韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 19집 제 2호, 2005. 7. 327-343

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 2, Jul. 2005. 327-343

자리바꾸기 문제를 활용한 수학적 창의성의 발현 과정 연구

김 부 윤 (부산대학교)
이 지 성 (부산대학교 대학원)

솔리테르(solitaire) 중 간단한 게임인 자리바꾸기 문제에 대해 학습자로 하여금 다양한 해결방법을 산출하도록 한 후, 그 과정에서 학생들의 수학적 창의성의 발현 과정을 추적해 본다.
제시한 문제 해결 과제에 대한 학습자들의 반응과 해답을 분석함으로써 수학적 창의성에서의 인지적 구성요소인 확산성, 유창성, 논리성, 유연성, 독창성과 정의적 구성요소에 해당하는 적극성, 독자성, 집중성, 정밀성 등이 어떻게 나타나고 있는가를 살펴본다. 또한 그렇게 함으로써 각 구성요소의 의미와 특성을 규명하고자 하며, 나아가 이들 구성요소를 판별할 수 있는 방안에 대한 기초 자료를 제공하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

본고에서의 주안점은 학생들의 수학학습에서 "창의적"이라고 인정될 수 있는 문제해결의 유형에 대한 예를 확인하는 데에 있다. 학생들의 수학적 창의성에 대한 정보를 인지해 낼 수 있는 과제인 자리바꾸기 문제를 선정하여, 학생들의 문제해결에 관한 능력을 인지하고자 한다. 본고에서는 창의성을 인지적 영역과 정의적 영역으로 나누어 생각하는 高橋誠(2002)나 Torrance(1962)의 견해를 기반으로 하며, 수학적 창의성의 발현 과정에 대한 해석은 Haylock(1987)을 따른다.

高橋誠(2002)는 일반적 창의성에 대해서 창의적 능력(창의력 : 창의적 사고와 창의적 기능)과 창의적 인격(창의적 성격, 창의적 태도)의 두 가지 구성요소로 나누며(김부윤·김철언·이지성, 2004), Torrance(1962)는 유창성, 정교성, 독창성, 추상성, 제한에 대한 저항성의 다섯 요소를 인지적 측면의 요인으로, 용기, 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 자신이 하고 있는 일에 대한 몰두, 직관 이용 등을 정의적 측면의 요인으로 제시한 바 있다.

또한 Haylock(1997)은 아동의 수학적 창의성에 대해 알아보는 두 가지 접근법을 소개하였다. 첫 번째 접근법은 창의적 사고의 특징으로 이해되고 특별한 인지 과정이 요구되는 문제해결 과제에 대한 연구대상자의 반응을 고려하는 것이다. 이러한 고려는 수학에서의 창의적 문제해결의 핵심적인 인지 과정의 하나가 정신적 태세(mental set)를 깨는 것, 고착화의 극복임을 인지하도록 한다. 두 번째 접근법은 창의적 사고가 일어났음을 의미하는 산출물에 대한 준거를 결정하는 것이다. 수학에서는 융통성, 독창성, 적절성(appropriateness)과 같은 기준에 의해 판단될 수 있는 다양한 유형의 발산적 산출(divergent production) 과제가 반응을 만들어 내도록 수학에서 고안될 수 있다. 이러한 두 가지 접근법들은 학교수학에서의 창의성을 알아보기 위해 Haylock이 적용해 온 틀에 대하여 기초를 제공한다고 한다.

본고에서는 자리바꾸기 문제를 발산적 산출 과제로 선정하여 이 문제에 대한 이전의 활용들을 살펴 본 후, 이를 토대로 작성한 문제지를 통하여 학습자가 다양한 해결방법을 산출하도록 하여 그 과정에서 수학적 창의성의 발현에 대하여 살펴보고자 한다. 학습자들의 답변을 분석하고 해석함으로써 학생들의 유창성, 독창성, 융통성의 수학적 창의성의 인지적 영역의 측면을 확인하는 데에 중점을 두고, 수학적 창의성의 정의적 영역에 대한 이론들도 살펴보고자 한다. 그렇게 함으로써 이들 구성요소를 판별할 수 있는 방안에 대한 기초 자료를 제공할 수 있을 것으로 여겨진다.

II. 수학적 창의성

1. 인지적 영역에서의 수학적 창의성

일반적 창의성의 인지적 영역은 유창성, 융통성, 독창성 등에 바탕을 두고 설명하고 있다. 수학적 창의성의 인지적 영역에 대한 설명은 김부윤 · 이지성(2001)와 齋藤昇 · 秋田美代(2000)의 견해를 따르기로 한다.

- ㅇ 확산성 : 양적으로 많은 아이디어를 산출하는 능력으로 그 아이디어의 질과는 상관이 없다. 정답이든 오답이든 일단은 비판을 보류하고 그 아이디어를 수용한다는 뜻이다.
- ㅇ 논리성 : 많은 아이디어 중 문제 상황에 직면했을 때, 해결 방안으로 가능한 아이디어를 산출하는 능력이다.
- ㅇ 유창성 : 완전히 비논리적이거나 계산이 틀렸다거나 도저히 수용할 수 없는 아이디어를 제외한, 실제로 활용 가능한 많은 아이디어를 산출하는 능력이라고 할 수 있다.
- ㅇ 유연성 : 다양한 각도로 현상을 파악하여 아이디어를 얼마나 범주화하는 능력에 관계되어 있다. 아이디어를 공통적인 성질에 의해 한데 묶어 같은 범주로 생각함을 의미한다.
- ㅇ 독창성 : 기존의 사고방식이나 다른 사람의 문제해결 방법을 탈피한 독특한 자신만의 아이디어를 발현하는 것을 말한다. 즉, 구성원이 얼마나 자주 대답하느냐, 즉 해답의 비율에 달려 있다.

2. 정의적 영역에서의 수학적 창의성

수학적 창의성의 정의적 영역에는 일반적 창의성에서 언급된 창의적 태도의 하위요소에 엄밀성, 논리성을 추구하고자 하는 수학 학습의 태도가 추가되어야 할 것이다. 아무리 기발하고 독창적인 사고를 지향하는 태도라고 해도 그것이 수학적 의미에 적합하지 않다면 의미가 없기 때문이다. 기발한 것도 중요하지만, 결국에는 수학적 논리와 합체되어야 하기 때문에 논리적으로 사고하는 태도도 수학적인 창의적 태도에 포함되어야 한다.

