韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 2호, 2005. 7. 345-362

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 2, Jul. 2005. 345-362

수학교사를 위한 보조자료인 러시아의 '교수학적 자료'에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)[1]

본 연구에서는 러시아에서 출판된 중등학교 수학교사용 보조자료인 교수학적 자료의 목적, 구조, 내용을 분석하여, 수학교사가 효율적인 수학 교수-학습을 구성하는데 도움을 줄 수 있는 참고도서의 내용 및 구성에 관련된 다양한 관점을 도출하였으며, 러시아의 구체적인 자료들을 제시하였다. 특히, 본 연구의 결과는 수학교과서의 교사용지도서 체제나 내용을 개선하고 새로운 수학교사용 참고도서를 개발하기 위한 기초자료가 될 것이다.

1. 서 론

제 7차 수학과 교육과정의 개정 방향 중의 하나인 '다양한 교수・학습과 평가 방법을 활용하는 수학교육'에 관련하여 교육과정해설서(교육부, 1999, p.6)에는 '동일한 목표와 내용을 학생에게 지도함에 있어서, 그 교수・학습 방법에 따라 학습의 효과는 매우 다를 수 있으므로 학습의 효과를 높이기 위해서는 학생의 능력과 여건을 충분히 고려하여 목표 도달을 위한 적합하고 다양한 교수・학습 방법을 강구하도록 해야 한다. ...평가방법 역시 객관식 선다형 일변도에서 벗어나, 주관식 지필검사, 포트폴리오, 프로젝트, 관찰 및 면담 등 과정 위주의 수행평가가 적극 활용되어야 한다'고 강조하고 있다. 수학과 교육과정의 이러한 개정 방향이 교수-학습 과정에서 성공적으로 구현되기 위해선, 다양한 수학 교수-학습 방법 및 평가에 관련된 질적인 자료들이 체계적으로 개발되어 교사들에게 보조자료로 제공되어야 할 것이다.

수학 교수・학습 및 평가를 준비하면서 수학교사가 활용할 수 있는 대규모의 출판자료들로는 수학교과서, 수학교과서의 교사용지도서, 수학문제집 등을 들 수 있다. 한편, 소규모로 출판되는 전문연구기관의 연구보고서, 교육청 또는 중등학교에서 수학 교수-학습 및 평가에 관련하여 개발된 자료 등도 수학교사가 활용할 수 있지만, 이들 자료는 접근가능성이라는 측면에서 한계를 가진다.

수학교과서, 교사용지도서, 수학문제집에 대한 국내의 연구들을 살펴보면, 수학교과서의 문제점, 구성 방향, 교과서 체계에 관련된 연구들(김홍기, 2001; 황혜정, 2000; 한인기, 2004 등), 수학교과서의 국제 비교 연구들(최택영・김인영, 1998; 박문환, 2002; 박경미・임재훈, 2002; 이용곤・신현용・서보억, 1995; 한인기・신현용・서보억, 1995 등), 수학교과서에서 교과 내용의 연계성, 사용되는 정의, 교

1) 경상대학교 수학교육과 교수/ 경상대학교 교육연구원 책임연구원

과 내용의 분석 연구들(송순희 · 김윤영, 1998; 박경미, 2000; 조영미, 2002; 한인기, 2005 등)을 들 수 있다. 이들 연구는 모두 수학교과서에 관련된 연구로, 수학교과서의 다양한 측면을 진지하게 고찰하여 수학 교수-학습의 개선을 모색하였다는 측면에서 그 의의를 찾을 수 있을 것이다. 그런데, 수학교과서는 집필, 발행되는 쪽수가 제한되어 있으며, 교육과정의 개정에 상응하여 집필, 발행되기 때문에 새롭게 연구, 개발된 다양한 교수-학습 자료를 반영하는데 한계를 가진다.

한편, 수학교과서의 교사용지도서는 상응하는 수학교과서를 중심으로 다양한 교수-학습 및 평가의 자료를 폭넓게 제시하려고 시도한다는 측면에서 교육적으로 큰 의미를 둘 수 있지만, 수학교과서의 교사용지도서의 구성, 내용에 대한 체계적인 학술적 연구가 없는 것은 안타까운 일이라 할 것이다. 그리고, 수학문제집은 수학교사를 위한 자료이라기 보다는 학생들을 목표로 집필되므로, 수학교사가 교육적 의도를 가지고 활용하는데는 한계를 가진다.

러시아에서 수학교사가 교수-학습 및 평가를 관련하여 참고하는 대규모의 출판물로는 수학교과서, 수학교과서의 교사용 참고서, 교수학적 자료, 수학문제집 등을 들 수 있다. 이들 중에서 특히 주목할 만한 것이 교수학적 자료이다. Gusev & Medyanik(1995, p.3)은 '교수학적 자료의 기본적인 목적은 교사가 수업 혹은 방과후에 학생의 독립작업을 조직하는데 도움을 주고, 학생의 수학적 지식에 대한 깐뜨롤라야 라보따[2]를 구성하는데 도움을 주는 것이다'라고 하였다. 이로부터, 교수학적 자료는 수학교과서를 중심으로 교과내용을 설명한 후에, 교사가 학생들의 독립작업을 구성하고 학생들의 획득된 지식에 대한 평가활동(깐뜨롤라야 라보따)을 조직하는데 도움을 주기 위한 목적으로 출판된다는 것을 알 수 있다. 우리나라에서는 교사용지도서가 유사한 목적을 가지고 출판되지만, 교사용지도서에 기술된 대부분의 내용이 상응하는 수학교과서에 제시된 문제의 풀이임을 감안하면, 그 성격과 목적이 약간 다르다고 할 수 있다.

본 연구에서는 러시아에서 출판된 중등학교 수학의 교수학적 자료의 목적, 구성, 내용을 분석하여, 수학교사가 효율적인 수학 교수-학습을 구성하는데 도움을 줄 수 있는 참고도서의 내용 및 구성에 관련된 다양한 관점을 도출할 것이다. 본 연구를 통해 얻어진 결과는 수학교과서의 교사용지도서의 내용을 개선하거나 새로운 형태의 수학교사용 참고도서를 개발하기 위한 기초자료가 될 것이다.

2) 영어로는 'control work'로 번역된다. 러시아의 중등학교에서 이루어지는 평가의 유형을 크게 '깐뜨롤라야 라보따', '자춧', '에그자민'으로 나눌 수 있다. 일반적으로, 자춧은 세미나 형태의 수업이나 실습중심의 수업을 일정기간 진행한 후에, 학생들의 능력, 기능, 지식의 수준을 평가하기 위해 이루어진다. 자춧에서는 평점은 주어지지 않고, pass나 fail만이 판정된다. 한편, 구체적인 평점이 주어지는 평가의 형태로 '깐뜨롤라야 라보따'와 '에그자민'을 들 수 있다. 러시아의 중등학교에서 '에그자민'은 일반적으로 국가자격시험(졸업시험이라고 할 수 있으며, 9학년말과 11학년말에 치룸)과 대학교 입학시험을 의미한다. '깐뜨롤라야 라보따'는 우리나라의 중간고사, 기말고사와 같은 평가를 포함하며, 러시아에서 중등학교의 교수-학습과정에서 이루어지는 가장 일반적인 형태의 평가라 할 수 있다. 학생들에 대한 '깐뜨롤라야 라보따'는 학습주제를 마친후에 또는 각 분기별로 또는 학기말에 이루어진다.

2. 러시아에서 수학교사를 위한 보조자료들

러시아의 수학교사가 교수-학습 및 평가를 관련하여 참고하는 대규모의 출판물로는 수학교과서, 수학교과서의 교사용 참고서, 교수학적 자료, 수학문제집 등을 들 수 있다. 이들 중에서 수학교과서의 교사용 참고서, 교수학적 자료, 수학문제집의 성격을 살펴보고, 이들의 차이점을 살펴보자.

