고 임용고사를 통과하였고 근무 년수는 3년-10년이다. 이들의 절반은 대학원을 졸업했거나 다니는 중이다.

이들은 중학교, 고등학교 교과서에 있는 기하 문제 2개와 교과서 밖의 기하 문제 4개로 모두 6문제를 풀게 된다. 모두 현직 교사이고 서울과 지방에 분포하고 있어서 일시에 한 장소에 모여 정해진 시간 동안 문제를 푸는 것이 현실적으로 어렵기 때문에 문제를 보내고 풀어서 팩스로 받도록 하였다. 그 결과로 교사 스스로 선택한 문제해결 전략의 분류를 한다.

연구절차

(1) 교사들의 문제해결 전략

연구 대상 50명의 중 고등 교사들에게 교과서 기하 문제 2개와 교과서 밖의 기하 문제 4개 모두 6문제를 임의의 순서로 나열하여 제공하고 그 풀이를 팩스로 받는다. 교사가 자기 스스로 문제를 풀기 때문에 교과서 문제는 모두 잘 해결할 수 있을 것이나 교과서 밖의 문제는 다른 책을 참고 할 수도 있다. 따라서 교과서 밖의 기하 문제는 일반 참고서에 있는 문제가 아니라 Problem-Solving Through Problems(Loren C. Larson, 1983)에서 발췌 수정하였다. 또한 문제를 못 풀더라도 생각하던 흔적을 반드시 남겨 줄 것을 요구했다. 그래야 문제해결 전략에 대한 교사의 의도를 알 수 있기 때문이다.

교과서 밖의 4문제는 논증기하 형태 2문제, 해석기하 형태 2문제이고 모두 논증기하적 문제해결과 해석기하적 문제해결이 가능하다. 또한 문제를 푸는 데 필요한 내용은 모두 중학교 수준이다. 교사들에게 제공된 문제는 부록에 예제로써 첨부되었다. 교사들의 문제해결 전략의 선택 경향을 중학교와 고등학교, 남교사와 여교사, 대학원 과정과 그렇지 않은 경우로 나누어 백분율 도표를 만들고 서로 비교 분석한다.

(2) 학생들의 문제해결 전략에 대한 교사들의 평가

교사가 풀었던 6 문제에 대한 각각의 풀이를 학생들이 푼 것처럼 논증기하적 풀이와 해석기하적 풀이를 동시에 제공하여 채점하게 하였다. 한편, 피타고라스의 정리를 증명할 때, 교과서에서 제시하는 증명과 삼각비를 이용하여 증명하는 것 중에서 어느 쪽에 더 좋은 점수를 주게 될까? 또한 코사인 법칙을 증명할 때, 기존의 교과서 증명과 중학교 내용의 삼각비를 이용하여 증명 중에서 어느 쪽

에 더 좋은 점수를 주게 될까? 이것은 교과서로부터 얻은 내용 지식이 학생 평가에 영향을 주는지 그렇지 않은지를 알 수 있는 좋은 기회이다. 따라서 교사가 직접 문제를 풀지 않았지만 이 두 개의 문제에 대한 풀이도 채점하도록 하였다. 따라서 교사들에게 자신들이 풀었던 6개의 문제와 피타고라스의 정리와 코사인 법칙 증명의 2문제를 합하여 모두 8개의 문제를 10점 만점으로 채점하게 하고, 점수를 많이 준 항목에 대해서는 그 이유를 기술하게 하였다.

연구의 가설

본 연구의 가설은 "교사가 선택한 문제해결 전략은 그 평가에 반영된다"이다. 우선 이 가설은 교사가 문제를 풀 때 선택한 문제해결 전략의 사용 빈도수와 학생 평가에서 이 문제해결 전략에 준 평균 점수 사이에는 양의 상관관계가 있다는 것을 의미한다. 또한 중학교 교사와 고등학교 교사의 평가 형태에 대한 가능한 차이점을 예측할 수 있다. 즉, 고등학교 교사는 논증기하로 쉽게 풀리는 문제라도 해석기하에 익숙해 있기 때문에 해석기하적 풀이에 더 좋은 점수를 줄 수 있다고 본다.

