

## VNURBS기반의 다차원 불균질 볼륨 객체의 표현: 모델링 및 응용

박 상 근\*

### Volumetric NURBS Representation of Multidimensional and Heterogeneous Objects: Modeling and Applications

Park, S. K.\*

#### ABSTRACT

This paper describes the volumetric data modeling and analysis methods that employ volumetric NURBS or VNURBS that represents heterogeneous objects or fields in multidimensional space. For volumetric data modeling, we formulate the construction algorithms involving the scattered data approximation and the curvilinear grid data interpolation. And then the computational algorithms are presented for the geometric and mathematical analysis of the volume data set with the VNURBS model. Finally, we apply the modeling and analysis methods to various field applications including grid generation, flow visualization, implicit surface modeling, and image morphing. Those application examples verify the usefulness and extensibility of our VNURBS representation in the context of volume modeling and analysis.

**Key words** : Volumetric NURBS, Heterogeneous objects, Scattered data approximation, Curvilinear interpolation

#### 1. 서 론

무한 개의 점으로 구성된 닫힌 공간 및 그 내부에 존재하는 다수의 속성 분포 등을 효율적으로 모델링 및 분석하고, 그 결과를 효과적으로 가시화하기 위한 노력들이 여러 분야에 걸쳐 각각 진행되어 왔다. 대표적으로 컴퓨터 그래픽스 분야에서 볼륨 그래픽스(volume graphics)<sup>[1]</sup>, 볼륨 가시화(volume visualization)<sup>[2]</sup> 등이 있고, CFD분야에서 격자 생성(grid generation) 및 유동 가시화(flow visualization)<sup>[3]</sup> 등이 있으며, CAGD분야에서 음함수 곡면 모델링(implicit surface modeling)<sup>[4]</sup> 등이 있다. 그밖에 화학 분야에서 원자, 분자들을 모델링하고 가시화하려는 연구<sup>[5]</sup>가 있으며, 의료 분야에서 인체를 측정하고 이를 입체적으로 구성하여 그래픽 처리를 수행하려는 연구<sup>[6]</sup> 등이 있다. 그러나 대부분의 연구가 볼륨 영역의 표현 및 분석을 위한 모델링보다 실감나는 데이터의

가시화 기법, 즉 렌더링에 중점을 두고 있어, 측정 혹은 계산을 통하여 획득한 원시 볼륨 데이터로부터 그 내부에 존재하는 의미 있는 특징 형상 등을 추출하고 이를 효과적으로 가시화하는데 적잖은 어려움을 겪고 있다. 결국 이를 극복하기 위해서는 먼저 임의의  $n$ 차원 공간 속에 존재하는 불균질의 객체 혹은 해석 공간의 장(field)을 효율적으로 표현할 수 있는 모델링 함수 및 관련 알고리즘의 존재가 필요하다. 지금까지 연구된 이러한 표현 모델들을 간략히 살펴보면 다음과 같다.

CAGD분야의 경우, 대상 객체는 주로 곡선 및 곡면으로서, 유클리드 공간 상에서 무한 개의 점 집합을 유한 개의 조정점 및 기저함수에 의해 표현하려는 매개변수 표현식이 있는데, 대표적으로 비스플라인 곡면(B-spline surface)이 여기에 해당된다. 이밖에 반복 알고리즘에 의해 점 집합을 정의하는 분할 곡면(subdivision surfaces) 방식이 있으며, 유한 개의 점 집합을 1차 보간하여 근사적으로 서술하는 폴리곤 메쉬(polygonal meshes) 등이 있다.

CAD분야에서는 대상 객체로 유클리드 공간 상의

\*교신저자, 정희원, 충주대학교 기계공학과  
- 논문투고일: 2004. 11. 11  
- 심사완료일: 2005. 04. 28

입체적 형상을 가진 솔리드(solid)가 있는데, 기하학적 요소로서 위에서 설명한 매개변수 곡면식을 주로 사용하며, 그들 간의 위상학적 정보를 정의하기 위해 경계 표현(B-rep) 자료 구조 등을 사용한다. 주로 기계 공학 분야에서 제품의 설계 및 제조를 위하여 이 표현 모델을 사용한다. 이상의 솔리드 표현 모델은 주로 경계 면의 기하학적 형상에만 관심이 있고, 그 내부에 존재하는 속성 요소에 관한 표현 구조는 가지고 있지 않다.

한편, CAE분야의 경우, 해석 영역의 내부에 존재하는 밀도, 속도, 온도, 압력 등의 물리적 변수들, 즉 속성 요소에 관한 표현이 절대적으로 필요하다. 더불어 해석 영역의 기하학적 형상에 관한 표현도 컴퓨터 기반의 수치적 계산을 위하여 또한 중요하다. 현재 이를 위하여 유한 개의 노드점으로 구성된 격자망 혹은 사면체 메쉬 구조를 사용하여 기하학적 요소 및 속성 요소를 비연속적으로 표현한다. 여기서 이러한 비연속적 표현을 위한 수행하는 유한 개의 노드점 생성, 즉 격자 생성 혹은 메쉬 생성은 CAE분야에서 병목(bottleneck) 작업으로 이미 알려져 있다.