또한, 엄밀성이나 논리성 이외에 수학에서의 학습 태도에는 집요성 혹은 집중성도 강조되어야 한다. 해결해야 할 과제에 대해 집착하고 집중하는 태도는 수학적 문제를 해결하는 데에 없어서는 안 될 요소이다. 이러한 태도는 계속적인 의문을 야기할 수도 있고, 문제에 대해 깊이 생각하고 다양한 사고를 할 수 있는 기반을 제공할 수 있으므로 수학에서 강조되어야 할 창의적 태도라고 할 수 있다.

齋藤昇(1999)는 수학에서의 창의적 태도의 구성요소를 확산성, 논리성, 적극성・지속성, 독자성, 수렴성, 정밀성의 일곱 인자로 보았으며, 이들 인자를 활용한 창의적 태도 검사 도구를 개발한 바 있다. 이 검사도구에서 사용된 확산성을 유창성으로, 논리성을 적절성으로 수정하여 간략히 소개한다.

- 유창성 : 가능성이 있는 모든 방법을 생각하거나, 일견 관계가 있어 보이는 것으로부터 관계를 발견하거나, 다른 사물과 비교하여 생각하는 태도라고 할 수 있다.
- 적절성 : 내용 전체의 연결성을 생각하거나 줄거리를 세워서, 그 이유나 사고과정을 논리적으로 설명하는 태도이다.
- 적극성 : 해결에 이르기까지 몇 번이나 생각하거나, 의문이나 호기심을 품거나 그것을 추구하거나, 학습한 것을 다른 장면에 적용하는 태도를 뜻한다.
- 독자성 : 새로운 아이디어를 생성하기 위한 기존의 방법에 대한 반론, 새로운 방법을 궁리하거나 번쩍임을 중요하게 생각하는 태도, 스스로 생각한 내용에 대해서 자신감을 가지는 태도나 발견에 대해서 감동하는 태도이다.
- 집중성・지속성 : "뭔가 기어코 완수한다"라고 하는 강한 의지, 의욕, 의문이나 과제에 대해 시간을 잊고 생각하거나 열중하거나, 그러한 것을 지속하여 생각하거나 하는 태도이다.
- 수렴성 : 창조활동에 있어서 확산적 사고를 한 후, 다른 방법과의 공통성이나 다른 것을 생각하여 어떤 방법이 가장 적절한가를 생각하는 태도라고 할 수 있다.
- 정밀성 : 정확성, 주의 깊음, 세밀한 관찰력을 발휘하고자 하는 태도이다.

Ⅲ. 자리바꾸기 문제

1. 자리바꾸기 문제의 소개

자리바꾸기 문제는 여러 문서(Pappas, 1991; Gardiner, 1996; Susan, 2004; 권오남 외, 2002)에 소개되어 있는데, 바둑돌, 서커스 곰, 남・여학생의 자리바꾸기 문제 등으로 약간의 변형되어 사용되고 있다. 주로 (3, 3)(남・여학생 각각 세 명씩 있고 빈 자리가 하나 있는 경우의 표기)의 문제가 많으며, 거기에서 패턴을 찾아 이동의 회수를 찾는 데에서 그치는 경우가 대부분이다. 일반화를 소개하고 있다고 해도 자세한 내용은 기재되어 있지 않은 경우가 많다. 다음은 여러 문헌에 소개된 자리바꾸기 문제와 해답을 정리한 것이다.

(1) 개방형 문제 중심의 수학적 창의력 신장을 위한 프로그램

개방형 문제 중심의 수학적 창의력 신장을 위한 프로그램(권오남 외, 2002)은 한 학기 10차시의 프로그램으로 한 차시는 45분으로 이루어져 있다. 이 연구는 수학적 창의성의 구성 요소 중에 유창성, 융통성, 독창성에 중점을 두고 개방형 문제들을 개발하였다. 연구에서 언급한 개방형 문제의 유형으로는 고착화 깨기, 다양한 답, 다양한 전략, 문제만들기, 전략탐구하기, 선택·평가하기, 활동적 탐구과제, 논리적 사고 훈련을 소개하고 있다. 10차시의 프로그램 운영 중에 6차시 "전략탐구하기"의 내용으로 바둑돌 게임 등이 소개되고 있다. 제시된 문제를 요약하면 <그림 1>과 같다.

<문제>

(1) 흰 바둑돌 2개와 검은 바둑돌 2개가 아래의 그림처럼 놓여 있다.

○	○		●	●

어떻게 하면 두 종류의 바둑돌의 위치를 바꿀 수 있을까?
이것은 혼자 하는 놀이로 아래 규칙을 읽고, 이동 상황을 직접 그려보자.

★ 규칙 ★
1. 흰 돌은 반드시 오른쪽으로만, 검은 돌은 왼쪽으로만 움직일 수 있다.
2. 바둑돌 하나를 놓고 점프를 할 수 있다.
3. 움직이는 경우 한 번에 한 칸만 움직일 수 있다.

이 게임은 8번의 이동이면 성공할 수 있다. 여러분은 몇 번만에 성공할까?

(2) 이번에는 흰 바둑돌 3개가 왼쪽에, 검은 바둑돌 3개가 오른쪽에 위치하여 있다.
위의 (1)번과 같은 규칙을 생각하며 이동시켜 보자.
몇 번의 이동이면 흰 돌과 검은 돌의 위치가 완전히 바뀔까?

(3) x개의 흰 바둑돌과 y개의 검은 바둑돌이 있을 때 일반적인 이동 회수를 구할 수 있는가?

<그림 1> 수학적 창의력 신장 프로그램에서의 자리바꾸기 문제

문제 (1)과 (2)의 해답은 그림으로 소개되어 있고, (3)의 해답은 바둑돌이 2개일 때 8회, 3개일 때 15회, … , $xy+x+y$ 라고 소개하고 있다. 마지막에 Tip으로써 "이 문제의 전략을 다른 말[1]을 뛰어 넘는 수를 최대화하는 것인데 이 풀이에서는 아홉 번의 뛰어 넘기가 있다. $xy+x+y$ 회에서 xy는 뛰어 넘는 회수이다"가 제공되어 있다.