(1) 수학교과서의 교사용 참고서

러시아에서 수학교과서에 대한 교사용 참고서들은 그 명칭은 다양하지만, 해당 교과서의 교수-학습에 대한 교수방법론적 권고들이라고 일반적인 성격을 규정할 수 있다. Aleksandrov, Verner & Ryzik(1991, 1992)의 심화학급용 기하교과서인 '기하학 8-9', '기하학 10-11'에 대한 교사용 참고서는 명칭이 각각 '8-9학년 기하학 심화학습', '10-11학년 기하학 심화학습'이지만, 책의 부제로 각각 'Aleksandrov, Verner & Ryzik의 심화학급용 기하교과서 8-9의 교수-학습에 대한 교수방법론적 권고들', 'Aleksandrov, Verner & Ryzik의 심화학급용 기하교과서 10-11의 교수-학습에 대한 교수방법론적 권고들'이라고 기술되어 있다. 한편, Sharygin(1997)의 기하교과서에 대한 교사용 참고서의 명칭은 '기하학'이며, 부제로 'Sharygin의 기하교과서에 대한 교수방법론적 도움'이라고 기술되어 있다. Atanacyan 외 4인(1996)의 7-9학년용 기하교과서에 대한 교사용 참고서의 명칭은 '7-9학년에서 기하학의 학습'이며, 부제로 '교과서에 대한 교수방법론적 권고들'이라고 명명되어 있다. 한 가지 특이할 만한 것은 Pogorelov(1996)의 기하교과서에 대해서는 교수방법론적 권고를 포함하는 교사용 참고서가 발행되지 않고, 교과서 저자인 Pogorelov에 의해 교과서 문제의 풀이집이 발행되었다는 점이다.

이제, 교사용 참고서의 저자들을 살펴보자. Aleksandrov, Verner & Ryzik(1991, 1992)의 심화학급용 기하교과서의 교사용 참고서는 8-9학년용은 Okynev(1996)에 의해 저작되었고, 10-11학년용은 Papovski(1993)에 의해 저술되었다. 즉, Aleksandrov, Verner & Ryzik의 심화학급용 기하교과서에서는 교과서 저자와 교사용 참고서의 저자가 다르다. 그러나, 많은 경우에는 교과서의 저자와 교사용 참고서의 저자가 같다. 예를 들어, Sharygin의 기하교과서에 대한 교사용 참고서는 Mishenko & Sharygin(2001)에 의해 저술되었고, Atanacyan 외 4인은 기하교과서와 교사용 참고서를 함께 저술하였다. 살펴본 바와 같이, 러시아에서 교과서와 교사용 참고도서는 동일 저자에 의해 저술되는 경우가 많지만, 교과서의 저자와는 다른 저자에 의해 교사용 참고도서가 저술되는 경우도 있다.

교사용 참고서의 내용을 살펴보자. 이미 기술한 것과 같이, Pogorelov는 자신의 교과서에 제시된 문제의 풀이만을 모아서 교사들이 참고할 수 있는 풀이집을 출판하였지만, 다른 교과서들의 교사용 참고도서에는 교과서에 제시된 문제의 풀이와 함께 다양한 내용이 제시되어 있다. 예를 들어, Atanacyan 외 4인(1997)의 교사용 참고서에는 각 주제별 교수-학습에 필요한 예상 수업 시간수가 제시되고, 대단원 및 학습주제별로 수학사적 배경, 수학적 배경이 상세히 기술되며, 각각의 학습주제에 대한 독립작업 문제들(교과서에 제시된 문제와는 다른), 각 주제에 대해 학생들에게 요구되는 지

식, 기능, 능력들이 기술되어 있다. 그리고, 대단원이 끝날 때마다 학생에 대한 깐뜨롤라야 라보따가 4-5조 정도 제시되어 있는데, 각 조에는 해당 학습내용에 관련된 평가문항이 1-4개가 포함된다.

Aleksandrov, Verner & Ryzik의 심화학급용 기하교과서에 대한 교사용 참고서에는 각 대단원별로 교수-학습과정에서 염두에 두어야 할 교수방법론적 권고들, 교과서에 따른 수업계획(각 학습주제별로 이전 학습내용과의 연계성, 수업 시수 등), 독립작업 문제들, 깐뜨롤라야 라보따가 제시되어 있다. 그리고, 교과서에 제시된 모든 문제의 풀이가 제시되며, 교사를 위한 참고도서의 목록도 기술되어 있다.

Sharygin의 기하교과서에 대한 교사용 참고서에는 각 주제별 수업 시간수, 학습의 결과로 학생들에게 요구되는 수학적 지식들, 능력들이 기술되며, 교과서 문제의 풀이들, 숙제를 위한 문제들, 독립작업을 위한 문제들, 깐뜨롤라야 라보따가 제시된다. 한 가지 특이할 만한 점은 교사용 참고서에 수업 설계에 대한 예시가 제시되었는데, 여기에는 교과서의 문제들 중에서 수업시간에 풀어야 할 문제들, 숙제로 제시될 문제들이 체계적으로 분류, 정리되어 있다는 점이다.

살펴본 바와 같이, 러시아의 교사용 참고서에는 학습주제별 수업 시간수, 학습의 결과로 학생들에게 요구되는 수학적 지식들, 능력들, 교과서 문제의 풀이, 독립작업 문제들, 깐뜨롤라야 라보따가 공통적으로 기술되어 있음을 알 수 있다.

(2) 교수학적 자료

교수학적 자료의 저자는 수학교과서의 저자들 또는 저자의 일부가 발행하는 경우와 수학교수학 전문연구자가 발행하는 경우로 나눌 수 있다. 수학교과서의 저자들 또는 저자의 일부가 수학교과서에 대한 교수학적 자료를 발행하는 경우로, 8-9학년 대수의 교수학적 자료를 저술한 Makarychev & Mindyuk(2001a, 2001b)는 상응하는 학년 대수교과서의 저자들의 일부이며, 10-11학년 대수와 기초해석의 교수학적 자료를 저술한 Ivlev, Saakyan & Shvartsburd(2001, 2002)중에서 Ivlev와 Shvartsburd는 상응하는 학년의 대수와 기초해석 교과서의 저자들의 일부이며, 9학년 기하학의 교수학적 자료를 저술한 Ryzik & Okunev(1999)중에서 Ryzik은 상응하는 학년의 기하학 교과서의 저자들의 일부이다[3]. 한편, 수학교과서의 저자가 아닌 수학교수학자에 의해 저술된 교수학적 자료들을 살펴보면, Pogorelov의 기하학 교과서에 상응하는 교수학적 자료를 7-9학년 내용은 Gusev & Medyanik(1992, 1993, 1995)에 의해 저술되었고, 10-11학년의 내용은 Veselovski & Ryabchinskaya(2000, 2001)에 의해 저술되었다. 그리고, Atanacyan 외 4인의 기하학 교과서에 대한 교수학적 자료는 Ziv(2001, 2002a, 2002b)와 Ziv & Meiler(2002)에 의해 저술되었다. 살펴본 바와 같이, 교수학적 자료의 저자는 상응하는 수학교과서의 저자들 또는 저자들의 일부, 수학교수학 전문연구자임을 알 수 있다.

교수학적 자료는 저자서문, 독립작업과 깐뜨롤라야 라보따를 포함한 다양한 문제들, 풀이 및 정답,

---

3) 러시아의 수학교과서는 우리의 교과서처럼 수학적 개념, 내용의 배열 순서가 모두 같지 않다. 그러므로, 단원의 배열 순서가 학년 내에서 또는 학년간에 차이가 있을 수 있다. 그래서, 교수학적 자료의 머리말에 보면, 교수학적 자료가 어떤 교과서에 학습 내용 배열 순서에 상응하는가가 명시되어 있다.

교수학적 자료에 제시된 문제들과 교과서 단원의 연계성으로 구성되어 있다. 교수학적 자료에는 수학 내용에 대한 어떤 설명이나 교수-학습 방법에 대한 어떤 권고도 제시되지 않는다는 점에서 수학 교과서나 교사용 참고서와 구별된다. 한편, 교수학적 자료는 제시된 문제의 수준에 의해 수학문제집들과 구분된다. 교수학적 자료는 교사가 학생들의 독립작업과 깐뜨롤라야 라보따를 조직하는데 도움을 주기 위한 목적을 가지므로, 제시된 문제들이 수학교과서에 제시된 문제와 유사한 수준의 것들이 많다. 그러나, 러시아의 수학문제집은 대부분 수학경시대회나 본고사를 준비하기 위한 문제들이 제시된다(러시아의 대입제도는 대학별 본고사의 형태임).

