韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 2호, 2005. 7. 389-407

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 2, Jul. 2005. 389-407

수학적 지식의 구조와 문제 해결을 통한 탐구학습

박 혜 경 (한국교원대학교 대학원)
전 평 국 (한국교원대학교)

수학은 위계적이고 구조적인 특성을 가지고 있어서 학생들이 적절하게 학습하면 내적 동기유발이 가능하고 흥미있게 학습해 나갈 수 있는 반면 단편적인 지식들로 학습하려 한다면 그 양이 방대해지고 제대로 이해하기가 어렵다. 그러므로 교사는 수학적 지식의 구조를 깨달아 지식의 본체가 내적으로 어떻게 조직되고 상호 관련되어 있는지 알아야 하고 학생들이 수학적인 아이디어와 절차를 획득하고 탐구하게 하는 적절한 문제를 제시하여 문제해결을 통해 가르쳐 가는 방법을 생각해야 할 것이다. 이 때에 학생들은 문제해결 과정에서 능동적인 역할을 하면서 자신이 학습하고 있는 것의 핵심을 인식하고 호기심을 갖고 유의미한 기능들을 이끌어내는 학습을 해야 하는데, 이는 오랜 전통의 탐구 학습과 그 맥락을 같이 하는 것이다.
수학교과 고유의 특성을 살려 지식의 구조를 가르침에 있어서 교수 방법으로의 문제해결을 통한 지도와 학습 방법으로의 탐구학습 과정은 잘 조화될 수 있다. 이러한 조화된 모습을 드러나게 하고자 초등학교 5학년 가 단계에서 '평면도형의 넓이와 둘레 사이의 관계'를 탐구하게 하는 문제해결을 통한 탐구학습 과제를 제시해 보았다. 30-40년을 거슬러 올라가는 역사를 갖는 지식의 구조나 탐구학습, 문제해결에 대한 관심은 오늘 날에도 여전히 시사하는 바가 크다고 하겠다. 수학교육에 관한 연구들은 완전히 새로운 것이기 보다는 이전의 것들이 주는 의미를 되새기고 오늘의 상황에 비추어 해석할 때 수학교육은 한 단계 올라서게 된다.

1. 들어가는 말

초등학교에서 가장 좋아하는 과목과 가장 싫어하는 과목을 조사하면 양쪽 모두에서 수학이 꽤 높은 위치를 차지한다. 수학 교과에 대한 선호도가 극단적으로 나타나는 이유는 여러 외부적인 요인이 작용하기도 하지만 수학 교과 고유의 특성 때문이기도 하다. 수학은 위계적이고 구조적인 특성을 가지고 있어서 학생들이 적절하게 학습하면 내적 동기유발이 가능하고 흥미있게 학습해 나갈 수 있는 반면 단편적인 지식들로 학습하려 한다면 그 양이 방대해지고 제대로 이해하기가 어렵다. 교사들이 가르치고 학생들이 학습하여야 할 수학적 지식은 과연 어떠한 것인가? 본 연구는 수학적 지식의 구조를 파악하는 것을 그 출발점으로 하였다. 수학적 지식에 대한 이해를 이끌어내기 위해서는 지식의 본체가 내적으로 어떻게 조직되고 상호 관련되어 있는지에 관한 지식의 구조를 깨닫는 것이 필요하다고 생각하였기 때문이다.

지식의 구조에 대해서는 학자들마다 약간의 견해 차이가 있으나 근본적인 면에서 공통적으로 흐르는 생각이 있다. 한결같이 교육내용으로서의 학문의 성격이 무엇이며 그 성격에 충실하게 교육을

하려면 교육이 어떤 양상을 띠어야 하는가에 관심을 가지고 있다는 것이다(이홍우, 1996). 교육 내용으로서의 수학적 지식의 구조를 받아들이고 나면, 교수-학습 방법에 관심을 기울이게 된다. 최근의 수학교육 연구들을 바탕으로 문제해결 지도와 탐구학습의 접합 가능성을 생각하게 되었다. 문제해결이 학교 수학의 초점이 되어야 한다는 An Agenda for Action(NCTM, 1980)의 권고 이후로 문제해결은 모든 수학학습의 통합적인 부분으로서 인식되고 있으며, 이는 급변하는 환경에 효과적이며 능동적으로 대처하도록 하기 위해선 창의적 문제해결 능력이 요구된다는 생각을 그 배경에 깔고 있다. 교수 방법으로서 문제해결 지도에 지속적인 관심이 모아지는 가운데 Schroeder & Lester (1989)는 문제해결 지도를 세 가지 형태, 즉 문제해결에 관한 지도, 문제해결을 위한 지도, 문제해결을 통한 지도로 나누어 설명하면서, 그 중에서도 학생들의 이해를 위해선 문제해결을 통한 지도를 해야 한다고 강조하고 있다. 학생들이 수학 시간에 문제를 해결하는 과정에서 수학적인 아이디어와 절차들에 대한 깊은 이해를 갖도록 해야 한다는 것이다.

학생들이 수학적인 아이디어와 절차를 획득하고 탐구하여 사용하는데 있어 능동적인 역할을 하여야 하는 것은 분명 수학교육의 중요한 목표 중 하나이다. 이러한 목표를 달성하기 위해서는 학생들에게 자신이 학습하고 있는 것의 핵심을 인식하고 호기심을 갖고 유의미한 기능들을 이끌어내는 문제를 정의해 보는 기회를 주고 격려해야 한다(Hiebert 등, 1996). 이는 오랜 전통의 탐구 학습과 그 맥락을 같이 하는 것으로 Suchman(1962)이 제시한 탐구학습의 목표와 크게 차이나지 않는다.

그렇다면 수학교과 고유의 특성을 살려 지식의 구조를 가르침에 있어서 교수 방법으로의 문제해결을 통한 지도와 학습 방법으로의 탐구학습 과정이 조화된 모습을 어떻게 드러나게 할 수 있을까? 수학교육에서 문제해결을 통한 탐구학습으로서 학생들의 이해를 이끌어내기 위해서는 적절한 과제와 교사의 역할에 대한 신중한 고려가 요구된다.

2. 지식의 유형과 수학적 지식의 구조

교사들이 가르치고 학생들이 학습하여야 할 수학적 지식에 대한 논의의 시작으로 지식의 유형을 살펴보겠다. 앎과 지식에 대해 깨닫고자 학자들은 지식의 유형을 구분하면서 이해하려고 하였다.

(1) 수학적 지식 유형의 구분

인간 사고에 대한 연구가 행해지면서 지식의 유형들에는 크게 구분되는 특징이 나타난다는 것이 드러났다. 지식의 유형들을 구분하는 방법 중 인지 심리학 쪽에서 보편적으로 받아들여지고 있는 것 중의 하나가 선언적 지식(declarative knowledge)과 절차적 지식(procedural knowledge)으로 구분하는 방법이다(Anderson, 1980). 선언적 지식은 세상에 관한 사실적 지식으로 이루어져 있다. 절차적 지식은 과제를 수행하고 선언적 지식에 따라 행하는 인지 기능으로 구성된다.