연구결과

본 연구는 현재 자료를 수집한 상태로 분석을 남겨둔 상태이다. 다음과 같은 요소들을 중심으로 연구결과가 구성될 것이다. 교사가 문제를 풀 때 선택한 문제해결 전략의 사용 빈도수와 학생 평가에서 이 문제해결 전략에 준 평균 점수 사이의 상관관계를 구하여 분석하는 것을 우선으로 주요 제목은 다음과 같다.

중 고등학교 교사의 학생 평가

중학교 교사와 고등학교 교사의 학생 평가

남교사와 여교사의 학생평가

대학원 과정과 대학과정의 학생 평가

교사들의 최고 점수에 대한 정당성 기술

결 론

아무도 교실에서 학생의 수학학습의 습득에 교사가 가장 중요한 영향을 미친다는 사실을 부정하지 않는다. 사람은 자신이 알지 못하는 것을 남에게 가르칠 수 없기 때문에 수학교사들은 자신이 가르치는 수학의 세부적인 지식뿐만 아니라 그들의 학생들이 미래에 배울 수학에 대해서도 깊이있는 지식을 가져야 한다고 주장한다(Fennema & Loef, 1992). 초기의 수학교육자들은 산술적인 활동은 대수적인 본래의 성질을 야기할 목적으로 점진적으로 철저히 가르쳐야 한다고 주장했다. 사고와 문제풀이의 산술적인 방식에서, 학생들도 초기 대수적 기술들(예를 들면, 기호화, 일반화, 관계에 대한 증명, 미지의 값을 표현하고 심지어 그것을 계산하는 것)을 발전시킬 수 있고, 대수개념(예를 들면, 방정식 풀이, 함수)와 같은 높은 수준의 기술의 형식화를 극대화 한다. 연구자들은 대수적인 이해는 여러 해에 걸쳐 서서히 발달되기 때문에 대수적인 개념과 기술의 습득은, 완전하게 산술보다 앞설 수 없음을 강조한다. 학생의 수준에 따라 산술의 중요성을 늘 인식해야함에도 불구하고 중등교사들은 산술적 풀이방법보다 대수적 풀이방법을 선호하였다(Dooren, Verschaffel, & Onghena, 2002). 그 결과 초등학교 수학에서 부진을 나타나는 학생은 중학교에서 교사의 대수 중심의 학습지도에 적응하지 못하게 되고 그 부진은 더욱 심화되어 누적되어 간다고 볼 수 있다.

이런 연구에 비교하여 본 연구의 핵심은 기하학습에서 고등학생의 기하학습과정을 지지하고 격려하는 수학교사에게 초점이 있다. 이 핵심의 주요 이유는 교사의 내용-특성, 지식, 신념, 태도는 일반적으로 학생의 학습결과에 영향을 준다고 예상하기 때문이다. 많은 연구자는 학생이 논증과 해석기하의 관계성을 이해하도록 하는데 교사의 중대한 역할을 강조한다. 동시에 Kieran(1992)에 따르면 "교수법의 모델뿐만이 아니라, 수학교사의 신념과 태도를 다룬 논문이 심각하게 부족하다." 본 연구에서 우리는 현장교사의 기하에서 문장제 문제풀이 전략과 기술 및 그들의 교수행동-즉, 이러한 문제에 작용하는 학생에 대한 평가의 관점사이의 관계에 대한 것을 조사하였고 이런 교사들의 행동양식을 이해함으로써 그들의 교수전략에 바른 안내를 제공하고 더 나아가 학생들의 기하학습에 논증기하와 해석기하의 균형적인 발달을 기대할 수 있을 것으로 사료된다

참 고 문 헌

De Corte, E., Greer, B., & Vershaffel, L. (1996). Learning and teaching mathematics. In D. Berliner & R. Calfee(Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp.491-549). New York: Macmillan.

Fennema, E., & Loef, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.147-164). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.390-419). New York: Macmillan.