(3) 수학문제집들

러시아의 중등학생용 수학문제집은 크게 원천적인 문제를 포함하는 문제집들과 대학 입학시험 대비 문제집들로 나눌 수 있다. 원천적인 문제들을 포함하는 문제집들은 수학경시대회를 준비하기 위해 학생들이 참고하며, 그 저자는 대부분 수학자들로 Prasolov(2001), Sharygin(1984, 1986), Shahno(1967), Berezanskaya, Kolmogorov, Naribin & Cherkasov(1962) 등을 들 수 있다. 이들 문제집에는 수학의 이론적인 내용에 대한 어떤 설명도 제시되지 않으며, 문제집의 저자가 나름대로 발명하거나 모아서 체계화한 문제들과 풀이가 나열되어 있다.

한편, 러시아의 대학 입학시험은 각 대학별로 본고사의 형태로 치루어 지므로, 대학 입학시험 대비 문제집에는 각 대학의 기출문제의 소개 및 풀이, 예상문제의 제시 및 풀이가 주를 이룬다. 그런데, 이들 문제집 중에는 중등학교 수학의 개념들에 대한 설명이 함께 제시되는 경우도 많이 있다. 대학 입학시험 대비 문제집의 예로는, Skanabi(2004), Vavilov 외 3인(1990), Boltyanski, Sidorov & Shabunin(1974)를 들 수 있다.

3. 교수학적 자료의 목적 및 내용

교수학적 자료는 저자서문, 다양한 문제들, 풀이 및 정답, 제시된 문제들과 교과서 단원의 연계성 제시 등으로 구성된다. 교수학적 자료에 제시된 다양한 문제들은 저자에 따라, 그 유형에 차이가 있지만, 모든 교수학적 자료에는 학습자의 독립작업을 위한 문제들과 깐뜨롤라야 라보따를 위한 문제들이 반드시 포함되어 있다.

이미, 교수학적 자료의 목적은 교사가 학생의 독립작업을 조직하거나 학생에 대한 깐뜨롤라야 라보따를 구성하는데 도움을 주는 것이라는 Gusev의 주장을 살펴보았다. 좀더 구체적인 견해를 Ryzik & Okunev(1999, p.5)에서 볼 수 있는데, '전통적으로 교수학적 자료는 독립작업과 깐뜨롤라야 라보따를 포함하는데, 이들은 학습과정의 서로 다른 시간속에서 학생에 대한 평가작업을 가능하게 하여, 결국 학습 자료의 터득 수준을 관리할 수 있도록 한다'고 했다. 즉, 교수학적 자료는 학습의 각 단계에서 교사들이 학생들의 학습(터득) 수준을 계속적으로 점검, 관리할 수 있도록 하는 기본 자료를 제공하는 것을 목적으로 함을 알 수 있다.

교수학적 자료에 포함된 문제의 유형을 살펴보자. Ziv(2002a)의 9학년용 기하학의 교수학적 자료에는 독립작업, 반복활동, 수학 받아쓰기[4], 깐뜨롤라야 라보따, 몇몇의 고난이도 문제들, 풀이 및 정답이 제시되어 있으며, Ziv의 다른 학년용 교수학적 자료에도 제시된 문제의 유형은 같다. Ryzik & Okunev(1999)의 9학년용 기하학의 교수학적 자료에는 독립작업, 깐뜨롤라야 라보따, 창의적인 학습의 문제들, 풀이 및 정답이 제시되어 있으며, Rÿzik(2000)에는 독립작업과 깐뜨롤라야 라보따, 풀이 및 정답만이 제시되어 있다. Ivlev, Saakyan & Shvartsburd(2001)에는 독립작업, 복습활동, 깐뜨롤라야 라보따, 에그자민을 위한 문제들, 자춧을 위한 문제들, 풀이 및 정답이 제시되어 있다. Gusev & Medyanik(1995)에는 독립작업, 차등화된 과제, 깐뜨롤라야 라보따, 보충문제들, 풀이 및 정답이 제시되어 있다. Zvavich, Kuznetsova & Suvorova(1995)에는 독립작업, 깐뜨롤라야 라보따, 총괄 깐뜨롤라야 라보따, 학교 올림피아드를 위한 문제들, 풀이 및 정답이 제시되어 있다. 교수학적 자료에 제시된 문제들의 유형 및 목적, 특징, 내용을 구체적으로 살펴보자.

(1) 독립작업

Gusev & Medyanik(1995, p.3)은 '독립작업은 해당 학년의 학생들이 바로 전에 학습한 내용에 대한 독립적인 문제해결을 교육시키고, 학습 내용을 반복시키고 정착시키는 것을 촉진한다. 독립작업에 제시된 문제들은 개인별 숙제로도 사용될 수 있다'고 하였다. 즉, 독립작업에 제시된 문제들의 기본 목적은 학습 내용을 반복, 정착시키고, 독립적인 문제해결 활동을 조직하는 것으로, 학급에서 또는 학생 개개인에 대한 숙제로서 활용됨을 알 수 있다. 일반적으로, 각각의 독립작업은 10-15분 정도의 시간으로 계획된다. 한편, Ryzik & Okunev(1999, p.6)는 '독립작업의 방향들 중의 하나로 수학의 성공적인 학습을 위해 필요한 재능의 새로운 수준을 형성하는 것을 들 수 있다'고 하였다. Ryzik & Okunev의 주장에서는 Gusev & Medyanik의 주장을 좀더 구체화하여, 독립작업에서는 학생 스스로의 문제해결 활동을 통해, 학습에 필요한 수학적 재능의 요소들을 형성하고 계발해야 한다는 것을 주장하고 있다.

한편, Ziv(2002a, p.3)는 '독립작업의 기본 목적은 교사가 학생들의 개인차, 준비수준을 고려하여 학생들의 문제해결 활동을 조직하는데 도움을 주기 위한 것'이라고 주장하였다. Ziv의 주장에서 주목할 만한 것이 학생들의 개인차를 고려한 문제해결 활동의 조직을 고려한다는 것이다. 이것은 현재 러시아의 수학교육학연구에서 학생들의 개인차를 고려하는 차등화된 수학교육이 중요한 연구 방향이라는 사실과 관련하여 생각할 수 있다. 그런데, 수학교육학 연구의 성과가 수학교과서에 반영되기 위해선

4) Ziv(2002a, p.4)에 의하면, '수학 받아쓰기는 학생들의 이론적 지식을 체계화시키기 위한 것으로, 깐뜨롤라야 라보따에 선행하여 제시할 수 있다. 수학 받아쓰기에는 이론의 직접적인 활용에 관련된 몇몇 문제들이 제시된다'고 하였다. Ziv(2002a, p.68)의 연구에 제시된 수학 받아쓰기의 문제를 살펴보면 다음과 같다:

1. 삼각형 ABC에서 AB=1, BC=2, $\angle A=20^\circ$, $\angle C=10^\circ$이다. 삼각형의 넓이를 구하여라.
2. 마름모의 변의 길이가 2㎝이고 넓이가 2㎠이다. 마름모의 예각을 구하여라.
3. 삼각형 ABC에서 $\angle A=30^\circ$, $\angle B=45^\circ$이다. 변 AB와 AC의 비를 구하여라.

비교적 체계적이고 폭넓은 연구와 상대적으로 긴 시간이 필요하다. 하지만, 집필 및 발행에서 수학교과서에 비해 유연성과 간편성을 가진 교수학적 자료는 수학교육학 분야의 다양한 최근의 연구 결과를 수학교실에 도입, 활용하는 측면에 있어 커다란 장점을 가질 수 있다.