이와 유사한 것으로, 최근 수학교육에서 유용하게 받아들이고 있는 지식 유형의 구분 중의 하나는

개념적 지식(conceptual knowledge)과 절차적 지식(procedural knowledge)으로 나누는 것이다 (Hiebert & Lefevre, 1986). 개념적 지식은 풍부한 관계망을 바탕으로 하면서 수학적 개념에 의미와 힘을 부여하는 지식으로, 개념적 지식의 발달은 단편적으로 존재하던 기존 지식들 사이의 관계를 형성하는 것과 기존 지식과 새로운 지식의 관계를 만들어내는 두 가지로 생각할 수 있다. 그리고 수학에 있어서 절차적 지식은 수학의 형식적 언어와 알고리즘이나 법칙들로 이루어져 있다. 수학의 형식적 언어란 기호 표현 체계를 의미하는 것으로, 수학적 개념을 표현하기 위해 사용된 기호와 친숙해지고 그 기호를 사용하기 위해 수학적인 규칙을 깨달아야 하는 것을 내포하고 있다. 절차의 주요한 특징은 미리 결정된 일련의 단계로 수행된다는 것이다. 학생들이 소유하는 많은 절차들은 기호를 다루기 위한 일련의 규칙들인데 문제를 해결하기 위한 전략도 절차적 지식의 종류이다. 이해를 수반하지 못하고 개념적 지식과 관련시키지 못한 절차적 지식은 상황에 의존적이어서 새로운 상황에서 활용되지 못하며 자신이 수행된 결과에 대해 그릇된 해석을 갖기도 한다(Hiebert & Lefevre, 1986).

Skemp(1976)가 '어떤 것을 이해한다는 것은 그것을 적절한 스키마에 동화시키는 것'이라고 하면서 수학적 이해를 '관계적 이해'와 '도구적 이해'로 구분했을 때, 이 두 가지는 수학의 교수-학습에 관한 서로 다른 두 가지 방법과 관련되어 있다. 특정한 수학 내용을 연습하게 하는 도구적인 접근은 수학에서의 도구적 지식만을 학습자에게 제공하게 된다. 반면, 관계적 이해는 필요한 만큼의 계산의 능숙함을 포함한 진정한 개념적 체계를 제공할 뿐만 아니라 문제해결, 비정형화된 과제에 활용할 수 있으며 지속적으로 발전한다. Skemp가 주장한 두 가지 종류의 이해는 서로 다른 양립할 수 없는 개념인 것에 반하여(Shane, 2002) Hiebert & Lefevre(1986)의 지식 구분에서는 절차적 지식과 개념적 지식 간에 서로 도와주는 힘이 있는 것으로 설명된다.

Fischbein(1993)은 알고리즘적 요소와 형식적 요소 및 직관적 요소를 아우르는 대안적인 수학적 앎의 모델을 제시하였다. 그의 모델에 따르면, 수학적 앎은 세 가지 요소를 잘 조화시킴으로써 이루어지는데, 세 가지 요소를 효과적이고 효율적으로 활용하면서 드러난 차이점을 조정하는 것이 요구된다. Fischbein이 제시한 알고리즘적 요소는 Hiebert가 말한 수학에서의 절차적인 지식과 비슷하다. 형식적 요소는 수학에 내재된 구조, 패턴, 법칙의 이해에 해당한다. 직관적 요소는 형식적 교육 이전의 일상적인 경험이나 상식으로부터 파생되는 일종의 수학적 지식이다(Shane, 2002, 재인용). 초등수학에서는 수학적 활동의 핵심적인 요소로 직관적인 요소가 관심을 끌고 있다. Skemp가 강조한 관계적인 이해는 알고리즘적 이해, 형식적 이해, 직관적 이해의 통합이라고 생각할 수도 있겠다.

수학교실에서의 지식을 구분하는 데에는 Schwab(1978)가 교과 지식의 구분을 위해 이용했던 본질적 지식과 종합적 지식이라는 용어도 활용 가능하다. Ball(1990)은 이 개념을 다시 활용하면서 수학의 본질적 지식에는 표준적인 수학과 교육과정의 모든 요소들이 포함될 수 있고 종합적 지식에는 '게임의 법칙', 증거 자료로 생각될 수 있는 것, 담화의 특징 같은 것들이 포함된다고 하였는데 Cobb(1994)이 소개한 사회수학적 규범과 비슷한 것으로 생각된다.

Shane(2002)은 수학적 지식의 본질에 대한 이러한 주장들이 교육과정의 수학적 내용을 표준화된 알고리즘 대 학생들이 고안한 알고리즘, 연습과 훈련 대 문제해결, 절차의 적용 대 전략의 선택과 정

당화로 분석하는 체계를 제공해 준다고 언급하고 있다. 교사가 가르치고 학생들이 학습해야할 수학적 지식에 대하여 생각하는데 있어서도 시사하는 바가 있다.

학자들마다 강조점이 조금씩 다르고 그들이 사용하는 용어도 다르지만 전반적으로 개념적 지식과 절차적 지식의 구분은 수학교육에 유용한 것으로 보인다. 과거 오래 전부터 기능과 이해의 학습으로 구분하는 경우가 있었는데 개념적 지식과 절차적 지식으로 나누는 것에는 과거와는 약간 다른 강조점이 있다. 과거의 기능과 이해 사이의 구별은 독립된 두 가지의 지식의 존재를 강조하고 그 두 가지 중 어느 것이 중요한 지가 논란의 대상이었다. 반면, 개념적 지식과 절차적 지식의 구분은 각각이 독립된 지식으로 존재하기보다는 두 가지 지식사이의 연결을 통해 학생들의 유의미한 학습을 도우려 하고 있다.

Hiebert & Lefevre (1986)는 개념적 지식과 절차적 지식간의 관계가 제대로 구성되지 않으면 개념적 이해가 되지 못한다고 하면서 두 지식의 관계 구성을 어렵게 하는 요인을 세 가지로 제시하고 있다. 지식 기반의 결여, 관계를 부호화하는데 어려움이 있는 것, 습득한 지식이 특정한 맥락에 한정되어 있는 것 등이다. 학생들은 새로운 수학 지식을 학습할 때에 기존의 지식과 관계를 인식하고 새로운 관계를 만들어 내는 것을 통해 개념적 지식을 갖추게 된다. 그 다음으로 그 개념을 표현하는 기호 체계나 수식의 의미를 깨닫고 규칙과 알고리즘을 수행할 수 있게 된다. 학습한 수학 내용에 관한 개념적 지식과 절차적 지식이 긴밀한 관계를 구성하고 서로가 서로를 보완하는 역할을 할 때 수학 지식에 관한 내면적인 이해가 가능하다.

지식의 유형을 구분하는 것을 통해 살펴본 결과 '관계의 인식', '관계 구성', '연결을 통한 유의미한 이해', '관계적 이해' 등이 두드러지는데, 이는 수학 교육에서 지식의 구조에 대한 논의가 가르쳐야 할 지식을 깨닫는데 있어서 중요함을 드러낸다.

(2) 수학적 지식의 구조

'지식의 구조'라는 말이 교육학의 용어로 널리 쓰인 것은 1960년 Bruner의 '교육의 과정'이 출판된 것에서 비롯하였다는 것은 잘 알려져 있다. Bruner 이외에도 '지식의 구조'를 언급한 사람들이 여럿 있고 (특히 Schwab, 1964; King & Brownell, 1966), 그들 각각은 자기 자신의 견해에 따라 다소간 차이가 있다고 하더라도 한 가지 근본적인 점에 있어서는 공통된 견해를 나타낸다고 볼 수 있다. 즉, 그들은 한결같이 교육내용으로서의 학문의 성격이 무엇이며 그 성격에 충실하게 교육을 하려면 교육이 어떤 양상을 띠어야 하는가에 관심을 가지고 있다는 것이다(이홍우, 1996).

이홍우(1996)는 지식의 구조에서 '구조'의 의미를 '우산이란 무엇인가?'라는 질문과 관련시켜 알기 쉽게 설명하고 있다. '구조'라는 것은 사물(또는 현상)의 '안'을 가리키는 것이며 '구조'를 파악한다는 것은 사물의 '안'을 , 또는 사물 그 자체를 파악한다는 뜻이다. 그리고 사물의 '안'을 파악한다는 것은 다시 그 사물을 하나의 온전한 전체로 보고 그 전체를 이루고 있는 요소들 사이의 법칙적인 '변용'으로 파악한다는 뜻이다(이홍우, 1996).