Loren C. Larson, (1983). *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag

Shulman, L. S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* **15(2)**, pp.4-14.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs, and conception: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.390-419). New York: Macmillan.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Preservice teacher's conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction,* **7**, pp.339-359.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

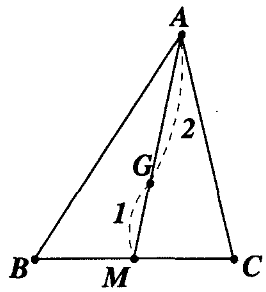
Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for Solving Arithmetic and Algebra Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* **Vol 33, No. 5,** pp.319-351.

부록 A

무게중심의 성질 (중학교)

[문제]

삼각형ABC의 무게중심 G는 한 중선AM을 꼭지점으로부터 2 : 1로 내분함을 증명하여라.



[논증기하적 증명]--교과서 증명

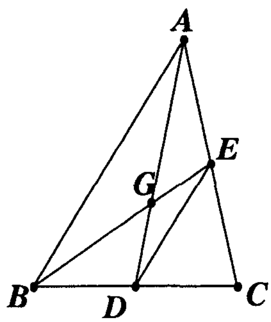
두 중선 AD, BE 의 교점을 G라 하면 중점연결 정리에 의하여 $\overline{AB}:\overline{DE}=2:1$

$\overline{AB}//\overline{DE}$ 이므로

$\angle ABG=\angle^{\circ}$, $\angle AGB=\angle DGE$

$\therefore \triangle GAB \backsim \triangle GDE$

$\therefore \overline{AG}:\overline{GD}=2:1$



[해석기하적 증명]

두 중선 AD, BE 의 교점 $G(x, y)$에 대하여

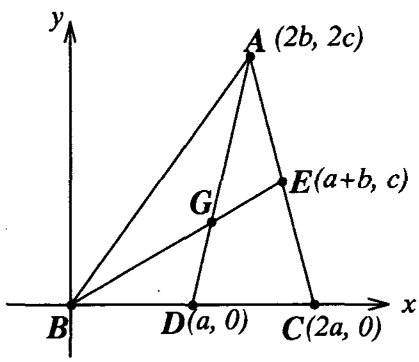
$$\frac{2c}{2b-a}=\frac{y}{x-a} \text{ ------①}$$

$$\frac{c}{a+b}=\frac{y}{c} \text{ ------②}$$

①, ②를 연립하여 풀면,

$$x=\frac{2(a+b)}{3},\ y=\frac{2}{3}c$$

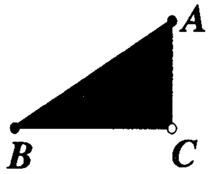
$\therefore \overline{AG}:\overline{GD}=2:1$



부록 B

[문제]

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$을 증명하시오.



[증명1]-교과서 증명

삼각형 ABC와 합동인 네 개의 직각삼각형을 이용 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 $CDFH$를 그리면 사각형 $AEGB$는 네 변의 길이가 모두 c인 마름모 또, $\angle BAC + \angle EAD = 90^\circ$ 이므로

$\angle BAE = 90^\circ$

따라서, 사각형 $AEGB$는 정사각형이다.

$\square CDFH = \square AEGB + 4\triangle ABC$,

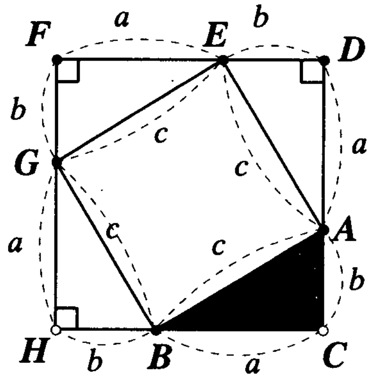
$\square CDFH = (a+b)^2$, $\square AEGB = c^2$,

$\triangle ABC = \frac{1}{2}ab$,

$(a+b)^2 = c^2 + 4\times\frac{1}{2}ab$

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$



[증명2]

$\overline{AH} = b\cos\theta$, $c\cos\theta = b$,

$c\cos(90-\theta) = a$ 이므로

$\square ADFH = \overline{AD}\times\overline{AH} = bc\cos\theta = b^2$,

$\square HFEB = \overline{BH}\times\overline{BE} = ac\cos(90-\theta) = a^2$,

$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$