문제의 제시가 흰 바둑돌과 검은 바둑돌의 개수가 같은 경우의 일반화를 거치지 않고, 바로 그 개수가 다른 경우로 일반화되어 학생들이 그러한 과정을 체계적으로 이해하도록 하는 배려가 적은 것으로 보인다. 또한 이동회수의 최소 개념에 대한 아무런 언급이 없다.

1) 원문의 문제에서는 '바둑돌'이라는 단어를 사용하고 있으나 Tip에서는 '말'이라는 단어를 사용하고 있다.

(2) 문제해결을 통한 수학지도에 관한 사례

문제해결을 통한 수학지도에 관한 문헌(Schoen & Charles, 2003)에서 의사소통과 관련하여 교사의 듣기에 대한 사례 중 하나로 자리바꾸기 문제를 들고 있다. 여기에서는 자리바꾸기 문제의 해결보다는 그 과정에서 두 사례의 대화에 초점을 두고 있다. 문제의 제시 부분을 보면, 최소의 이동 회수에 대한 언급과 slide와 jump에 대한 언급을 하고 있어 문제해결 전략에 대한 안내가 나타나고 있음을 알 수 있다.

<카니발 곰 문제>

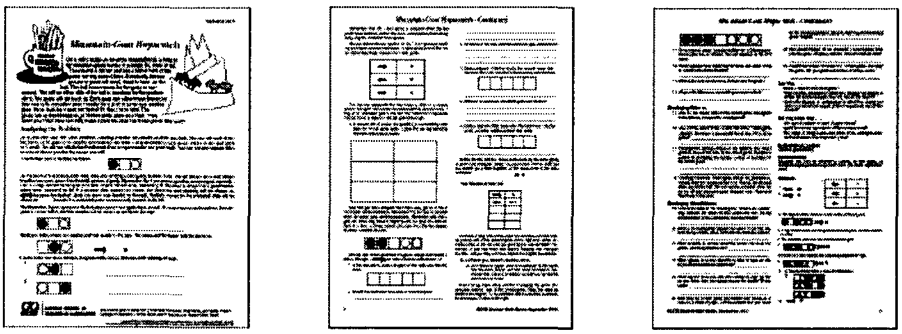
Connie, Jeff, 그리고 Kareem은 서커스 공연에 갔다. 그들은 세 마리의 갈색 곰들과 세 마리의 검은색 곰들이 묘기 부리는 것을 보았다. … (중략) … 곰들은 위치를 바꾸기 위해 15번의 이동이 필요했다. 그것을 어떻게 했는지 설명하여라.

1. slide는 몇 번했는가? jump는 몇 번했는가?
2. 다섯 마리의 검은 곰과 다섯 마리의 갈색 곰들이 위치를 바꾸는데 필요한 최소의 이동은 몇 번인가?
   … (중략) …
   몇 번의 slide, jump, 그리고 다 합해서 몇 번 이동하는지를 어떻게 계산했는지 설명하여라.

<그림 2> 문제해결을 통한 수학지도에서 제시된 자리바꾸기 문제

(3) NCTM의 Math Note

NCTM의 Math Note에도 자리바꾸기 문제가 소개되고 있는데, 문제를 해결하기 위한 각 단계를 아주 구체적으로 제시하는 학습지를 제작하여 교사들이 수업에 바로 사용할 수 있는 편의를 제공하고 있다. 또한 학습지의 모든 문제에 대한 해답도 함께 수록해 놓았으나, 일반화까지는 다루고 있지 않다. slide나 hop, 방향에 대한 기호를 S와 H 그리고 ⇨와 ⇦로, 그 사용을 제시하고 있어서 문제해결 과정에서 패턴을 쉽게 찾을 수 있도록 배려하고 있다.



<그림 3> Math Note에 제시된 자리바꾸기 문제에 관한 학습지

(4) 부산대학교 과학영재교육원의 창의적 문제해결 수업

부산대학교 영재교육원에서 2002년부터 제시되고 있는 남학생과 여학생의 자리바꾸기 문제는 Gadiner(1996)에 기반을 둔 것으로 문제 제시는 (3, 3)의 형태이지만, 일반화를 도출하도록 하는 수업으로 진행(부산대학교 과학영재교육원, 2002)되었다. 전략이나 방안에 대한 구체적이고 자세한 안내 없이 학생들의 토의와 연구를 목적으로 하고 있으며, 제시되었던 문제는 아래와 같다.

<문제>

남학생 3명과 여학생 3명이 의자 7개에 가운데 자리를 비워 놓고 앉아 있다. 남학생은 왼쪽에 앉아 있고 여학생은 오른쪽에 앉아 있는 것을 남학생은 오른쪽에, 여학생은 왼쪽으로 바꾸어 재배열하려고 한다. 남학생은 오른쪽으로만 이동할 수 있고 … (중략) … 그렇다면 이동을 몇 번해야 할까? 또 여학생, 남학생 이 같은 n명이라면 몇 번만에 이동할 수 있을까?.

<그림 4> 부산대학교 과학영재교육원에서 제시된 자리바꾸기 문제

이렇게 문제가 제시되었을 경우, 학생들이 답변한 내용은 크게 세 가지 유형으로 구분할 수 있는데, 여기에서 간략히 소개하면 다음과 같다.

ㅇ 유형 A

학생들은 여학생과 남학생, 빈자리를 간략한 기호, 예를 들면 원으로 표시하여 지필로 그려보거나 조그만 소도구를 사용하여 직접 이동을 해 보기 시작한다. 그리고 얼마 후 해답을 구하며, 남학생과 여학생의 수가 각각 1, 2, 3, 4, 5명일 경우 모두에 대한 해답을 구한 후, 일반화된 관계식을 찾는다. 그러나 그 일반화에 대한 아무런 설명이 없으며, 자신의 답변에 확신을 가질만한 근거를 가지고 있지는 않다. 주로 이동회수로 나열된 수열에 대한 감각으로 일반화된 식을 이끌어내지만, '왜'라는 질문에 명쾌한 답변을 하지 못한다고 할 수 있다.