Bruner의 '교육의 과정'은 지식의 구조가 교과의 내용이 되어야 한다는 것을 주장한 책이라고 볼 수 있다. 지식에는 '구조'가 있으며 그것이 곧 각 교과의 내용이라는 것이다. 거기에 비추어 본다면 수학에서의 '지식의 구조'는 하나의 전체적인 학문으로서의 수학을 가리킨다. 수학의 '지식의 구조'가 수학 교과의 내용이라는 것은 수학 교과에서는 수학 그 자체-수학의 여러 요소들이 서로 관련을 맺어서 이루고 있는 전체적인 구조-를 가르쳐야 한다는 뜻이다. '지식의 구조'라는 말은 지식의 기능을 보는 관점에서 지식의 구조를 보는 관점으로의 전환을 나타낸다.

◆ 지식의 구조를 가르쳐야 하는 이유는 무엇인가? 구조는 어떤 이점을 갖는가?

학생들은 무제한의 내용을 무제한의 시간을 들여 배울 수가 없다. '어떻게 하면 제한된 시간에 앞으로 살아가기 위해 필요한 중요한 모든 것을 배울 수 있게 하겠는가?' 교과의 기본적 구조를 가르치면 된다. 기본적인 원리나 개념을 이해하는 것은 적절한 '전이'를 가능하게 하는 중요한 방법이다. 구조는 '한 교과를 이루고 있는 기본 개념의 상호 관련된 체계'라고 할 때 해당 분야의 폭넓은 구조와 관련을 맺지 않은 특수한 사실이나 기술을 가르치는 것은 몇 가지 근본적인 의미에서 비경제적이다(이홍우, 1996).

마찬가지로 Bell(1983)은 지식의 구조의 이점을 경제성(economy)과 힘(power)으로 설명하고 있다. 경제성은 교과의 요소들을 이해하기 위해 기억에 축적해야 할 정보의 양과 관련되며 사람들이 수학에서의 개념, 원리, 절차를 이해하기 위해 적은 정보를 기억할수록 특별한 아이디어나 절차의 표상이 더 경제적이 된다. 화씨 온도를 섭씨 온도로 바꾸어야 하는 경우에 변환의 결과에 관한 표 전체를 외우는 것보다 전환 공식을 외우는 것이 더 경제적이다. 학습자의 지식의 구조의 힘(power)는 학생들이 정보를 습득하는 하면서 만드는 정신 구조(mental structure)와 관련되며, 학습된 정보를 조직하고 연결하고 적용하는 것에 있어서의 학습자의 능력이다. 대수학의 군(group), 환(ring), 체(field)이라는 개념을 학습하는 학습자가 수학적인 아이디어 사이의 관련을 알지 못하는 경우에는 강력한 힘을 발휘하기 어려울 것이다.

◆ 지식의 구조를 가르치기 위한 수업 방법은 어떠한 것이 있는가?

지식의 구조를 가쳐야 한다는 것은 수학을 '토픽'(topic)으로 보는 것이 아니라 하나의 '사고방식'으로 보는 것이며 수학을 배우는 학생은 수학의 '관람자'가 아니라 수학의 '참여자'이어야 한다. 수학에 '관하여 가르칠' 것이 아니라 수학을 가르쳐야 하며, 수학을 '하도록' 가르쳐야 한다. 이 모든 것은 지식의 구조를 가르치는 방법상의 원리로서 '탐구'의 중요성을 강조한다고 볼 수 있다(이홍우, 1996).

탐구나 발견이라는 말을 지나치게 문자 그대로 해석하여 탐구학습이나 발견학습을 수업의 외부적인 특징(학생들에게 탐구할 문제를 내어 주고 그 해답을 스스로 발견하게 하는 것)으로 파악하는 것은 그릇된 것이다. 탐구학습의 의미는 '지식의 구조'에 비추어 비로소 올바르게 파악할 수 있다. 이홍우(1996)는 지식 구조의 의미를 현상을 보는 개념적 수단이 되는 것이며 '안목'이라는 말로 표현할 수 있다고 설명한다. 수학을 배웠는데도 수학적 현상을 보는 안목이 생기지 않았다면 그것은 수학을

배우는 원래의 의도를 실현하지 못했다고 볼 수밖에 없다. 탐구는 개인이 자기 자신의 안목을 가지기 위하여 하는 자발적인 노력이다. 탐구학습을 통해 학생들은 수학을 자기의 안목으로 '내면화'하여 의미있는 것이 되도록 하여야 하고, 교사는 학생들이 의미있는 것으로 만들게 도와야 한다.

수학교과 고유의 특성을 살려 지식의 구조를 가르침에 있어서 교수 방법으로의 문제해결을 통한 지도와 학습방법으로의 탐구학습 과정을 조화시켜 구현하는 것이 또한 본 연구의 목적이다. 이를 위하여 문제해결 지도와 탐구학습 각각에 대해 알아보고 교사가 적절한 문제 상황에서 문제해결을 통한 지도를 할 때, 학생들은 탐구학습의 과정을 경험하게 될 것이라는 주장에 대한 근거를 확인해 보기로 하자.

3. 문제해결 지도와 탐구 학습

(1) 문제해결 지도

문제해결이 수학교육의 중요한 부분으로 강조되는 흐름을 타고 문제와 문제해결의 정의에 대한 많은 학자들의 노력이 있었다. 문제의 구성 요소나 대상에 따라 문제가 될 수 있는 것과 그렇지 못한 것, 좋은 문제는 어떠한 요소를 갖추어야 하는 지 등 문제 자체에 관한 연구가 행해져 왔으며(송상헌, 1997; Krulik & Rudnick, 1987; Mikusa, 1998, Zawojewski & Lesh, 2003), 수학 교육과정에서의 문제해결이 갖는 의미를 짚어 보는 연구(백석윤, 1993; Stanic & Kilpatrick, 1988)를 비롯하여 문제해결 과정을 이해하고 평가하기 위한 노력도 계속되어 오고 있다(Charles, Lester & O'Daffer, 1987; Moskal, 2000; Silver, 1987).

Polya(1981)는 문제를 가지고 있다는 것은 명확하게 알고는 있지만 즉각적으로 성취할 수는 없는 목적을 달성하기 위해 적절한 행동을 의식적으로 찾는다는 의미이며, 문제를 해결한다는 것은 그런 행동을 찾는다는 의미라고 설명한다. 인지 이론에 의하면, 문제 해결은 정보처리에 대한 이론적 가정에 근거하여 생각할 수 있다. 문제해결 과정은 문제해결의 실마리를 작동 기억(Working memory)에 보유하고 장기 기억에서 재생된 다른 정보와 접촉하게 하여 일련의 정보를 처리하는 과정으로 설명된다(Silver, 1987). 작동 기억(Working memory)의 용량에는 제한이 있는 만큼 성공적인 문제해결을 위해서는 패턴 인식, 표상, 이해, 기억 도식, 메타과정 등의 주제에 대한 논의가 필요하게 된다. 어떠한 것을 문제(problems)라고 하는가에 대해선 여러 가지 논의가 필요하므로 본 고에서는 문제와 문제해그 자체보다는 문제해결 지도에 관하여 논의하기로 하겠다.

교사의 입장에서 학생들에게 문제해결을 가르치려고 할 때 무엇을 기대하고 어떤 노력을 하게 될까? 문제해결 지도는 문제해결을 어떻게 생각하고 있느냐에 따라 다르게 나타날 수 있는데 Schroeder & Lester (1989)는 문제해결 지도를 세 가지 형태로 나누어 설명하고 있다. 또한 Lubienski(1999)는 문제해결 지도에 대한 서로 다른 세 가지 관점을 가진 교사들의 대화를 통해 관점에 따라 그들이 생각하는 교사들의 역할과 학생들에게 기대하는 역할이 다름을 보여주고 있다.