수학교실에서 차등화된 접근을 위해, Ziv는 독립작업에 여덟 가지 유형의 문제를 제시하고 있다. Ziv(2002a, p.3)에 의하면, '첫 번째와 두 번째 유형의 문제를 성공적으로 해결하기 위해, 학생들은 교육과정의 최소 필수 수준에 해당하는 지식을 사용해야 한다. 세 번째와 네 번째 유형의 문제들은 중간 수준의 난이도를 가진 것들이다. 이들 문제를 해결하기 위해서는 정형적인 상황에서 개념들을 변별하며, 정형적인 상황 또는 약간만 변형된 상황에서 지식들을 사용할 수 있어야 한다. 이들 유형의 문제의 난이도는 교과서에 제시된 일반적인 문제의 난이도에 상응된다. 다섯 번째와 여섯 번째 유형의 문제들은 잘 준비된 학생들을 위한 것이다. 이들 유형의 문제를 풀려면, 복잡한 상황에서 지식들을 사용할 수 있는 능력이 요구되며, 충분히 높은 수준에서 계산 기능의 계발, 항등변환 기능의 계발이 요구된다. 이들 문제의 난이도는 교과서에서 가장 어려운 문제들의 난이도에 상응된다. 일곱 번째와 여덟 번째 유형의 문제를 해결하기 위해선, 수학적 지식의 창의적 활용이 요구된다. 여기서는 복잡하고 비정형적인 기하학적 상황을 분석하고, 새로운 사실들을 독자적으로 발명하고, 이러한 사실들 사이의 관계를 확인해야 한다. 이들 문제의 난이도는 교과서에 가끔 제시되는 '고난도의 문제' 단원의 문제의 난이도에 상응된다'고 하였다. 살펴본 바와 같이, Ziv는 한 학급에서 같은 교육과정으로 배우는 학생들의 개인차를 고려하는 수학교육의 구현을 하기 위해, 다양한 유형의 독립작업 문제들을 제시하였다. 이러한 접근을 한인기(2004)는 수준별 차등화라고 하였다.

독립작업에서 수준별 차등화를 구현하기 위한 다른 시도로, Gusev & Medyanik(1992, 1993, 1995)는 독립작업을 네 가지 유형의 문제들로 분류하여 제시하였으며, 첫 번째 유형은 가장 단순한 문제들이고, 두 번째와 세 번째 유형은 중간 정도의 난이도를 가지며, 네 번째 유형에는 가장 어려운 문제들을 제시하였다. 특히, 수학교실에서 독립작업의 구성에 관련하여, Gusev & Medyanik(1995, p.4)은 '...각각의 독립작업을 구성할 때에, 이들 유형의 문제들을 적절하게 안배하여 모든 학생(예외없이) 개개인의 재능을 계발할 수 있도록 해야 한다. 그러한 안배의 기준은 독립작업이 각 학생의 힘에 맞는, 즉 독립작업이 학생에 의해 수행될 수 있는, 그러나 수행을 위해서 노력과 긴장을 필요로 해야한다는 것이다'고 하였다. 이와 같은 맥락에서, Gusev(2004)는 수준별 차등화에서 학습내용의 구성 및 조직을 Vygotski의 근접발달영역과 관련시켰다.

대수영역의 교수학적 자료에서도 수준별 차등화를 구현하기 위한 유사한 접근을 볼 수 있다. Makarychev, Mindyuk & Korotkova(2002)는 독립작업을 두 가지 변형으로 나누어 제시하고, 각 변형의 독립작업을 다시 두 블록으로 나누었다. Makarychev, Mindyuk & Korotkova(2002, p.3)에 의하면, '첫 번째 블록의 문제들은 정형적인 연습의 문제들이고, 두 번째 블록의 문제들은 첫 번째 블록에 비해 알고리즘적인, 논리적인 측면에서 좀더 난이도가 높은 문제들로 구성되어 있으며, 이들은 학생들의 계발을 촉진하는 문제들이다'고 하였다. Makarychev, Mindyuk & Korotkova의 독립작업은 앞에서 살펴본 Ziv나 Gusev & Medyanik의 독립작업보다 다양한 유형의 문제들로 구분되지는 않았

지만, 대수영역에서 수준별 차등화를 구현하기 위한 학습자료를 교사들에게 제공하고 있다는 측면에의 의의를 찾을 수 있다.

(2) 깐뜨롤라야 라보따

깐뜨롤라야 라보따는 러시아의 중등학교의 교수-학습과정에서 이루어지는 일반적인 평가의 총칭이라고 할 수 있다. 교수학적 자료에 기술된 것들을 중심으로 깐뜨롤라야 라보따의 시행시기, 구성상의 특징 등을 살펴보자.

Ziv(2002a, p.4)에 의하면, '깐뜨롤라야 라보따는 네 가지 변형으로 제시되어 있다. 이들은 수학교과서의 네 장 각각에 대한 지식의 종합적인 확인, 기하학 전체 과정에 대한 종합적인 확인을 위한 것이다. 모든 변형의 난이도는 대략적으로 모두 같다'고 하였다. 이로부터, 수학교실에서 깐뜨롤라야 라보따는 수학교과서의 각 장을 학습한 후에, 학기나 학년을 마친 후에 수행함을 알 수 있다. 그러나, 깐뜨롤라야 라보따를 수행하는 시기가 Ziv의 사례와 같이 고정된 것은 아니며, 학습 주제에 따라, 학교의 여건에 따라 가변적이다. 예를 들어, Makarychev & Mindyuk(2001a)에서는 '집합과 실수', '수의 나누어 떨어짐'의 단원의 경우에는 단원이 끝난 다음에 깐뜨롤라야 라보따를 하도록 권고하지만, '이차방정식' 단원에서는 한 단원에 두 번의 깐뜨롤라야 라보따를 권고하고 있다. '이차방정식' 단원에서 소주제인 이차방정식과 근, 근의 공식에 의한 이차방정식의 풀이, 이차방정식을 활용한 문제해결, 근과 계수의 관계, 근들에 대해 대칭인 식들을 배운 후에 첫 번째 깐뜨롤라야 라보따를 하고, 이차방정식의 탐구, 유리방정식의 풀이, 유리방정식을 활용한 문제해결을 다룬 후에 두 번째 깐뜨롤라야 라보따를 하도록 하였다.

깐뜨롤라야 라보따의 구성에 대해 살펴보자. Gusev & Medyanik(1995)는 깐뜨롤라야 라보따의 구성에서 고려해야 하는 몇몇 측면을 제시하였다. 첫 번째로, 깐뜨롤라야 라보따가 교육의 필수적인 결과들 중에서 어떤 것을 확인하는가가 명확해야 한다. 이와 관련하여, 깐뜨롤라야 라보따를 구성하는 교사는 이러한 필수적인 수준에 상응하는 자료에 대한 분명한 생각을 가지고 있어야 한다. Gusev & Medyanik는 교수학적 자료의 앞부분에 이러한 필수적인 결과들을 명시하고 있다. 두 번째, 교육의 필수적인 결과 수준을 반영하는 문제들은 학생들이 해결하는 과정에서 어떤 방법들을 터득하지 못했는가를 명확하게 보여줄 수 있어야 한다. Gusev & Medyanik의 교수학적 자료에서 이들 문제는 번호에 동그라미가 그려져 있어, 다른 문제들로부터 구별된다. 세 번째, 교사는 깐뜨롤라야 라보따에서 '우'나 '수'의 평점에 해당하는 문제에 요구되는 수준을 명확히 알아야 한다. 물론, 이들 문제는 비정형적이고 창의적인 성격의 것들이다.

살펴본 바와 같이, 깐뜨롤라야 라보따의 구성에서 교사가 교육과정의 필수적인 수준과 좀더 높은 난이도의 문제에 대한 명확하게 인식하는 것이 중요하다. 이와 관련하여, Makarychev, Mindyuk & Korotkova(2002, p.4)는 '깐뜨롤라야 라보따에는 네 가지 변형이 제시되어 있다. 각 변형에는 필수적인 수준에 상응하는 문제들과 난이도가 높은 문제들이 포함되어 있다. 필수적인 수준의 문제에는 문제의 번호 앞에 동그라미가 표시되어 있다'고 기술하였다. 결국, 러시아에서는 교수학적 자료를 통해

학생평가를 위한 구체적인 자료와 정보를 교사들에게 체계적이고 구체적으로 제공하고 있음을 알 수 있다.