처음 ●●●●○◎◎◎◎ 1번 ●●●○●◎◎◎◎ ⋮ 24번 ◎◎◎◎○●●●●	학생 수가 각각 여학생, 남학생이 각각 4명씩일 때, 24번만에 이동할 수 있다. 학생 수가 각각 n명일 때 관계식은 $(n+1)(n+1)-1$이다.

<그림 5> 유형 A 답안의 예

ㅇ 유형 B

유형 B는 유형 A보다 수학적 통찰이 이루어졌다고 할 수 있으며, 패턴을 찾는 문제라는 인식도 이루어지고 있으나, 새로운 아이디어나 전략은 보이지 않으며, 일반화에 대한 설명이 완전하지 못하다.

00_△△시작
00△_△
0_△0△
⋮
△_△00
△△_00

여기서 규칙을 보면 0나 △중 무엇으로 먼저 시작하던지 간에 처음에는 _0△0△0△0△…형태로 만들어준 뒤 두 번째에는 △0△0△0△…_형태로 만들고 그 다음에는 0을 오른쪽으로 한 개씩 옮겨간 뒤, 다 옮기면 △을 왼쪽으로 옮겨간다. 그러면 끝이 난다. 이러한 규칙을 보면 n개일 때는 $n(n+2)$번이 된다. 공식 증명은 이것이 한 개다. 수열을 이용한 문제이다.

<그림 6> 유형 B 답안의 예

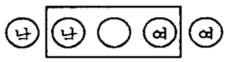
○ 유형 C

유형 C의 답변에서는 일반적인 경우에 대한 관계식을 찾아내기 위해 학생 자신의 문제해결 과정을 자세히 제시하고 한 단계씩 면밀히 재검토를 하고 있다. 이러한 답변은 학생들에게 문제해결에 대한 시간을 많이 부여[2)]할 경우 나타났으며, <그림 7>의 내용은 학생의 아이디어를 요약하여 정리한 것이다.

1단계 : '□,남,여,남,여,남,여'로 만들기

남녀 학생이 각각 1명, 2명, 3명, 4명일 경우의 이동 회수는 다음과 같다.

남학생 수	1	2	3	4	5
이동 회수	1	3	6	10	15



남녀 학생이 각각 2명일 경우는 각각 1명일 경우에 남녀 학생이 1명씩 추가된 형태이다. 마찬가지로 남녀 학생이 각각 3명일 경우는 각각 2명일 경우에 남녀 학생이 1명씩 추가된 형태이다. 따라서 '□,남,여,남,여,남,여'로 만들기의 일반적인 공식을 찾는다면 $\frac{n(n+1)}{2}$이 된다.

2단계 : '남,여,남,여,남,여,□'로 만들기

1단계의 과정 후에 문제의 요구대로 남학생과 여학생이 반대로 앉기 위해서는 빈 의자가 맨 오른쪽에 있는 '남,여,남,여,남,여,□'의 배열로 만들어야 한다. 이것은 빈칸이 옮겨가는 여학생을 차례로 옮기는 것으로 생각하면 된다. 따라서 여학생의 수인 n이 된다.

3단계 : '여,여,여,□,남,남,남'으로 만들기

1단계와 완전히 반대의 경우이므로 이동 회수는 동일하게 $\frac{n(n+1)}{2}$이다.

결과 : 1단계+2단계+3단계 즉, $\frac{n(n+1)}{2}+n+\frac{n(n+1)}{2}=n^2+2n$

<그림 7> 유형 C 답안의 예

2) 실제 수업시간 중에 모두 해결을 몰랐을 경우 과제로 제시함을 의미한다.

2. 학생들에게 제시된 자리바꾸기 문제

본 연구에서 학생들에게 소개[3]된 문제는 Pappas(1991)에 기반을 두고 <그림 8>과 같은 바둑돌 그림과 옆에 있는 빈 칸으로 옮기는 slide, 한 개의 다른 색 돌을 건너뛰는 jump에 대한 안내를 포함하고 있다.

<그림 8> 바둑돌 문제에 제시된 그림

또한, 앞에서 언급된 이전의 자리바꾸기 문제들에 기초하여, 문제제시, 단순화, 일반화, 확장의 단계로 문제들을 구성함으로써, 개략적인 전략은 제시하면서 구체적인 전략은 학생들이 창의적으로 계획할 수 있도록 문제지를 제작(부록 참고)하였다. 문제지의 구성은 <표 1>과 같다.

<표 1> 문제지의 구성

단계	기호	설명
문제 제시		문제의 제시- 문제 이해하기
단순화	(1, 1), (2, 2)	(1, 1), (2, 2), (3, 3)의 형태에서 출발하여 (n, n)의 형태로 진전
일반화	(n, n)	(n, n)의 경우의 관계식을 구한 전략을 설명
확장	$(m, 1)$	$(m, 1)$의 형태에서 출발하여 (m, n)의 특성을 분석
	(m, n)	(m, n)의 관계식과 전략 설명, (m, n)의 표에서 다양한 패턴 찾기