①문제해결을 위한 지도

문제해결을 위한 지도는 다양한 문제를 빠르게 해결할 수 있는 능력을 신장시키는데 중점을 두고 이루어진다. 학생들은 수학 개념과 구조들의 예를 학습한 후에 문제를 해결하는데 적용할 수 있는 기회를 많이 갖게 된다. 이 방법으로 지도하는 교사들은 학생들이 주어진 맥락에서 학습한 것을 다른 문제 상황으로 전이할 수 있는 능력을 중요시 한다. 수학 교실에서 가장 빈번하게 관찰되는 현상이다. 조완영 · 김남균(2000)은 '수학적 문제해결 지도에 대한 교사의 인식과 지도의 실제 조사'에서 초등학교 5학년 교사들의 인식과 수업, 수학교과서에 대한 분석을 하였는데 그 결과 문제해결을 위한 지도가 84.6%로 대부분을 이루고 나머지 15.4%는 문제해결에 관한 지도가 이루어지고 있으며 문제해결을 통한 지도는 전혀 이루어지지 않고 있다고 보고한 바 있다.

②문제해결에 대한 지도

문제해결에 대한 지도는 Polya(1957)의 문제 해결 4단계-문제의 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성-를 강조하여 지도하는 것으로 학생들은 문제해결 전문가가 행하는 문제해결 과정을 학습하여 그 단계를 거치면서 스스로 문제를 해결하게 된다. 학생들은 문제해결 계획을 세워 실행하기 위한 여러 가지 발견술이나 전략을 학습한다. Kim(2002)은 문제해결의 지도에서 문제해결 전략의 지도를 강조하면서 미국과 한국의 수학 교과서에서 문제해결 전략을 제시하는 방법을 분석하였다.

한국교육개발원에서도 외국의 문제해결 전략 및 과정에 관한 연구들을 종합하여 문제해결과정을 문제의식, 문제이해, 계획수립, 계획실행, 반성의 다섯 단계로 나누어 각 단계별 전략을 제시한 바 있으며(Kim, 2002), 현행 제7차 교육과정의 각 단계의 마지막 단원인 '8 문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 문제를 이해하고 적절한 방법으로 해결한 후에 해결과정을 설명하도록 하도록 하는 것은 문제해결에 대한 지도의 특성을 나타낸다.

③문제해결에 통한 지도

문제해결을 통한 지도는 단순히 문제해결에만 초점을 맞추는 것이 아니라 문제를 통해 수학 내용의 이해에 초점을 맞춘 지도를 말하며 이러한 수업에서의 문제는 수학학습을 위한 목표일뿐만 아니라 수학 수업의 중요한 수단이 된다. 학습한 수학개념이나 원리를 실생활에 적용하는 것보다는 실생활에서 문제 상황을 찾아내어 문제를 정의하고 문제를 해결하는 과정에서 수학적 개념이나 원리를 학습하게 된다. Stanic & Kilpatrick(1988)이 제시하는 문제해결의 이슈 중에서 상황으로서의 문제해결의 하위 주제에서 전달 수단으로서의 문제해결(problem solving as vehicle)은 문제해결을 통한 지도와 그 의미가 통한다고 하겠다. 본 연구에서 학생들의 유의미한 이해를 이끌어내면서 새로운 수학적 지식을 형성하도록 하기 위한 교수 방법으로 관심을 갖고 있는 지도 방법이다. 여기에서 문제의 역할은 어떤 주제를 지도할 때 학생들의 흥미를 일으켜 동기유발을 하는 것뿐만 아니라 학습해야할 새로운 개념이나 기능을 전달하기 위한 수단으로서도 이용된다.

④문제해결 지도에 대한 관점에 따라 달라지는 교사와 학생의 역할

세 가지 유형의 문제해결 지도를 정리해 보면, 교사가 어떤 관점으로 문제해결 지도를 하느냐에 따라 그들의 행동이 달라지리라는 것을 생각하는 것은 어렵지 않다. 문제해결 지도에 대한 현장 교사들의 체험이 Lubienski(1999)의 글에 나타난다. Lubienski는 2주간의 교사 연수에서 세 교사의 만남과 대화를 통해 수학 교실에서 문제해결 지도를 할 때 교사들이 갖는 관점에 따라 문제해결 지도가 달라지리라는 것을 잘 드러내고 있다. Schroeder & Lester (1989)는 학생들이 유의미한 방법으로 학습하도록 하기 위해서는 문제해결을 통한 지도를 하는 것이 필요하다고 하였다. 이 때에 교사들은 다루고 있는 문제, 문제에 내포된 수학, 학생들이 문제로부터 배워야 하는 것과 배우지 말아야 하는 방식에 대해 진지하게 생각할 필요가 있다. 또한 동료 교사와의 상호 교류는 어떤 문제를 통하여 어떻게 학생들의 학습을 안내할 것인가를 좀 더 사려 깊게 생각하는데 도움을 줄 수 있다.

최근에는 문제로 출발하지만, 교사가 학생들을 위한 학습 목표를 설정하고 그것과 관련하여 연속적인 과제를 선택함으로써 처음에 설정한 학습 목표가 어떻게 달성되는지를 관찰하면서 지도하는 방법도 소개된다. Simon(1995)이 '추측된 학습 경로(conjectured learning trajectory)'라고 표현한 이 방법은 먼저 교사가 수학 수업이 나아갈 길에 대한 자신의 비전으로 궤도를 생각하고 과제를 선택하지만 학생과의 피드백과 발전 가능성에 대한 교사의 판단에 따라 궤도를 수정할 수 있는 것이다.

(2) 탐구 학습

탐구에 대한 생각은 최근에 생겨난 것은 아니다. 수학의 역사를 통해 보더라도 인간은 탐구의 과정을 통해 새로운 지식들을 발견해냈으며 낯선 문제에 맞닥뜨렸을 때에도 탐구의 과정으로 해결할 수 있었다. Schuman(1964)은 '탐구란 어떤 문제 사태가 발생하게 되는 원인을 밝혀 보고자 관련된 자료를 수집 분석하여 과학적으로 입증하는 과정이다'라고 정의하고 있다(최정남, 2002, 재인용). 학생들에게 있어 탐구란 호기심을 가지고 자신이 궁금한 것을 조사하거나 시험하는 과정이며 그 조사 과정은 논리적이고 일관성 있는 사고를 바탕으로 결론을 이끌어내는 것이라 하겠다. 탐구학습은 일반적인 문제해결 학습의 특수한 경우로 생각할 수 있을 것이며 본 연구에는 문제해결의 세 가지 접근 방법 중에 특히 문제해결을 통한 학습이 탐구학습의 목표를 구현하기에 적합하다는 근거를 확인하게 된다.

①탐구학습의 목표

박성선(2002)은 40년을 거슬러 올라가서 Suchman(1962)의 탐구학습의 목표를 확인하였다.

> 아동들이 자료를 탐색하고 자료를 처리하는 인지적 기능을 개발하고, 자율적이고 생산적으로 탐구할 수 있는 논리적 개념과 인과 관계를 개발하는 것이며. 구체적인 사례들을 분석하고 변인들 간의 관계를 발견하여 개념을 형성할 수 있는 새로운 접근 방법을 알게 하는 것이며, 자료를 자율적으로 탐색하고 자료를 처리하는데 있어서 발견의 기쁨을 경험하게 하는 것이다.(p. 28)

즉, 탐구 학습이란 학생에게 새로운 현상을 조사하고 설명하기 위한 탐구적 과정을 가르치는 것이라고 할 수 있다(박성선, 2002). 문제해결을 통해 수학적 개념과 원리를 이해해 가도록 하는 문제해결을 통한 지도는 탐구학습의 목표에서 드러나는 것들을 가르치는 적절한 방법으로 보인다.