7학년 기하학의 깐뜨롤라야 라보따의 구체적인 예를 Gusev & Medyanik의 교수학적 자료에서 살펴보자. Gusev & Medyanik의 교수학적 자료에는 '평이한 기하학적 도형의 기본 성질들', '보각과 맞꼭지각', '삼각형의 합동조건', '삼각형의 각들의 합'에 대한 깐뜨롤라야 라보따가 제시되어 있는데, 각각의 주제마다 네 가지 변형(같은 유형인)의 깐뜨롤라야 라보따가 제시되어 있다. 네 가지 주제 각각에 대한 깐뜨롤라야 라보따를 제시하면 다음과 같다(Gusev & Medyanik, 1995, pp.43-51).

주제 1. 평이한 기하학적 도형의 기본 성질들

1°. 점 C는 선분 AB에 속하고, AC=10cm, CB=5cm이다. 선분 AB의 길이를 구하여라.

2°. 반직선 c는 반직선 a와 b사이를 지난다. $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=10°$이다. $\angle(ab)$를 구하여라.

3. 길이가 20cm인 선분 AB에 점 M을 표시하였다. (a) 선분 AM은 선분 MB보다 5cm가 더 길다. 선분 AM, MB의 길이를 구하여라. (b) 선분 AM, MB의 중점들 사이의 거리를 구하여라.

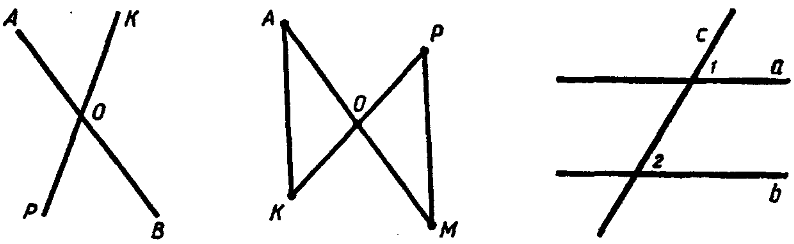
주제 2. 보각과 맞꼭지각

<그림 1>에 점 O에서 교차하는 두 직선 AB, KP가 있다.

1°. (a) 이들 교차하는 직선에 의해 만들어진 각들 중에서 보각들은 무엇인가? 대답을 설명하여라. (b) 그림에 제시된 각들 중에서 합동인 각들의 쌍을 나열하고, 이들이 같은 이유를 설명하여라.

2. $\angle KOB=5\angle AOK$이다. 각 AOK, KOB, BOP를 구하여라.

3. 각 AOK, BOP의 각도의 합은 180°보다 크다. 이들 각은 어떤 각들(예각들, 직각들, 둔각들)일 수 있는가?



<그림 1> <그림 2> <그림 3>

주제 3. 삼각형의 합동조건

1°. 삼각형 ABC와 PMK는 합동이며, AM=5cm, BC=10cm, $\angle C=36°$이다. 삼각형 PMK의 상응하는 변들, 각들을 구하여라.

2°. <그림 2>에서 선분 AM, KP는 점 O에서 교차하며, 점 O는 각 선분의 중점이다. 이때, PM=KA임을 증명하여라.

3. 점 M, K는 각각 밑변이 AB인 이등변삼각형의 옆변 AC, BC의 중점이다. 이때, AK=BM을 증명하여라.

주제 4. 삼각형의 각들의 합

1°. <그림 3>에서 평행한 직선 a, b와 직선 c가 교차하며, $\angle 1=22^{\circ}$이다. $\angle 2$를 구하여라.

2°. 삼각형 ABC에서 $\angle A+\angle B=100^{\circ}$이다. 각 C를 구하여라.

3. 삼각형 ABC에서 1, 2, 3은 삼각형의 내각이고, 4, 5, 6은 삼각형의 외각이다. (a) $\angle 1:\angle 2:\angle 3=1:2:3$이다. 이들 각을 구하여라. (b) $\angle 5+\angle 6=120^{\circ}$이다. $\angle 1$을 구하여라.

(3) 차등화된 과제

독립작업과 깐뜨롤라야 라보따를 분석하여, 러시아에서는 수학 교수-학습과정에 대한 차등화된 접근을 위해 다양한 노력을 기울이고 있음을 알 수 있었다. 수학교육에서의 차등적 접근에 관련된 또 다른 시도로, Gusev & Medyanik는 교수학적 자료에 '차등화된 과제'를 제시하고 있다.

Gusev & Medyanik(1995, p.5)에 의하면, '차등화된 과제는 독립작업의 자연스런 연장으로... 차등화된 과제는 전적으로 학생들의 논리적인 사고의 계발을 지향한다. ...교수학적 자료에 포함된 이들 차등화된 과제는 Pogorelov의 학교 기하학 체계의 엄밀한 연역적 구조를 학생들이 터득하는데 도움을 줄 것이다'라고 하였다. 즉, 차등화된 과제는 기하학의 엄밀한 구조의 터득, 논리적 사고의 계발을 지향하며, 학생들의 수학적 계발을 위한 차등화된 자료임을 알 수 있다.

Gusev & Medyanik의 교수학적 자료에는 세 가지 유형의 차등화된 과제가 제시되어 있다. 첫 번째 유형의 과제는 명제를 증명하는 형태의 네 가지 문제로 구성된다. 이때, 첫 번째 것은 평이한 증명 문제이며, 두 번째, 세 번째, 네 번째 문제로 진행하면서 증명의 난이도가 높아진다. Gusev & Medyanik(1995, p.6)에 의하면, '이 유형의 차등화된 과제들은 학생들의 집단 협력학습의 한 형태가 된다. 이 유형의 과제 수행에서 구별되는 특징은 집단에 포함된 모든 학생들이 동시에 과제의 수행에 참여한다는 것이다. ...이때, 각각의 학생이 과제를 수행하면서 높은 수준의 독립성을 보장하고, 전체 집단을 탐색활동을 이끌고, 얻어진 결과를 이해하도록 하며, 새로운 문제를 명료하게 설정하도록 하는 교사의 역할이 중요하다. 교사는 이 유형의 차등화된 과제를 수업에서도 활용할 수 있고 방과후 활동에서도 활용할 수 있다'고 하였다. 결국, 첫 번째 유형의 차등화된 과제는 집단(학급) 전체를 대상으로 하는 전체 수업의 형태로 운영되며, 이때 교사가 집단에 속한 학생 개개인의 가능성을 파악하여, 집단의 모든 학생이 제시된 문제들에 대한 적극적인 탐색 활동에 참여하도록 하는 것이 중요하다.

'이등변삼각형'을 주제로 Gusev & Medyanik(1995, p.39)에 제시된 첫 번째 유형의 차등화된 과제를 살펴보면 다음과 같다.

1. 선분 AB와 CD가 점 O에서 교차하며, 점 O는 각 선분의 중점이다. 각 ACO와 BDC가 합동임을 증명하여라.

2. 선분 AB와 CD가 점 O에서 교차하며, 점 O는 이들 선분의 중점이다. 그리고, $\angle ACD = \angle BCD$이다. 이때, 삼각형 BCD가 이등변삼각형임을 증명하여라.

3. 앞의 문제에서 직선 AB와 CD가 직교한다는 것을 증명하여라.

4. 삼각형의 중선이 각의 이등분선이면, 주어진 삼각형은 이등변삼각형임을 증명하여라.

두 번째 유형의 차등화된 과제는 주어진 명제에 대해 서로 다른 증명을 두 개씩 찾는 것이다. Gusev & Medyanik(1995, p.7)에 의하면, '이 유형의 과제는 소집단으로 나누어 수행하도록 할 수 있다. ...교사는 문제를 모든 학급의 학생들에게 제시하고, 그리고 나서 각각의 소집단에 대해 증명의 바탕이 되는 탐색 방향을 제시한다. 이때, 학생 스스로의 창의적인 탐색을 위해 몇몇 측면들을 남겨두는 것이 바람직하지만, 탐색의 기본 방향은 교사에 의해 명확하게 제시되어야 한다. 그리고, 소집단에서 과제가 수행된 다음에는 얻어진 모든 증명을 검토해야 한다'고 하였다.

'삼각형의 합동조건 활용'을 주제로 Gusev & Medyanik(1995, p.39)에 다음과 같은 두 번째 유형의 차등화된 과제가 제시되어 있다: 삼각형 ABC와 BAD가 합동이다. 이들의 변 AD와 BC는 점 O에서 교차한다. 삼각형 AOC와 BOD도 합동임을 증명하여라. 서로 다른 두 가지 증명을 찾아라.