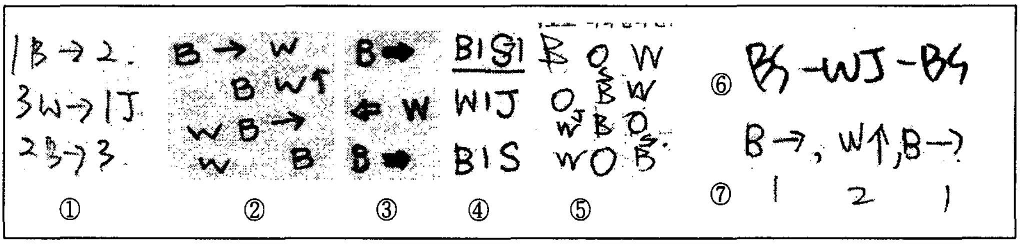
3. 학생들의 답변 분석

제시된 일련의 문제 중, 학생들의 수학적 창의성에 관련된 부분을 인지할 수 있는 문항으로 문항 3, 7, 12의 세 문항을 선정하고 그 답변을 살펴보고자 한다. 문항 3은 문제에 제시된 상황을 적절한 기호로 만들어 보도록 한 것인데, 약간의 예시와 함께 제시되었다. 즉, 검은 바둑돌을 B, 흰 바둑돌을 W로, 옆으로 이동한 것을 S라고 하거나 ➡로, 한 칸 건너 뛴 것을 J로 나타낼 수 있음을 제시하였다. 문항 12는 (n, n), 즉, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 개수가 같을 경우의 일반화 전략에 대하여 기술하는 문항이며, 문항 17은 (m, n)의 경우를 나타내는 표를 보고 그 속에서 다양한 패턴을 찾아 서술하도록 하였다. 이러한 세 문항에서 유창성, 융통성, 독창성의 수학적 창의성의 인지적 요소들에 관한 정보를 얻을 수 있을 것으로 기대되었다.

3) 2005년 3월 부산대학교 과학영재교육원 학생 19명을 대상으로 하였으며, 총 4시간이 소요되었다.

(1) 문항 3 - 기호 만들기

제시된 예시 때문에 학생들 대부분이 B와 W의 기호를 사용하였으며, slide와 jump를 기호로 나타내고자 노력하는 모습을 보여 주었다. 대부분의 학생들이 (1, 1)의 상황을 BOW(검은색, 빈칸, 흰색)의 기호로 나타낸 것과는 달리 <그림 9>에 예시된 답변들은 문제의 상황을 구체적으로 표현하고자 한 것으로 보인다. <그림 9>의 ①, ③은 문항에 제시된 예를 따른 것으로 보이며, ②, ⑦은 약간의 변형을 준 것이라 할 수 있다. 또한, ④, ⑤, ⑥은 나름대로의 기호를 창출했다고 할 수 있는데, 이후의 일반화 전략에서는 ④, ⑥의 기호들이 패턴을 찾기에 편한 것으로 드러나기도 했다. 물론 일반화 전략을 수행하는 동안 처음의 이러한 기호 만들기는 계속 수정할 수 있도록 하였다.



<그림 9> 문항 3. 기호만들기에 대한 답변의 예

문항 3에서는 수학적 창의성의 인지적 요소 중 적절성(논리성)과 독창성에 대하여 정보를 획득할 수 있다고 할 수 있다. <그림 9>의 ⑤는 이후의 일반화 전략을 수행할 경우 어떠한 패턴을 찾기에 더 혼란스러워 보이며, ⑥과 같은 기호는 가장 세련되어 보인다고 할 수 있다.

(2) 문항 12 - 일반화 전략

자리바꾸기 문제의 일반화 전략은 크게 두 가지로 볼 수 있는데, 하나는 slide의 회수와 jump의 회수에 중점을 둔 두 가지 방법과 다른 하나는 바꾸는 자리에 중점을 두는 방법이다.

첫째, slide와 jump의 회수에 중점을 둔 경우 중, 하나를 살펴보면, n개의 검은 바둑돌 각각은 앞의 $n+1$개의 자리로 이동해 가야 하고, n개의 흰 바둑돌 각각도 앞의 $n+1$개의 자리로 이동해 가야한다. 그러므로 모든 바둑돌이 나아가야 할 앞에 있는 자리의 개수는

$$n(n+1)+n(n+1)=2n(n+1)$$

이다. 모든 slide는 한 칸씩 이동하고 모든 jump는 두 칸씩 이동하므로, 최소 회수에 대한 해답에서는 s(slide)와 j(jump)의 개수가 다음 방정식

$$s+2j=2n(n+1)=2n^2+2n$$

을 만족한다. 서로 다른 색의 바둑돌이 자리를 바꾸는 것은 오직 jump에 의해서만 가능하므로 해답은 최소한 n^2번의 jump를 포함해야 한다. 최소한의 이동 회수가 존재한다면, jump의 총 회수는

n^2을 넘을 수 없으므로 $j=n^2$이다. 이 식을 위의 방정식에 대입하면, $s=2n$을 얻을 수 있다. 그러므로 최소 회수에 대한 해답은 다음과 같다(Susan, G., 2004).

$$s+j=2n+n^2$$

둘째, slide와 jump의 회수에 중점을 둔 경우 중 다른 하나를 살펴보자. S를 slide의 회수로, J를 jump의 회수로 표시하면, (1, 1), (2, 2), (3, 3)의 경우 최소 해답이 각각 SJS, SJSJJSJS, SJSJJSJJJSJJSJS이다. 일반적으로 (n, n)의 경우, 최소 해답은 1, 2, ⋯, $n-1$, n, $n-1$, ⋯, 2, 1개의 jump와 각각의 사이를 slide 한번으로 분리한 것이다. 즉, (4, 4)의 경우는 SJSJJSJJJSJJJJSJJJSJJSJS가 될 것이다. 결국 전체 이동 회수 $s+j$는 아래와 같이 계산될 수 있다(Susan, G., 2004).

$$\begin{aligned}&s+j\\&=2n+1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1\\&=2n+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\\&=2n+n^2\end{aligned}$$

셋째, 바꾸는 자리의 패턴을 이용하여 최소 해답을 설명하는 것인데, 이는 앞의 <그림 7>에서 언급하였다.