②탐구학습의 과정

탐구학습의 과정은 문제해결을 통한 지도에서 거치는 비슷한 과정을 거친다. Bell(1983)에 의하면 수학 교실에서의 탐구학습의 과정은 다음의 네 단계로 진행 된다:

- 교사가 학생들에게 문제 상황이나 질문, 퍼즐 또는 역설을 제시한다.
- 학생들은 교사가 제시한 상황을 탐구하고, 질문이나 퍼즐, 역설을 해결하는데 유용한 절차를 결정하고 정보를 수집한다.
- 2단계에서 수집한 절차와 정보를 기존 지식의 재조직과 확장에 사용한다.
- 학생들은 그들의 탐구 과정을 분석하고 평가하면서 다른 탐구 상황에서 적용될 수 있는 일반화된 방법을 찾는다.(p.340)

탐구학습의 과정을 설명하고자 할 때 '수학자가 하듯이' 학생들이 탐구하도록 하자는 주장에 근본적으로는 동의하나 해석에 있어서는 주의를 기울여야 한다. 김진호(2005)는 수학자가 수학을 탐구하듯이 학생들을 탐구시키는 학습 방안을 진지하게 모색하고 있다.

③탐구학습을 위한 환경과 교사의 역할

탐구학습은 교사의 개입 정도에 따라, 교사가 탐구의 전 과정을 주도하는 '유도된 탐구(guided inquiry)'로부터 교사의 역할이 배제되는 '열린 탐구(open inquiry)에 이르기까지 다양한 형태를 취한다. 탐구학습에서 교사의 역할은 학생들에게 탐구의 바탕을 마련해 주며, 탐구의 촉진제 역할을 할 수 있는 것이다. 탐구학습은 다른 어떤 교육 방법보다도 교사의 역할에 크게 의존하며 교사에게 높은 자질과 역량을 요구한다고 볼 수 있다(최정남, 2002). 전평국(2004)에 의하면, 수학학습에서의 탐구는 주어진 문제를 해결하기 위한 방법을 찾기 위한 일련의 과정이며 자기 자신이 소유하고 있는 경험 또는 지식을 바탕으로 단서를 찾고, 단서를 이용한 문제해결 방법 즉, '이 문제는 이렇게 하면 풀 수 있지 않을까?'라는 생각을 하게 될 때 시작된다. 탐구 학습에서 가장 중요한 것은 교사와 학생 모두가 끊임없이 의문을 갖고 질문하고, 생각하고, 의심하고 탐색하는 것이다. 물론 교사의 간섭을 최소로 하는 것이 중요하지만, 적어도 교사는 교실에서 학생들의 탐구의 과정을 겪게 할 수 있는 장을 마련해 주어야 한다는 점이다. 탐구에 적절한 과제나 상황을 제시해 주고 계속적인 탐구를 이끌어 가기 위해 적절한 발문을 해야 한다. 한 가지 답만을 요구하는 발문보다는 다양한 답변이 나올 수 있는 개방적인 발문이 효과적이라고 할 수 있다.

문헌 검토를 통하여 살펴본 바로는 문제해결을 통한 지도를 위한 문제나 탐구학습을 시키기 위한 과제가 큰 차이를 보이지 않으리라는 것은 자명하다. 또한 교사의 역할이나 바람직한 학습 환경에

대한 제언에서도 전반적으로 일치하는 것을 볼 수 있다. 그렇다면 이 두 가지를 관련시켜 생각해 보는 것이 의미가 있겠다.

4. 교사의 문제해결을 통한 지도와 학생들의 탐구학습

Lester(1994)는 1970년대부터 1994년까지 25년 동안의 문제해결 연구를 개관하면서 기본적인 관심의 초점이 되어 왔던 네 가지 탐구 영역을 정리하였는데 초기에는 문제라는 과제변인에 초점을 맞추었다면 후에는 다양한 과제변인 보다는 문제해결자의 특성에 따라 문제의 어려움이 달라지는 것으로 보고 있다. 같은 글에서 그는 1970년대 문제해결연구의 회고(Lester,1980)와 문제해결에 관한 연구(Schoenfeld,1992)의 이슈들을 비교하여 표로 제시하고 있다(Lester, 1994, p.670). 여기에 덧붙여 앞으로 계속해서 연구해야할 이슈들을 세 가지 방향에서 제시하였다. 첫째, 문제 중심 교실에서 교사의 역할에 대한 설명과 둘째, 문제 중심 교실에 실질적으로 발생하는 것에 대한 설명이 필요하며 셋째, 개인보다는 집단과 전체학급에 연구의 초점을 두어야 한다는 것이다.

과거의 문제해결에 관한 연구가 개개인에게 초점을 맞춰 학생들을 훌륭한 문제해결자가 되도록 가르치려 했다면 최근의 문제해결에 관한 연구들은 문제해결 지도가 이루어지는 교실 상황에서 교사의 역할이나 학생들과의 상호작용(정인수, 2003), 소집단 활동 및 학급 전체에서의 교수-학습과정의 분석(English & Lesh, 2003; Mikusa, 1998; Zawojewski & Lesh, 2003)에 관심을 기울이고 있다. 이는 Lester(1994)가 지적한 것들과 같은 방향으로 나아가고 있음을 알 수 있다.

문제해결 연구의 강조점은 맥락에서의 문제해결로 넘어오게 된다. 수학교육에서 맥락에서의 문제해결이라 함은 수학의 단순한 적용 가능성을 넘어 풍부한 문맥 속에서 출발하는 수학교육, 실생활과의 관련을 강조하는 수학교육을 떠올리게 한다. 장혜원(2002)의 제안한 상황 문제의 활용이나 English & Lesh(2003)의 목표조망 문제(ends-in view problem)가 본 고에서 찾고자하는 문제해결을 통한 탐구학습의 과제로 어떤 면에서 적합하고 어떤 면에서 주의해야 하는지를 논의해 보겠다.

◆ 상황 문제

장혜원(2002)은 수학학습은 수학적 지식을 포함하고 있는 학습자의 주변 상황이나 문제로부터 출발해야 하며 적합한 문제 상황을 준비하고 그것에 기초한 수업을 계획하는 것이 교사의 몫이라고 하면서 수학 학습을 위한 상황 문제[1]의 활용을 제안하였다. 장혜원(2002)은 상황문제의 가치를 인식론적으로는 수학적 지식의 도구적 특성 강조하는 것이며, 심리학적으로는 구성주의 입장을 취하고, 교

1) 상황문제는 교수학적 상황론(Brousseau,1998)의 전개 안에서의 이해해야 하며, 장혜원(2002)은 교사가 교수학적 의도에서 사용하는 것으로 학생에게 상황을 제시하여 반응을 요구하는 교수학적 계약 하에 놓이게 되는 것으로 설명하고 있다. 교사가 어떤 교수학적인 의도를 가지고 학생에게 제시하여 반응을 요구하는 상황을 곧, '상황문제'라 할 수 있다.(장혜원, 2002, p.485)

육학적으로 활동주의 교육 사조에 따르는 것으로 설명하고 있다. 상황문제에 대한 좀더 자세한 내용은 장혜원(2002)을 참고하면 되겠다. 상황 문제를 제시하고 학생들의 진정한 탐구로 수학적인 이해를 이끌어내기 위해서는 Hiebert 등(1997)이 언급한 학습 환경을 구성하는 다섯 가지 측면-과제의 특성, 교사의 역할, 수업의 사회문화, 수학적 도구의 활용, 접근가능성-을 고려하는 것이 필요할 것이다.