세 번째 유형의 차등화된 과제는 한 문제로 구성되는데, 해결과정의 어려움이나 규모로 인하여 집단의 모든 학생이 힘을 합해야 하는 유형이다. Gusev & Medyanik(1995, p.7)에 의하면, '교사는 재량에 의해 학급을 수행 가능한 과제 탐구의 방향의 개수에 따라 소집단으로 나눌 수 있다. 이때, 전체 집단은 문제 자체를 이해해야 하며, 제시된 탐구 방향을 이해해야 한다. 과제 수행의 성공은 개개의 소집단에 대한 교사의 현명한 인도, 학생들이 수행한 작업에 대한 명료한 종합에 달려있다'고 하였다.

'삼각형의 각들의 합'을 주제로 Gusev & Medyanik(1995, p.40)에 다음과 같은 세 번째 유형의 차등화된 과제가 제시되어 있다: 밑변이 AB인 이등변삼각형 ABC를 선분 AD로 서로 다른 두 이등변삼각형 ACD, ABD로 분할하였다. 삼각형 ABC의 각들을 구하여라.

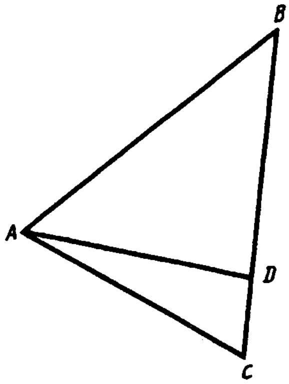
4. 중학교 기하영역에서 독립작업의 내용 분석

Ziv & Meiler(2002)의 7학년 교수학적 자료에 제시된 독립작업의 내용을 살펴보자. Ziv & Meiler(2002)의 연구에는 7학년의 기하학 과정에서 사용할 수 있는 26주제의 독립작업이 제시되어 있으며, 각 주제의 독립작업은 몇몇 개의 문제들로 구성되며, 각 주제별로 8가지 유형의 독립작업이 제시되어 있다. 주제 '삼각형의 중선, 각의 이등분선, 높이. 이등변삼각형의 성질'에 제시된 독립작업을 구체적으로 살펴보자.

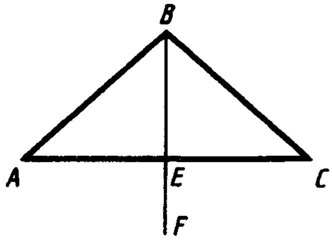
제 1유형

1. <그림 4>에 제시된 모든 삼각형에 대한 공통 높이를 작도하여라. 이들 삼각형 중에서 높이가 삼각형의 밖에 위치하는 것은 어떤 삼각형인가?

2. <그림 5>에서 $AB=BC$이고, BE는 삼각형 ABC의 중선이며, $\angle ABE=40°30'$이다. $\angle ABC$와 $\angle FEC$를 구하여라.



<그림 4>

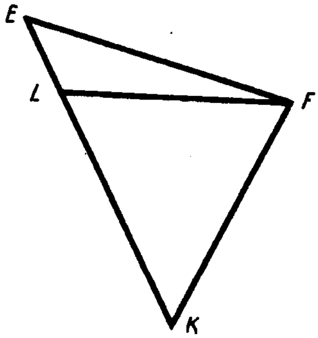


<그림 5>

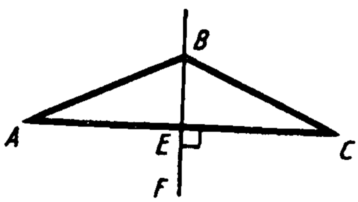
제 2유형

1. <그림 6>에 제시된 모든 삼각형에 대한 공통 높이를 작도하여라. 이들 삼각형 중에서 높이가 삼각형의 내부에 놓인 것은 어떤 삼각형인가?

2. <그림 7>에서 $AB=BC$이고, $\angle FEC=90°$, $AE=10cm$, $\angle ABC=130°30'$이다. AC와 $\angle EBC$를 구하여라.



<그림 6>



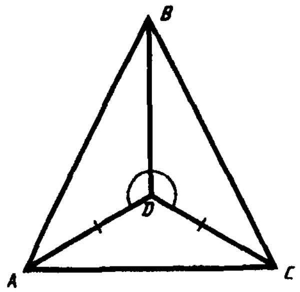
<그림 7>

제 1유형과 제 2유형의 문제 1은 높이의 정의를 직접 활용하는 문제이며, 문제 2는 이등변삼각형의 정의, 이등변삼각형의 성질(이등변삼각형에서 밑변에 그은 중선, 각의 이등분선, 높이가 일치함)을 직접 활용하여 해결할 수 있는 문제이다. 특히, 교수학적 자료에 유형 1의 문제 1과 유형 2의 문제 1, 유형 1의 문제 2와 유형 2의 문제 2와 같이 동일한 문제상황에 대한 변형된 문제를 제시함으로써, 주어진 문제상황에 대한 다양한 탐구 활동의 가능성을 교사와 학생에게 제공하였다.

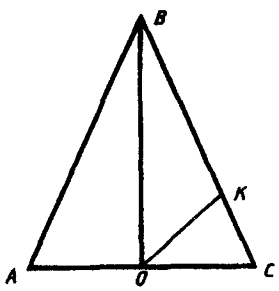
제 3유형

1. <그림 8>에서 $\angle ADB = \angle CDB$, $AD = DC$이다. 이때, $\angle BAC = \angle BCA$이고 $BD \perp AC$임을 증명하여라.

2. <그림 9>에서 $AB = BC$이고 $AO = OC$이며, OK는 삼각형 BCO의 각의 이등분선이다. 각 AOK를 구하여라.



<그림 8>

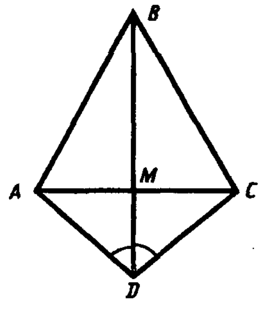


<그림 9>

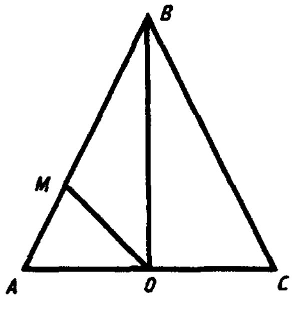
제 4유형

1. <그림 10>에서 $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$이다. 이때, $\angle BAC = \angle BCA$이고, $AM = MC$임을 증명하여라.

2. <그림 11>에서 $AB = BC$이고, OM은 삼각형 AOB의 각의 이등분선이고, $\angle MOC = 135°$이다. 이때, $\angle ABO = \angle OBC$임을 증명하여라.



<그림 10>



<그림 11>

제 1, 2유형의 문제에서는 수학적 지식의 직접적인 사용을 통해 문제해결에 이를 수 있었지만, 제 3, 4유형의 문제를 해결하기 위해선, 정형적인 상황에서 보조요소를 도입하거나 수학적 지식의 반복적인 활용이 필요하다. 예를 들어, 제 3, 4유형의 문제 1에서는 각각 보조요소로 삼각형 ADB와 CDB의 합동, DAB와 DCB의 합동을 이용해야 하며, 문제 2에서는 몇몇 정의, 정리들을 연속적으로 사용해야 한다.

제 5유형

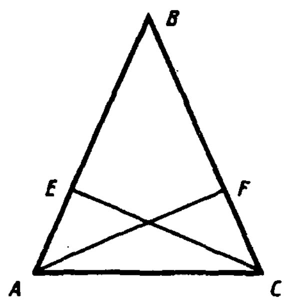
1. <그림 12>에서 AB=BC이고 AE=FC이다. 이때, ∠AEC=∠AFC임을 증명하여라.

2. 삼각형 ABC에서 변 BC를 꼭지점 C의 방향으로 연장하여 CA와 같은 선분 CD를 잡아, 점 A와 D를 선분으로 연결하였다. CE는 삼각형 ACB의 각의 이등분선이며, CF는 삼각형 ACD의 중선이다. 이때, CF⊥CE임을 증명하여라.