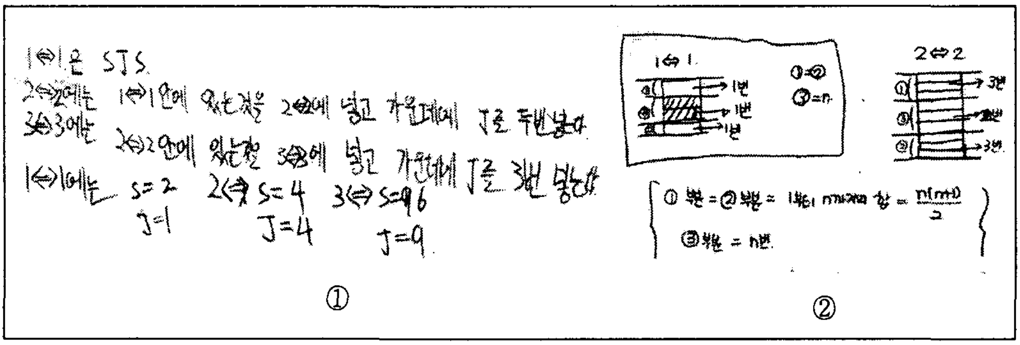
실제로 문제를 제시받은 학생들은 대부분 (1, 1)에서 (3, 3)까지의 경우를 나열해 놓고 회수의 수열에서 어떠한 패턴을 찾아 그 일반항을 구하고 거기에 자신들의 설명을 맞추어 가는 형상이었다. 이보다는 문항 3에서 만든 기호를 나열해 놓고 관찰을 통하여 패턴을 찾는 것이 더 바람직하다고 하겠다. 일반화의 이러한 과정에서 학생들에 대한 수학적 창의성의 정의적 요소인 적극성, 독자성, 집중성, 정밀성 등을 인지해 낼 수 있다. 그러나 이러한 정의적 요소를 인지하고 그것을 정보로서 활용하기 위해서는 교사나 학습 관찰자, 연구자가 미리 선정된 체크리스트 등을 활용하는 것이 좋을 것이다. 이에 대한 연구는 후속연구로 남겨 두고자 한다.

일반화 전략을 설명하는 데 있어 학생들은 다양한 방법을 나타낸다. 대부분의 학생들은 몇 개의 식을 적어 놓거나 그 옆에 간단한 설명을 덧붙이기도 한다. <그림 10>의 ①은 문장으로써 slide와 jump에 초점을 둔 학생 자신의 생각을 정리하였고 ②는 자리의 이동에 대한 패턴에 중점을 두고 그림으로 학생 자신의 생각을 적은 것이다. 문제 해결의 일반화 전략이 위에서 언급한 것과 같이 세 가지로 알려져 있지만, 학생들의 표현방법이나 사고방법은 자신들의 독창성을 지니고 있는 것을 알 수 있다.

Krutetskii(1976)은 학교아동들의 수학적 능력에 관한 그의 연구에서, "학교 교수의 조건 하에서의 수학의 독립적인 창의적 숙달"(p. 68)로 확장할 필요가 있다고 주장한다. Krutetskii에 따르면, 수학적 창의성은 "복잡하지 않은 수학 문제의 독립적인 공식화, 이러한 문제들을 해결하는 방법과 수단 찾기, 증명과 정리의 발명, 공식들의 독립적인 연역, 비표준 문제를 해결하는 독창적인 방법을 찾기"에

서 학교아동들에게 나타난다. 문항 12에서 <그림 10>와 같이 답변한 학생들은 적어도 자기 자신에게는 독립적인 연역을 이루어내었다고 할 수 있으며, 수학적 창의성의 한 측면을 보여 주었다고 할 수 있다.

물론 문항 12에 대한 이러한 답변은 학생들의 쓰기 능력과도 상관이 있을 것이며, 사고의 유창성을 위해서 소집단 토의도 유용할 것이라 생각된다.



<그림 10> 문항 12. 일반화 전략에 대한 답변의 예

(3) 문항 17 - 패턴 찾기

위의 문항 12에서 (n, n)에 대한 일반화를 얻었고 그것이 이차함수의 규칙임을 알았다. (m, n)에 대해서는 학생들에게 <표 2>를 작성하도록 하고 발견한 규칙이나 패턴을 되도록 많이 쓰도록 하였다.

<표 2>의 각 열의 내용들은 일차의 수열이다. 더 나아가, 왼쪽에서 오른쪽으로 열을 이동하면, 일차함수 규칙은 $2n+1$, $3n+2$, $4n+3$으로 나타난다. 이것은 최소 해답이 $mn+m+n$으로 주어지고 선택된 열에서는 m이 고정되기 때문이다. 즉,

$$mn+m+n=(m+1)n+m$$

은 n에 대한 일차함수가 된다.

다음으로 대각선으로 아래쪽을 따라 가는 자료가 이차의 패턴을 가진다. 예를 들어, 주 대각선 바로 위(또는 아래)의 대각선은 5, 11, 19, 29, 41, …의 수열로 n^2+3n+1의 이차식을 따른다. 이것은 대각선이 $m=n+1$의 관계를 만족하고, 따라서

$$mn+m=n=(n+1)n+(n+1)+n=n^2+3n+1$$

이다. 이와 같은 방법으로 다른 대각선 모두에 대한 규칙도 유도할 수 있다.

<표 2> (m, n)에 관한 이동회수 $(1 \leq m, n \leq 7)$

(m, n)	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
m=1	3	5	7	9	11	13	15
m=2	5	8	11	14	17	20	23
m=3	7	11	15	19	23	27	31
m=4	9	14	19	24	29	34	39
m=5	11	17	23	29	35	41	47
m=6	13	20	27	34	41	48	55
m=7	15	23	31	39	47	55	63

다음은 학생들이 찾아낸 규칙이나 패턴을 정리한 것이다.

- m=1일 때, n이 1씩 증가하면 2씩 증가한다.
- m=2일 때, n이 2씩 증가하면 3씩 증가한다.
- m, m이 각각 1씩 증가할 때, $m+n+1$씩 증가한다.
- 오른쪽으로 갈수록(n이 늘어날수록) m+1씩 증가한다.
- $(m, n) = (n, m)$
- (k, k)를 중심으로 대칭이다.
- 밑으로 갈수록(m이 늘어날수록) m+1이 증가한다.
- m과 n 이 짝수이면 (n, m)도 짝수이다.

문항 17에서는 수학적 창의성의 인지적 요소로는 유창성, 융통성, 독창성 등을 인지해 낼 수 있고, 정의적 요소로는 정밀성, 유창성, 적절성, 지속성 등을 인지해 낼 수 있었다. 만일 인지적 요소에 대한 평가를 실시하고자 한다면, Boo Yoon Kim and Ji Sung Lee (2001)를 참고할 수 있다.