◆ 목표조망 문제

English & Lesh(2003)는 학생들에게 특정한 수학적 결과물을 만들도록 하는 목표조망 문제(ends-in view problem)를 소개하고 있다. 목표조망 문제에서는 학생들에게 문제나 설득력 있는 사례, 자료 수집 등의 중요한 수학적 결과물을 만들기 위한 기준이 제시되면 학생들은 실생활과 관련된 문제 상황을 찾아내어 기준을 만족시키는 결과물을 만들어 가게 된다. 학생들이 내 놓게 되는 결과물이란 자신들이 만든 문제가 중요한 부분을 차지한다. 학생들은 문제와 문제 해결 과정을 통해 수학 개념이나 원리까지도 조망하면서 복합적인 결과물을 만들어 가고, 학생들이 만드는 결과물들은 종합적이고 복합적인 것들을 효과적으로 전달할 수 있기 위해 수학적인 표현을 사용하게 된다.

목표조망 문제는 과거 문제설정(problem posing)에 관한 연구들(English, 1998; English, Cudmore & Tilly, 1998)에서 더욱 발전해서, 일부에 의해 문제점으로 지적되고 있는 '문제설정은 자신의 지식을 넘어서는 문제를 만들지 못하고 아는 범위 내에서만 진술할 수 있을 뿐'이라는 비판을 넘어서고 있다. 목표조망 문제의 잠재적인 가능성은 집단을 이루어 공동체 활동에 참여하면서 수학에 대한 이해가 깊어질 수 있다는 것과 Hiebert(1997)의 '의사소통을 통하여 목표를 공유하고 그 목표를 향하여 함께 나아가게 된다(p.59)'는 것에서 힘을 받아 건전한 사회문화의 장점을 통해 학생들의 수학 학습에 유용한 과제가 될 것으로 보인다.

◆ 문제해결을 통한 탐구학습 과제[2)]

장혜원(2002)의 상황문제는 학생이 지닌 지식의 수준을 고려하면서, 목표로 하는 새로운 지식이 문제해결에 적합한 도구가 되고 다양한 반응을 염두에 두고 있는 면에서, 문제해결을 통한 지도에 적합한 과제 중의 하나로 생각될 수 있다. 하지만 상황 문제의 특성은 문제 자체에 내재한 것이라기보다 목표로 하는 지식, 대상 학생, 문제를 활용하는 수업 과정에 의해 구현되는 조작적 성질의 것이라는 말에서도 드러나듯이 상황문제 해결을 통하여 보다 발전된 수학적 지식의 구조를 갖추도록 하기 위해서는 학생들이 적절한 탐구학습을 할 때에 가능하다.

English & Lesh (2003)의 목표조망 문제에서는 학생들이 최종 결과물에 대해 정확하게는 모르지만 끊임없이 그것에 대해 고려하고 조망하면서 계속해서 중간 결과물들을 정련시켜 가는 과정에서 점점 더 명확해지는 수학적인 요소들을 볼 수 있다. 이들에게 수학은 자신의 경험을 생각하게 하고 조직하는 방법이 된다. 그러한 측면에서 학생들이 목표조망 문제를 가지고 탐구할 때 목표조망 문제

---

2) 문제해결을 통한 탐구학습 과제란 교사가 문제해결을 통한 지도를 하기 위해 제시하는 문제를 말하며, 동시에 학생들이 그 문제를 해결하는 탐구학습 과정에서 과제가 되는 것을 말한다.

해결을 통해 새로운 수학적 지식을 형성해 갈 수 있겠다.

Hiebert 등(1997)은 학생들이 반성적인 사고와 의사소통을 통하여 수학적으로 이해하기를 원할 때 이용할 수 있는 과제는 몇 가지 사항을 갖추고 있어야 한다고 언급한다.

> 첫째, 과제는 학생들이 상황을 탐구할만한 것으로 느낄 수 있는 즉, 따라야하는 규칙으로서가 아니라 생각할 필요가 있는 것으로 느끼도록 해야 한다. 둘째, 과제에서 탐구할 만한 것은 수학적인 것이어야 한다. 마지막으로, 학생들이 과제를 진지하게 수행하도록 하기 위하여, 이미 알고 있는 기술과 지식을 사용할 수 있는 기회를 제공하여야 한다. 이러한 기준에 부합되는 과제는 학생들이 수학적 가치를 느끼게 해 줄 것이다(p.24)

본 고에서 다루고자 하는 문제해결을 통한 탐구학습 과제도 위의 세 가지 기준에 부합되어 수학적 가치를 느끼게 해 줄 수 있어야 한다. 이러한 점을 고려하면서 문제해결을 통한 탐구학습을 정리해 보도록 하겠다.

5. 문제해결을 통한 탐구학습에 관한 논의

(1) '무엇을' '어떻게' 가르칠 것인가?

오랜 시기에 걸쳐 교육자들의 한결같은 관심은 교육 내용으로서의 학문의 성격과 그 성격에 충실하게 교육하려면 교육이 어떤 양상을 띠어야 하는가라는 측면에 있었다. 본 연구는 이제까지 수학교육 연구들을 바탕으로 수학교육에서 '무엇을 어떻게 가르치고, 학습하여야 하는가'를 고찰해 보는데 그 목적이 있다.

먼저 교육 내용을 생각하기 위해 지식 유형의 구분을 살펴본 결과 '개념적 지식과 절차적 지식'으로의 구분이 유용하며 무엇보다 두 가지 지식의 관계를 구성하는 것이 중요하다는 것이 드러났다. '무엇을'에 해당하는 것을 한 마디로 요약하면 '수학적 지식의 구조'가 되겠다. '수학적 지식의 구조'란 수학의 여러 요소들이 서로 관련을 맺어서 이루고 있는 전체적인 학문을 말하며 NCTM(2000)에서 연결에 관한 규준 중 수학의 내적 연결성과 같은 의미를 지닌다. 풍부한 연결을 갖춘 지식인 지식의 구조를 가르치는 것이 왜 중요한가에 대해선 Bell(1993)의 경제성(economy)과 힘(power)으로 설명됨을 살펴보았다.

'어떻게 가르치고 학습하여야 하는가'에 대해선 교사의 입장에서는 문제해결 지도를, 학생은 탐구학습을 하는 것을 조화한 모습으로 설명하였다. 문제해결을 통한 탐구학습에서 중요한 것은 교사와 학생 모두가 끊임없이 의문을 갖고 질문하고, 생각하고, 의심하고 탐색하는 것이다. 문제해결을 통한 탐구학습에서의 교사는 탐구에 적절한 과제나 상황을 제시해 주고 계속적인 탐구를 이끌어 가기 위해 적절한 발문을 해야 한다.

수학 교사의 입장에서 해야 할 일은 수학적 지식의 구조를 파악해서 적절한 과제를 제시하고 학생들과 함께 지속적인 탐구를 해나가는 것으로 요약될 수 있다. 수학 전체의 지식의 구조를 파악하

는 것은 한 개인 교사의 능력을 넘어서는 일이며, 가르쳐야 할 한 가지 주제를 잡아 그 주제에 관한 지식의 구조를 파악하고 탐구하기에 적절한 과제를 찾는 것이 출발점이 되겠다. 수학교육에 있어 교사의 역할의 중요성은 모두가 인식하고 있는 바이지만 복합적인 상황을 담고 있는 교실 상황에서 전반적으로 유효한 안내 지침을 제시하기란 쉬운 일이 아니며 가능하지도 않다고 생각한다. 그렇다면 교사들에게 직접 도움이 될 수 있도록 문제해결을 통한 탐구학습 과제로 적절한 예를 제시하는 것으로 마무리하고자 한다. Hiebert 등(1997)은 학생들의 수학적 성향이나 사고의 질은 그들이 참여하는 과제의 종류와 밀접한 관계가 있다고 하였다. 방정숙(2004)도 학생들의 수학학습의 기회는 학생들이 모둠별로 앉아 있다거나, 구체적인 조작물들을 사용하는 등의 외적 요인보다는 어떠한 과제에 참여하느냐에 보다 관련된다고 하였다. 이러한 점을 고려할 때 적절한 탐구 소재에 관한 논의가 유익할 것으로 보인다.