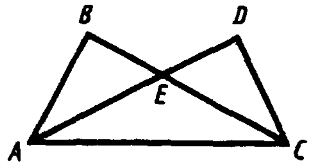
제 6유형

1. <그림 13>에서 AE=EC이고 BE=ED이다. 이때, ∠ACD=∠CAB임을 증명하여라.

2. 선분 AC의 서로 다른 쪽의 두 이등변삼각형 ABC와 ADC를 작도하였다. 이들 삼각형의 꼭지점을 직선 BD로 연결하였다. 이때, BD⊥AC임을 증명하여라.



<그림 12>



<그림 13>

제 5유형의 문제 1을 제 4유형의 문제 1과 비교해 보자. 두 문제 모두에서 두 각의 합동을 증명해야 하는데, 이를 위해서는 합동을 증명하려는 각을 각각 포함하는 삼각형을 보조요소로 찾아야 한다. 제 4유형의 문제 1에서는 각 BAC와 BCA을 포함하는 삼각형이 각각 DAB, DCB로 유일하게 주어지며, 이들의 합동을 증명하기 위한 충분한 정보가 주어졌다. 그런데, 제 5유형 문제 1의 <그림 12>에는 각 AEC와 AFC를 포함하는 삼각형이 각각 두 쌍이 존재하며, 삼각형 AEC와 CFA의 합동을 보이기 위해 이등변삼각형의 성질을 추가로 사용해야 한다. 제 6유형의 문제 1도 제 5유형의 문제 1과 같은 방법으로 해결할 수 있다.

제 7유형

삼각형 ABC에서 AB=BC=AC이다. 삼각형의 변에 AM:MB=BP:PC=CK:KA=1:3인 점 M, P, K를 잡았다. 이때, 삼각형 MPK가 정삼각형임을 증명하여라.

제 8유형

정삼각형 ABC의 변들을 선분 AM, CP, BK만큼 연장하여 MA:AB=PC:AC=BK:CB=2:1이 되도록 하였다. 이때, 삼각형 MPK가 정삼각형임을 증명하여라.

제 7유형과 제 8유형의 문제는 정삼각형의 변들에 점 M, P, K를 잡는가, 아니면 연장선에 잡는가에 의해 구별된다. 이와 유사한 문제들 사이의 관련성은 제 1, 2유형의 문제 1, 제 1, 2유형의 문제 2, 제 3, 4, 5, 6유형의 문제 1, 제 3, 4유형의 문제 2에서도 찾아볼 수 있다.

이들 문제를 상호관련된 문제의 사슬 구성의 측면에서 고찰할 수 있다. Dorofeev는 수학 교수-학습과정에서 상호관련된 문제의 사슬구성의 중요성을 강조하면서, '각각의 구체적인 문제는 내용, 논증방법, 사용된 개념에 따라 일정한 문제의 테두리를 가진다. 게다가, 각각의 문제는 그 문제의 각각의 속성에 관련된 테두리들의 족(family)에 속하며, 문제의 사슬을 구성하기 위해 다양한 테두리들의 족으로부터 어떤 테두리를 선택하는가는 구체적인 교수 상황에 의해 결정된다. 어떤 문제에 대한 테두리들의 족의 다양성은 그 문제의 폭넓은 활용가능성을 의미하며, 문제의 교수학적 가치를 결정하는 중요한 지표가 된다'고 하였다(1999, pp.209-210). 그리고, 어떤 문제의 테두리는 단순한 것으로부터 복잡한 것으로, 쉬운 것으로부터 어려운 것으로, 알려진 것으로부터 알려지지 않은 것으로의 순차적인 사슬로 구성되어야 한다(순차성의 원리; Krupich, 1985).

살펴본 바와 같이, Ziv & Meiler의 독립학습에 제시된 여덟 가지 유형에 속하는 문제들은 학생들의 개인차를 고려하는 차등화된 접근의 가능성을 제시함과 동시에, 각각의 문제가 가지고 있는 일정한 테두리를 교사와 학생에게 제시하면서 순차성의 원리에 따라 조직되어 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 러시아에서 출판된 중등학교 수학의 교수학적 자료의 목적, 구성, 내용을 분석하여, 수학교사가 효율적인 수학 교수-학습을 구성하는데 도움을 줄 수 있는 참고도서의 내용 및 구성에 관련된 다양한 관점을 도출하려 하였다. 이를 위해, 러시아의 수학교사를 위한 다양한 보조자료들(수학교과서의 교사용 참고서, 교수학적 자료, 수학문제집들), 교수학적 자료의 목적 및 내용, 독립학습 자료의 내용 분석을 수행하였다.

러시아에서 수학교사가 교수-학습 및 평가를 관련하여 참고하는 대규모의 출판물로는 수학교과서, 수학교과서의 교사용 참고서, 교수학적 자료, 수학문제집이 있다. 수학교과서의 교사용 참고서는 해당 교과서의 교수-학습에 대한 교수방법론적 권고들이라고 성격을 규정하였다. 러시아에서 교과서와 교사용 참고도서는 동일 저자에 의해 저술되는 경우가 많지만, 교과서의 저자와는 다른 저자에 의해 교사용 참고도서가 저술되는 경우도 있다. 교사용 참고서의 내용은 학습주제별 수업 시간수, 학습의 결과로 학생들에게 요구되는 수학적 지식들, 능력들, 교과서 문제의 풀이, 독립작업 문제들, 깐뜨롤라야 라보따가 공통적으로 기술되어 있다.

한편, 교수학적 자료의 저자는 수학교과서의 저자들 또는 저자의 일부가 발행하는 경우와 수학교수학 전문연구자가 발행하는 경우로 나눌 수 있으며, 저자서문, 독립작업과 깐뜨롤라야 라보따를 포함한 다양한 문제들, 풀이 및 정답, 교수학적 자료에 제시된 문제들과 교과서 단원의 연계성으로 구성되어 있다. 특히, 교수학적 자료에는 수학 내용에 대한 어떤 설명이나 교수-학습 방법에 대한 어떤

권고도 제시되지 않는다는 점에서 수학교과서나 교사용 참고서와 구별된다. 그리고, 교수학적 자료는 제시된 문제의 수준에 의해 수학문제집들과 구분된다. 교수학적 자료는 교사가 학생들의 독립작업과 깐뜨롤라야 라보따를 조직하는데 도움을 주기 위한 목적을 가지므로, 제시된 문제들이 수학교과서에 제시된 문제와 유사한 수준의 것들이 많지만, 수학문제집은 대부분 수학경시대회나 본고사를 준비하기 위한 문제들이 제시된다.

이제, 교수학적 자료의 목적 및 내용을 살펴보자. 교수학적 자료의 목적은 첫째, 교사가 학생의 독립작업을 조직하거나 학생에 대한 깐뜨롤라야 라보따를 구성하는데 도움을 주는 것이며, 둘째 학습의 각 단계에서 교사들이 학생들의 학습(터득) 수준을 계속적으로 점검, 관리할 수 있도록 하는 자료를 제공하는 것이다. 모든 교수학적 자료에는 독립작업, 깐뜨롤라야 라보따, 풀이 및 정답이 제시되며, 대부분의 교수학적 자료에서 수준별 차등화에 바탕을 둔 자료들이 제시되어 있다.

독립작업에 제시된 문제들의 목적은 학습 내용을 반복, 정착시키고, 독립적인 문제해결 활동을 조직하는 것으로, 학급에서 또는 학생 개개인에 대한 숙제로서 활용될 수 있다. 일반적으로, 각각의 독립작업은 10-15분 정도의 시간으로 계획된다. Ziv는 수학교실에서 차등화된 접근을 위해, 독립작업에 여덟 가지 유형의 문제를 제시하고 있다. 독립작업에서 수준별 차등화를 구현하는 다른 시도로, Gusev & Medyanik는 독립작업을 네 가지 유형의 문제들로 분류하여 제시하였다. 특히, 본 연구에서는 Ziv & Meiler의 독립작업 문제들을 분석하여, 독립학습에 제시된 문제들이 학생들의 개인차를 고려하는 차등화된 접근의 가능성을 제시함과 동시에, 각각의 문제가 가지고 있는 일정한 테두리를 교사와 학생에게 제시하면서 순차성의 원리에 따라 조직되어 있음을 밝혀냈다.