학생들은 대각선을 중심으로 한 대칭성이나 줄과 열에 따른 증가나 감소에 치중하는 면을 보였다. <표 2>를 관찰한 후, $mn+m+n$라는 일반식을 알아낸 학생도 있지만 적절한 이유를 서술하지 못하고 있었다. 즉, 패턴을 다양하게 찾아내기는 했으나, 찾아낸 패턴에 대한 연역이나 공식화와 같은 독립적인 활동은 이루어지지 않았다. 본 연구에서는 제공된 시간의 제한이 이러한 결과의 한 원인인 것으로 보인다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본고에서는 학생들의 수학적 창의성에 대한 정보를 인지해 낼 수 있는 과제로 자리바꾸기 문제를 선정하여 발산적 산출에 관한 능력을 인지해 내고자 하였다. 수학적 창의성이 인지적 영역과 정의적 영역으로 구성되어 있다는 주장(高橋誠, 2002; Torrance, 1962)을 기반으로 문제해결에서 나타나는 수학적 창의성의 인지적 영역에 중점을 두고 살펴보았다.

자리바꾸기 문제는 많은 문헌에서 다양한 형태로 제시되어 왔는데, 본 연구에서는 Pappas(1991)의 문제를 사용하여, 문제제시, 단순화, 일반화, 확장의 네 단계로 구성된 문제지를 학생들에게 제공하였다. 본고에서는 문제지에 실린 18개의 문항 중, 기호 만들기, 일반화 전략, 패턴 찾기에 관한 세 개의 문항에 대해 분석을 하였다.

기호 만들기(문항 3)에서는 학생들이 다양한 기호를 생성하였으나, 제시된 예에 제한되는 경향을 보이기도 하고, 이후의 일반화 전략에서의 사용에 다소 복잡한 것을 창출하기도 하였다. 일반화 전략(문항 12)에서는 학생들 자신의 독립적인 연역을 이루어 낸 것으로 보이며, 자신의 사고를 표현하는 데에 다양한 방법을 제시하고 있었다. 패턴 찾기(문항 17)에서는 많은 패턴을 찾기는 했지만, 그에 대한 설명이나 독립적인 연역이 이루어진 것은 아니다.

위의 세 문항에 대한 학생들의 답변을 통해서 볼 때, 학생들은 문제해결 과정을 통하여 수학적 창의성의 인지적 측면인 유창성, 융통성, 독창성을 발현하였으며, Krutetskii(1976)가 말하는 독립적인 공식화나 연역을 행한 것으로 보인다. 이러한 연역은 문제 상황에 대한 일반화 전략의 서술에서 나타났으며, 이것은 정의적인 측면에서 학생들의 수학적 성취감과도 관련 있을 것으로 생각된다.

일반적으로 (3, 3)의 형태로 주어지는 자리바꾸기 문제에서 사고의 발전과 확장을 이끌어내는 과정을 통하여 수학적 창의성이 발현될 수 있고, 이러한 발현을 관찰하고 인지해 냄으로써 교사, 관찰자, 연구자는 대상 학생에게 수학적 창의성에 관한 적절한 지도를 개선해 나갈 수 있을 것이다.

본 연구를 통하여 다음의 몇 가지 제안을 하고자 한다.

첫째, 자리바꾸기와 같이 유창성, 융통성, 독창성, 독립적인 연역 등을 이끌어낼 수 있는 상황이나 문제의 개발이 필요하다. 작고 사소한 상황이라도 자리바꾸기 문제가 (3, 3)에서 (n, n)으로, 그리고 (m, n)으로 확장되듯이, 수학적 창의성이 발현되고 발산적 산출이 가능한 문제로 재창출될 수 있으므로 이러한 문제에 대한 연구가 계속 되어야 할 것이다.

둘째, 본 연구는 학생들의 수학적 창의성에서 인지적 측면에 중점을 두었다. 정의적 측면인 적극성, 독자성, 집중성, 수렴성, 정밀성 등에 관하여 인지해 낼 수 있는 체계가 필요하다고 하겠다. 수학적 창의성에 대한 학생 자가 설문지는 이미 소개(김부윤 · 김철언 · 이지성, 2004)된 바 있는데, 본 연구를 통하여 교사나 관찰자에 의한 체크리스트의 필요성이 부각되었으므로 이에 대한 연구도 계속되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

권오남 · 박정숙 · 조영미 · 박지현 · 김영실 (2002). 개방형 문제 중심의 수학적 창의력 신장을 위한 프로그램 개발 연구, 한국학술진흥재단 지원 교과교육공동연구.

김부윤 · 김철언 · 이지성 (2004). 수학적 창의성의 평가에 대한 고찰, 대한수학교육학회 수학교육학논총, **26**, pp.87-101.

김부윤 · 김철언 · 이지성 (2005). 수학적 창의성의 평가에 대한 고찰(Ⅱ), 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육논문집, **19(1)**, pp.241-251.

부산대학교 과학영재교육원 (2002). 중등수학, 부산대학교 과학영재교육원. pp.204-207.

齋藤昇 (1999). 数学教育における創造性に関する態度尺度の開発, *全国数学教育学会誌 数学教育学研究*, **5**, pp.35-46

齋藤昇 · 秋田美代 (2000). 数学における創造性テストと創造性態度との関係, *全国数学教育学会誌 数学教育学研究*, **6**, pp.35-48.

高橋誠 編著 (2002). *新編 創造力事典*, 日科技連.

Boo Yoon Kim · Ji Sung Lee (2001). A Study on the Development of Creativity in the Secondary Mathematics in Korea, *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D : Research in Mathematical Education*, **5(1)**, pp.45-58.

Gardiner, A. (1996). *Mathematical Puzzling*, UK Mathematics Foundation.

Haylock, D. W. (1997). Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, **27(3)**, pp.68-74.

Mark, D. (2003). The Sound of Problem Solving, In Schoen, H.L. & Charles, R.I (eds.) *Teaching Mathematics through Problem Solving : Grades 6-12*, National Council of Teachers of Mathematics Inc, pp.161-176.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children,* The Uni. of Chicago Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). Mountain-Goat Hopscotch, *NCTM Student Math Notes*.

Pappas, T. (1991). *More Joy of Mathematics. San Carlos*, Calif.: Wide World Publishing.