(2) 활용 가능한 탐구학습 과제

①수학적 과제의 조건과 유형

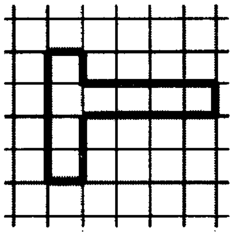
Hiebert 등(1997)은 과제의 중요한 요건으로서 학생들의 반성적 사고와 의사소통을 강조할 것, 학생들로 하여금 다양한 도구를 활용하도록 격려할 것, 수학적으로 중요한 그 무엇인가를 학생들에게 제공할 것 등을 들고 있다. 수학 수업시간에 사용되는 과제는 학생들에게 제각각 다양한 수준의 사고를 요한다(방정숙, 2004). 크게 인지적으로 낮은 수준의 사고를 요구하는 과제와 인지적으로 높은 수준의 사고를 요구하는 과제가 있을 수 있다는 말이다. Stein 등(2000)에 따르면, 인지적으로 낮은 수준 과제로는 '암기(memorization)'와 이해·의미 또는 개념과 연계가 없는 절차(procedures without connections)'가 있다. 한편, 인지적으로 높은 수준의 과제에는 '이해·의미 또는 개념과 연계 있는 절차(procedures with connections)와 '수학 행하기(doing mathmatics)'가 있다(방정숙, 2004, 재인용). 본 연구의 문제해결을 통한 탐구학습 과제는 인지적으로 높은 수준의 과제를 염두에 둔 것으로 앞에서 살펴 본 Hiebert & Lefevre(1986)의 개념적 지식과 절차적 지식 그리고 그 둘 사이의 관계, NCTM(2000)의 수학적 연결에 관한 규준, Bruner를 비롯한 학자들이 언급한 수학적 지식의 구조를 학습하게 하는 것과 관련된 것으로 볼 수 있다.

②문제해결을 통한 탐구학습 과제의 예

수학 5-가 단계 6단원 '평면도형의 둘레와 넓이'에서 다루어질 수학적 내용에 초점을 맞추어 논의해 보기로 하겠다. '평면 도형의 둘레와 넓이'라는 단원명은 속성들 사이의 관계를 파악하게 하는 중요한 수학적 능력을 담고 있어야 한다. 그러나 수학과 수학 익힘책 어느 곳에서도 두 속성의 관계에 대한 이해를 개발시키려는 흔적은 찾아볼 수가 없다. 측정 학습의 중요한 부분이면서도 초등학교 교과서에서는 다루지 않고 있는 두 속성의 관계를 탐구하게 하는 잠재력을 가진 과제를 생각해 보기로 하자.

◆ 넓이와 둘레의 길이가 같은 도형 그리기

왼쪽의 모눈 종이 위에 그려진 도형과 넓이가 같고
둘레의 길이는 다른 도형을 다양하게 그려 보세요.
왼쪽의 모눈 종이 위에 그려진 도형과 둘레의 길이가
같고 넓이가 서로 다른 도형을 다양하게 그려보세요.
왼쪽의 모눈 종이 위에 그려진 도형과 넓이도 같고
둘레의 길이도 같은 도형을 5개 그려 보세요.
모눈 9개로 만든 도형 중에서 둘레의 길이가 최대인
것과 최소인 것을 찾아보세요.



넓이가 일정할 때 둘레의 길이가 달라질 수 있다는 것을 모눈종이, 점판, 타일, 펜토미노 등의 도구를 사용하여 탐구하고, 그림을 그리며 설명하는 가운데 이해를 확장시켜 가게 해야 한다. 타일을 덧붙이면서 넓이와 둘레의 길이를 탐구시키는 것은 Malloy(1999)의 그룹 토론을 위한 질문 안내 (p.89)를 참고하면 많은 도움이 될 것이다.

학생들에게 모둠별로 둘레의 길이와 넓이에 관한 가설을 세우고 확인해 보도록 하면 그 과정에서 탐구가 일어날 수 있다. 학생들이 세우리라 예상되는 가설들은 다음과 같다.

-둘레의 길이가 일정하면 넓이도 같다.
-평면도형의 둘레의 길이가 길어지면 넓이도 넓어진다.
-둘레의 길이가 길어져도 넓이는 작아질 수도 있다.
-한 변의 길이가 두 배가 되면 넓이도 두 배로 늘어난다.
-둘레의 길이가 같을 때 가장 넓이가 큰 사각형은 ....이다.

학생들은 각각의 예에서 서로의 가설에 대한 예와 반례를 공유하면서 수학적인 논의를 하면서 탐구학습의 과정을 거치게 된다. 탐구 학습의 과정은 Ma(1999)의 연구에서 '닫힌 도형은 둘레가 늘어날수록 넓이도 늘어난다'는 학생의 새로운 아이디어에 대해 미국 교사들과 중국 교사의 반응을 비교한 것을 참고하면 어떻게 탐구를 이끌어가는 지에 대한 아이디어를 얻을 수 있겠다.

◆ 일정한 둘레에 대한 넓이 탐구

<가축 우리 만들기>[3] 인배를 도와 주세요! 인배가 가축의 우리를 만들려고 하는데 여러분의 도움이 필요해요. 인배는 다음과 같은 두 가지 조건을 정했어요. ▶직사각형 모양의 가축 우리를 짓고 싶다. ▶말에게 가능한 한 넓은 가축 우리를 만들어 주고 싶다. 울타리를 만드는데 사용할 울타리 재료는 같은 길이로 되어 있습니다. 인배가 사용할 수 있는 울타리 재료 16개입니다. 가축 우리의 변은 울타리 재료를 모두 사용해서 만들어야 한다. 인배를 도와 줄 아이디어를 말해 주세요. 1. 점판이나 모눈종이에 16개의 재료로 만들 수 있는 가축우리를 그려보세요. 어느 것이 가장 넓은 지 인배가 알아보기 쉽도록 번호를 붙여 주세요. 2. 재료 24개를 사용한다고 가정해 보면 어떤 설계가 가능할까요? 가장 넓은 축사는 어느 것일까요? 3. 여러 가지 울타리의 길이에 대해 가장 넓은 넓이를 주는 것을 해결하는 일반적인 규칙을 생각할 수 있나요?

위의 과제는 수학적으로 탐구할만한 생각거리를 담고 있으며, 학생들의 이미 가지고 있던 길이와 넓이에 대한 기술과 지식을 사용해서 그들의 관계를 탐구하게 할 수 있으리라 생각한다. 모눈종이, 타일, 이쑤시개와 같은 도구들을 활용하고 자신들이 알아낸 수학적인 지식을 적절한 언어로 표현하고 정당화하는 것이 요구된다. 가설을 세우고, 세운 가설의 참, 거짓을 판단함에 있어 반성적인 사고와 의사소통이 적절히 사용되어야 한다.

문제해결을 통한 탐구과제의 예들을 어떻게 사용하느냐에 따라 다른 결과를 가져오리라는 것은 이전의 연구들(방정숙,2004; Stein et al., 2000)에서 지적되고 있으므로 학생들이 이해하는 과정을 깨닫기 위해서는 사회문화적 관점에서의 연구가 요구되며, Hiebert 등(1997)이 제시하는 수업 분석을 위한 틀이나 과제를 중심으로 분석(방정숙, 2004) 등을 통해 자세히 분석해 볼 필요가 있다.