한편, 깐뜨롤라야 라보따는 러시아의 중등학교의 교수-학습과정에서 이루어지는 일반적인 평가의 총칭이라고 할 수 있다. 수학교실에서 깐뜨롤라야 라보따는 보통 수학교과서의 각 장을 학습한 후에, 학기나 학년을 마친 후에 수행하지만, 깐뜨롤라야 라보따를 수행하는 시기가 고정된 것은 아니며, 학습 주제에 따라, 학교의 여건에 따라 가변적이다. 깐뜨롤라야 라보따의 구성에서는 교사가 교육과정의 필수적인 수준과 좀더 높은 난이도의 문제에 대한 명확하게 인식하는 것이 중요하며, 교수학적 자료에서는 이에 관련된 구체적인 내용들을 폭넓게 제시하고 있었다.

Gusev & Medyanik는 교수학적 자료에서 수학교육의 차등적 접근을 위해 '차등화된 과제'를 독립된 단원으로 제시하였다. 차등화된 과제에서는 독립작업을 확장시키고, 학생들의 논리적인 사고의 계발을 지향한다. Gusev & Medyanik의 교수학적 자료에는 세 가지 유형의 차등화된 과제가 제시되어 있으며, 본 연구에서는 이들 유형의 특징, 구체적인 예들을 제시하였다.

본 연구를 통해 얻어진 결과는 수학교과서의 교사용지도서의 내용을 개선하거나 새로운 형태의 수학교사용 참고도서를 개발하기 위한 기초자료가 될 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1999). 수학과 교육과정 해설(III), 서울: 대한교과서주식회사.

김흥기 (2001). 제 7차 교육과정과 교과서의 문제점, 수학교육 **40(1)**, pp.139-159, 서울: 한국수학교육학회.

박경미 (2000). 중학교 수학 교육과정 및 교과서 내용의 양과 난이도 수준 분석, 수학교육학연구 **10(1)**, pp.35-56, 서울: 대한수학교육학회.

박경미 · 임재훈 (2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학 교과서 비교, 학교수학 **4(2)**, pp.317-331, 서울: 대한수학교육학회.

박문환 (2002). 교과서에 나타난 '수학적 귀납법'에 대한 남 · 북한 비교, 수학교육학연구 **12(2)**, pp.181-192, 서울: 대한수학교육학회.

송순희 · 김윤영 (1998). 초 · 중 · 고 수학교과서 해석 영역의 연계성에 관한 연구, 수학교육 **37(1)**, pp.87-100, 서울: 한국수학교육학회.

이용곤 · 신현용 · 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 I, 수학교육 **34(1)**, pp.107-118, 서울: 한국수학교육학회.

조영미 (2002). 수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성 분석과 수준 탐색-기하 영역을 중심으로, 학교수학 **4(1)**, pp.15-28, 서울: 대한수학교육학회.

최택영 · 김인영 (1998). 남북한 수학 교과서 비교, 수학교육 **37(1)**, pp.35-54, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2004). 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 연구-구세프의 실험 교과서를 중심으로-, 한국학교수학회논문집 **7(1)**, pp.37-48, 충남: 한국학교수학회.

한인기 (2005). 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습내용의 비교 연구, 한국학교수학회논문집 **8(1)**, pp.90-100, 충남: 한국학교수학회.

한인기 · 신현용 · 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 II, 수학교육 **34(1)**, pp.119-130, 서울: 한국수학교육학회.

황혜정 (2000). 수학과 2종 교과서 개발 및 검정 기준에 관한 소고, 수학교육 **39(1)**, pp.1-10, 서울: 한국수학교육학회.

Aleksandrov, Verner & Ryzik (1991). *Geometriya dlya 8-9 klassov*, Moscow: Prosveshenie.

Aleksandrov, Verner & Ryzik (1992). *Geometriya dlya 10-11 klassov*, Moscow: Prosveshenie.

Atanacyan 외 4인 (1996). *Geometriya: Ucheb. dlya 7-9 kl*, Moscow: Prosveshenie.

Atanacyan 외 4인 (1997). *Izuchenie geometrii v 7-9 kl.*, Moscow: Prosveshenie.

Berezanskaya, Kolmogorov, Naribin & Cherkasov (1962). *Sbornik zadach i voprosov po geometrii*, Moscow: UChPEDGIZ.

Boltyanski, Sidorov & Shabunin (1974). *Lektsii i zadachi po elementarnoi matematike*, Moscow: Nauka.

Dorofeev (1999). *Matematika dlya kazdogo*, Moscow: Ayakc.

Gusev (2004). *Psihologo-pedagogicheskie osnovy obucheniya matematike*, Moscow: Verbum.

Gusev & Medyanik (1992). *Didaktichskie materialy po geometrii 8*, Moscow: Prosveshenie.

Gusev & Medyanik (1993). *Didaktichskie materialy po geometrii 9*, Moscow: Prosveshenie.

Gusev & Medyanik (1995). *Didaktichskie materialy po geometrii 7*, Moscow: Prosveshenie.

Ivlev, Saakyan & Shvartsburd (2001). *Algebra i nachala analiza-didaktichskie materialy 11*, Moscow: Prosveshenie.

Ivlev, Saakyan & Shvartsburd (2002). *Algebra i nachala analiza-didaktichskie materialy 10*, Moscow: Prosveshenie.

Krupich (1985). Printsipy sovetskoi didaktiki v obuchenii matematike, In Cherkasov & Stolyar(eds.) *Metodika prepodavaniya matematika v srednei shkole*, Moscow: Prosveshenie.

Makarychev & Mindyuk (2001a). *Didaktichskie materialy po algebre 8*, Moscow: Prosveshenie.

Makarychev & Mindyuk (2001b). *Didaktichskie materialy po algebre 9*, Moscow: Prosveshenie.

Makarychev, Mindyuk & Korotkova (2002). *Didaktichskie materialy po algebre 9*, Moscow: Prosveshenie.

Mishenko & Sharygin (2001). *Geometriya-metodicheskoe posobie*, Moscow: Drofa.

Okunev (1996). *Uglublennoe izuchenie geometrii v 8-9 kl.*, Moscow: Prosveshenie.

Papovski (1993). *Uglublennoe izuchenie geometrii v 10-11 kl.*, Moscow: Prosveshenie.

Pogorelov (1996). *Geometriya: Ucheb. dlya 7-11 kl*, Sankt-Peterburg: Hardford.

Prasolov (2000). *Zadachi po planimetrii*, Moscow: MTsNMO.

Ryzik & Okunev (1999). *Didaktichskie materialy po geometrii 9*, Moscow: Prosveshenie.

Ryzik (2000). *Didaktichskie materialy po geometrii 11*, Moscow: Prosveshenie.

Shahno (1967). *Sbornik zadach*, Minsk: Vysheish shkola.

Sharygin (1984). *Zadachi po geometrii-stereometriya*, Moscow: Nauka.

Sharygin (1986). *Zadachi po geometrii-planimetriya*, Moscow: Nauka.

Sharygin (1997). *Geometriya dlya 7-9 kl*, Moscow: Drofa.

Skanavi (2004). *Polnyi sbornik reshenii zadach*, Moscow: Mir i Obrazovanie.

Vavilov 외 3인 (1990). *Zadachi po matematike*, Moscow: Nauka.

Veselovski & Ryabchinskaya (2000). *Didaktichskie materialy po geometrii 11*, Moscow: Prosveshenie.

Veselovski & Ryabchinskaya (2001). *Didaktichskie materialy po geometrii 10*, Moscow: Prosveshenie.

Ziv & Meiler (2002). *Didaktichskie materialy po geometrii 7*, Moscow: Prosveshenie.

Ziv (2001). *Didaktichskie materialy po geometrii 11*, Moscow: Prosveshenie.

Ziv (2002b). *Didaktichskie materialy po geometrii 10*, Moscow: Prosveshenie.

Ziv (2002a). *Didaktichskie materialy po geometrii 9*, Moscow: Prosveshenie.

Zvavich, Kuznetsova & Suvorova (1995). *Didaktichskie materialy po algebre 9*, Moscow: Prosveshenie.