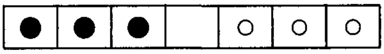
Susan, G. S. (2004). Patterns Jumping out of Simple Checker Puzzle, *Mathematics Teacher* **98(4)**, pp. 224-227.

Torrance, E. P. (1962). *Guiding Creative Talent. Englewood Cliffs,* NJ : Prentice-Hall.

부 록4)

Ⅰ. 자리바꾸기 문제

Theoni Pappas(1991)는 저서 「More Joy Mathematics」는 다음에서 "솔리테르 바둑돌 퍼즐"을 소개하고 있다. <그림 1>에서와 같이, 1×7의 격자에 세 개의 검은 바둑돌은 왼쪽에, 세 개의 흰 바둑돌은 오른쪽에 놓여 있고, 가운데에 빈 칸이 하나 있다. 한 개의 돌은 옆에 있는 빈 칸으로 옮기거나(slide), 한 개의 다른 색 돌을 건너뛰기(jump) 하여 빈 칸으로 이동할 수 있다. 이 게임은 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 위치가 모두 바뀌면 끝난다. 즉, 검은 바둑돌이 오른쪽에, 흰 바둑돌이 왼쪽에 위치하게 되면 문제가 해결되는 것이다. 게임의 목적은 최소 이동의 회수를 찾는 것이다.



<그림 1> 솔리테르 바둑돌 퍼즐

위의 원래의 문제에서 출발하여, 단순화, 일반화, 확장의 세 단계를 거치면서 문제해결을 할 것이다. 문제의 해결과정을 서술하는 데에 있어 기호나 그림을 활용하고, 다양한 패턴을 찾아보자.

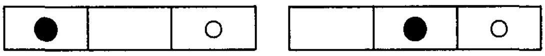
Ⅱ. 단순화

이제 문제를 단순화하여 바둑돌이 각각 1개 일 경우와 2개일 경우를 생각해 보도록 하자.

1. <그림 1>의 바둑돌 문제를 3⇔3으로 나타내기로 한다면, 바둑돌이 각각 1개일 경우와 2개일 경우는 어떻게 표현하면 되는가?

A. 1⇔1의 경우

1⇔1의 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다. 우선 검은 바둑돌을 오른쪽으로 한 칸 이동하여 보자.



2. 다음은 어떻게 이동해야 할까? 왜 그렇게 생각하는가?

1⇔1의 경우에 그림으로 해답을 완성하여 보고 이것을 기호로 어떻게 나타내면 좋은지 생각한 것을 적어보자. 예를 들어 검은 바둑돌을 B, 흰 바둑돌을 W로, 옆으로 이동한 것을 S 또는 ➡로, 한 칸 건너 뛴 것을 J로 나타낼 수 있다. 기호로 나타내는 것은 2⇔2, 3⇔3의 경우를 생각한 후, 다시 고려하여도 된다.

4) 연구에 활용된 문제지로 지면 관계 상 문제에 대한 풀이 공간을 생략하였다.

3. 기호로 나타낸다면?

●		○

	●	○

4. 처음 검은 바둑돌을 움직이지 말고 흰 바둑돌을 움직인다면 결과는 어떻게 되는가?

B. 2⇔2의 경우

2⇔2의 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

●	●		○	○

5. 이동을 직접 해 보고 기호로 표시하여 보자.

C. 3⇔3의 경우

3⇔3의 경우를 그림으로 나타내고 이동을 직접 해 보고, 기호로 표시하여 보자.

6.

7. 2⇔2의 그림과 1⇔1의 그림을 비교해보면 어떤 관계가 있는가?
8. 3⇔3의 그림과 2⇔2의 그림의 처음을 비교해보면 어떤 관계가 있는가?
9. 3⇔3에서 처음에서 두 번째 이동과 마지막에서 두 번째 이동은 어떤 관계가 있는가?

Ⅲ. 일반화

이제 $n \Leftrightarrow n$의 경우를 생각해보자. 검은 바둑돌이 이동해야 하는 회수는 $n+1$이다.

10. 그렇다면 흰 바둑돌이 이동해야 하는 회수는?
11. 이동의 총 회수는 최대 얼마로 생각하면 되겠는가?
12. 지금 구하고 있는 $n \Leftrightarrow n$ 의 경우, 최소 이동의 회수는 위의 답보다는 적어야 한다. 이를 구하기 위해, 1⇔1, 2⇔2, 3⇔3의 여러 경우를 잘 비교하면서 최소 이동 회수가 몇 번인가를 구해 보자. 또한 왜 그렇게 구했는가에 대한 설명을 써 보자. 다양한 방법이 나올 수 있으므로 자신의 생각을 잘 정리해 보자.

Ⅳ. 확장

이제, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 개수가 다를 경우에 대해 생각해보자.

13. 예를 들어, 검은 바둑돌 2개와 흰 바둑돌 3개가 그림과 같이 배열되어 있을 경우, 반대 위치로 재배열 하려면 몇 번의 이동을 해야 할까?

●	●		○	○	○

14. $2 \Leftrightarrow 2$, $3 \Leftrightarrow 3$의 경우와 비교하여 생각한다면, 어떠한 차이가 있는가?

A. $m \Leftrightarrow 1$의 경우

15. $m \Leftrightarrow 1$인 경우 최소 이동 회수는 어떻게 될까?

B. $m \Leftrightarrow n$의 경우

16. 이 경우의 해답을 얻기 위해 다음의 표를 완성해 보자. 표의 첫 열은 $m \Leftrightarrow 1$인 경우를 나타낸 것이다.

$m \Leftrightarrow n$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
m=1	3						
m=2		8					
m=3							
m=4							
m=5							
m=6							
m=7							

17. 위의 표를 잘 보고 알아낸 규칙이나 패턴이 있다면 그것을 쓰고, 설명하자. 되도록 많은 패턴을 찾아보자.
18. $m \Leftrightarrow n$ 의 경우 최소 이동 회수는 어떻게 나타낼 수 있는가? 왜 그렇게 생각하는가?

※ 이 문제를 해결하는 과정에서 내용면이나 태도면에서 느낀 점을 적어 보자.