6. 결론

문제해결 지도와 탐구학습에 대한 연구들을 고찰해 보는 과정에서 문제해결을 통한 지도가 탐구학습의 과정과 깊은 관련을 가질 수 있음을 확인하였다. 교사가 적절한 문제 상황에서 문제해결을 통한 지도를 할 때, 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 유용하게 사용될 수 있는 방법 중의 하나가 '탐구'이다. 학생들은 수학적으로 가치가 있는 진정한 문제를 해결하면서 탐구학습의 과정을 경험하게 될 것이다. 본 고에서는 Schroeder & Lester (1989)가 제시한 문제해결 지도의 세 가지 형태와

3) The New Standards Reference Examination, Pilot Edition (New Standards Project 1995)에서 발췌된 문제로 Lubienski(1999)의 글에 인용된 것을 변형한 것이다.

Suchman(1962)의 탐구학습의 목표를 확인하고 수학교육 연구들에 나타난 문제해결과 탐구학습에 대해 고찰하였다. 그것을 바탕으로 문제해결을 통한 지도와 탐구학습 모델에서 요구하는 과제의 성격, 교사의 역할, 그리고 학생들에게 거는 기대가 일치하는 부분이 많음을 깨닫게 되었다. 또한 1960년대 이후 큰 줄기에서는 변함없이 지식의 구조를 교과의 내용으로 받아들이고 있으나, 실천을 위한 세부적인 해석에 있어서는 고려해야할 부분들을 많다. 학생들에게 경제적이고 힘 있는 지식의 역할을 할 수 있도록 연결이 풍부한 지식의 구조를 학습하도록 해야 하는데, 구체적인 실천 과정에서 교사와 학생이 함께 탐구하는 과정을 분석하는 것이 필요하다.

수학교육에서 행해진 연구들을 살펴보면 학생들의 유의미한 이해에 바탕을 둔 학습이 이루어지게 하고자 많은 노력을 기울여왔다. 획기적인 새로운 이론이 출현하여 모든 문제를 해결하고 수학교육이 비약적인 발전을 하는 것을 기대하기보다는 이전의 연구 결과들이 주는 의미를 되새기고 오늘의 상황에 비추어 재해석하고 실천하고자 할 때 수학교육은 든든한 기반을 바탕으로 한 단계 올라설 수 있을 것이다. 지식의 구조나 탐구학습, 문제해결에 대한 관심이 많게는 30-40년을 거슬러 올라가는 역사를 갖고 있어도 오늘 날에도 여전히 시사하는 바가 크다고 하겠다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2001). 수학 5-가. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육부 (1999). 초등학교 교육과정 해설(IV). 서울: 대한교과서 주식회사.

김진호 (2005). 수학자가 수학을 탐구하듯이 학습자도 수학을 탐구할 수 있는 방안 모색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **제44권**, pp.87-101.

박성선 (2002), 수학적 창의성 신장을 위한 탐구 학습에 관한 소고. 한국수학교육학회 시리즈 C <초등수학교육>. **6(2)**. pp.65-74.

방정숙 (2004). 초등학교 수학 수업에 관한 과제 중심의 사례 분석. 초등교육연구. **17(2)**. pp.419-442.

백석윤 (1993). 수학 문제해결 교육과 연구에 대한 반성적 일고. 대한수학교육학회 수학교육학 연구. **3(2)**. pp.59-68.

송상헌 (1997). 전통적인 문제와 창의적인 문제에 대한 한 가지 비교 연구. 대한수학교육학회 논문집, **7(1)**, pp.397-414.

이홍우 (1996). Bruner 지식의 구조. 서울: 교육과학사.

장혜원 (2002). 수학 학습을 위한 상황 문제의 활용. 대한수학교육학회지 <학교수학>, **제4권**, pp.483-494.

전평국 (2004). 수학 교수-학습 방법의 본질에 대한 소고. 한국수학교육학회 뉴스레터. **제5권 제2호** (통권 제8호). pp.2-7.

정인수 (2003). 수학적 문제해결 지도에서 교사의 역할에 대한 분석. 석사학위 논문. 한국교원대학교.

조완영 · 김남균 (2000). 수학적 문제해결 지도에 대한 교사의 인식과 지도의 실제조사. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, **제4권, 제1호**. pp.51-61.

최정남 (2002). 도형에 관한 탐구 학습이 공간 추론 능력에 미치는 효과. 석사학위 논문. 한국교원대학교.

Anderson, J. R. (1980). *Cognitive psychology and its implications*. W.H. Freeman and company.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, **90(4)**, pp.449-466.

Bell, F. H. (1983). *Teaching and learning mathematics in secondary school*. Dubuque, IA: Wm. C. Brown Company Publishers.

Bruner, J. (1960/1977). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Charles, R. I., Lester, F. K., & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate mathematical problem solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, Inc.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, **23(7)**, pp.13-20.

English, L. D. (1998). Children's problem posing in formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, **29**, pp.83-106.

English, L. D., Cudmore, D., & Tilly, D. (1998). Problem posing and critiquing : How it can happen in your classroom . *Mathematics Teaching in the Middle School*, **4(2)**, pp.124-129.

English, L. & Lesh, R. (2003). Ends-in-view problems. In R. Lesh & H. M. Doerr(Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*(pp.297-316). Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straiser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*(pp.231-245). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, **25(4)**, pp.12-22.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A., & Human, P. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. 김수환, 박영희, 이경화, 한대희(공역). 어떻게 이해하지? 서울: 경문사

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. silver(Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.1-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kim, JinHo (2002). Analysis of strategies for problem solving presented in elementary school mathematics textbooks. 대한수학교육학회지 <학교수학>, **제4권**, pp.565-580.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1987). Problem solving: *A handbook for senior high school teachers. An Introduction to Problem Solving*(pp. 3-20). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Lester, F. K. (1994). Musing about mathematical problem-solving research: 1970-1995. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25(6)**, pp.660-675.

Lubeinski, S. T. (1999). Problem-centered mathematics teaching. *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. 5, No. 4, 250-255.Meyer, M. R. (1999). Multiple strategies = Multiple challenges. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **4(8)**, pp.519-523.

Malloy, C. E. (1999). Perimeter and area through the van Hiele model. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **5(2)**, pp.87-90.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mikusa, M. (1998). Problem solving is more than solving problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **4(1)**, pp.20-25.

Moskal, B. M. (2000). Understanding student reponses to open-ended tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **5(8)**, pp.500-505.

NCTM (1980). *An Agenda for Action : Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Polya, G. (1957). How to solve it: A new aspect of mathematical method(2nd Ed.). 우정호(역) (1994). 어떻게 문제를 풀 것인가: 수학적 사고 방법. 서울: 천재교육.

Polya, G. (1981). Mathematical discovery . John Wiley & Sons, Inc. 우정호 외(공역)(2005). 수학적 발견(I). 서울: 교우사.

Schroeder, T. L. & Lester, Jr. F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton & A. P. Shulte(Eds.), *New directions for elementary school mathematics(1989 Yearbook)* (pp.31-42). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics .

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. In I. Westbury & N. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education* (pp.229-272). Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1961).

Shane, R. (2002). Context and content : what are student teachers learning about teaching mathematics? In S. Goodchild & L. English(Eds.), *Researching mathematics classrooms* (pp.119-153). Westport, CT: Greenwood Publishing Group.

Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. In A. H. Schoenfeld(Ed.), *Cognitive science and mathematics* *education* (pp.33-60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* **26**, pp.114-145.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77.

Stanic, G. M. & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles, & E. A. Silver(Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.1-22). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction : A casebook for professional development.* NY: Columbia University

Suchman, J. R. (1962). *The elementary school training program in scientific inquiry.* University of Illinois.

Suchman, J. R .(1964). Studies in inquiry training. In R. Ripple & V. Bookcastle(Eds.), *Piaget reconsidered.* Inthaca, NY: Cornell University.

Zawojewski, J. S. & Lesh, R. (2003). A models and modeling perspectives on problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr(Eds.), *Beyond constructivism : Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*(pp.317-336). Lawrence Erlbaum Associates.