그리고 과학적 데이터 가시화(SDV, scientific data visualization) 분야에서의 표현 모델은 대부분 비연속성을 가진 볼륨(volume)으로서, 유한 개의 점 집합으로 구성된 자료 구조를 사용하고 있다. 지금까지 표현 모델 자체의 연구 개발보다 현실감 있는 볼륨 렌더링 측면에서 많은 연구 결과가 발표되고 있는데, 계산 작업의 효율성 및 정확성 측면에서 다음의 근본적인 문제점을 내포하고 있다. 특히 SDV분야와 CFD분야의 공동 영역인 유동 가시화 분야의 경우에 더욱 이러한 문제점이 나타난다. 즉 임의의 위치에서 특정한 속성값 혹은 더 나아가 속성의 미분값을 계산하기 위해, 먼저 근접 위치에 놓여있는 이웃 격자점 혹은 메쉬의 노드점을 탐색한다. 그리고 탐색된 이웃 요소들이 가지고 있는 데이터 정보를 기반으로 대개 1차 보간하는 방식으로 특정 위치에서의 속성값 혹은 그 미분값을 근사적으로 계산한다. 여기서 탐색 작업은 작업의 효율성을 저하시키며, 1차 보간에 의한 계산 작업은 계산 정확성을 떨어지게 한다. 유동장 내에 존재하는 특정 현상을 추출하고 이를 가시화하는 특징 현상 추출 작업(feature segmentation or extraction)<sup>1)</sup>의 경우에 이러한 두 가지 측면에서의 문제점을 쉽게 찾아볼 수 있다.

그리고 의료 분야의 경우, 측정된 이미지 데이터를 3차원적으로 가시화하기 위해, 여러 형태의 볼륨 렌더링 기법을 사용하며, 그 결과를 분석하고 저장

하기 위하여 볼륨 구조의 표현 모델로서 복셀(voxel) 구조를 사용한다. 이 복셀 구조는 거대한 크기의 메모리 사용량을 요구하며 상당한 계산 시간을 필요로 하기 때문에 특별한 하드웨어적인 그래픽 장치<sup>2)</sup>가 설계되기도 한다. 볼륨 표현 모델로서 그 표현 구조가 이해하기 쉽고, 개발자 측면에서 구현하기 쉬운 장점을 가지고 있으나, 수정 및 조작 측면에서 다루기 어렵다.

이밖에 여러 분야에서도 수학적 표현식, 절차적 표현 방식, 근사적 표현 기법 등의 방법으로 대상 영역의 기하학적, 물리적 구조를 서술하는데, 일반적으로 곡면, 솔리드, 볼륨 개념의 표현 모델을 정의하여 기술한다. 여기서 대상 영역(객체)이 존재하는 공간 차원 측면과 그 내부에 존재하는 속성의 차원 측면에서 곡면 및 솔리드보다 볼륨 형태의 표현이 더 일반화된 개념이라 정의할 수 있다. 현재까지 알려진 볼륨 개념의 대표적인 표현 모델로서 유한 개의 복셀(voxel)로 이루어진 volume dataset<sup>3)</sup>이 있고, 음한수 곡면의 일반화 형태인 F-rep<sup>4)</sup> 및 Constructive hypervolume<sup>5)</sup>이 있으며, 가시성 표현에 중점을 둔 CVG(constructive volume geometry)<sup>6)</sup>가 있다.

본 연구에서는 앞에서 소개한 다양한 형태의 표현 모델을 포함할 수 있는 일반화된 개념의 볼륨 표현 모델인 Volumetric NURBS<sup>12)</sup>, 즉 VNURBS에 관하여 요약하고, 이를 기반으로 여러 응용 분야에서 활용 가능한 볼륨 데이터의 근사법 및 보간법, 그리고 볼륨 공간의 수학적 분석을 위한 계산 알고리즘 등을 소개 하겠다. 또한 VNURBS에 의해 각 분야에서 수행되는 주요 모델링 기능 등을 구현하여 그 결과를 보임으로써, VNURBS가 여러 형태의 볼륨 영역을 표현할 수 있고, 다목적의 확장성 및 응용성을 가진 볼륨 표현 모델임을 입증하겠다.

## 2. Volumetric NURBS

본 연구에서 사용하는 볼륨 표현식인 VNURBS은 기존 NURBS의 매개변수(parameter) 공간을 임의의  $n$ 차원으로 확장하고, NURBS의 조정점(control point) 차원을 임의의  $k$ 개로 확장한 매개변수 볼륨 표현식이다. 즉, VNURBS 표현식은 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{A}(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} A^1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ A^k(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} \begin{pmatrix} hA^1 \\ \vdots \\ hA^k \end{pmatrix}_{i_1 \dots i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n)}{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} h_{i_1 \dots i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n)} \quad (1)$$

여기서  $u_j(j=1, \dots, n)$ 는  $n$ 차원의 볼륨 공간을 정의하는  $j$ 번째 파라미터이며,  $A^j(u_1, \dots, u_n)(j=1, \dots, k)$ 는 그 볼륨 공간 속에 존재하는  $k$ 개의 속성 함수들 중  $j$ 번째 속성 함수를 나타낸다. 그리고  $n_j$ 와  $k_j$ 는  $u_j$  방향으로의 조정점의 개수 및 차수(order)이고,  $(A^j)_{i_1, \dots, i_n}$ 는  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n$  개의 조정점 망에서  $u_1$  방향으로  $i_1$ 번째,  $u_2$  방향으로  $i_2$ 번째, ...,  $u_n$  방향으로  $i_n$ 번째 위치한 조정점의  $j$ 번째 속성을 나타낸다. 또한  $h_{i_1, \dots, i_n}$ 는 동차 좌표(homogeneous coordinate)를 나타내며,  $N_{i_j}^{k_j}(u_j)$ 는 차수가  $k_j$ 인 정규화된 비스플라인 기저 함수(normalized B-spline basis function)를 의미한다. 여기서 비스플라인 기저 함수는 아래의 절점 벡터(knot vector) 상에서 정의된다. 즉,

$$u_1 \text{ 방향 절점 벡터, } \mathbf{U}_1 = \{u_{i_1}\}_{i_1=0}^{i_1=n_1+k_1-1} \quad (2)$$

.....

$$u_n \text{ 방향 절점 벡터, } \mathbf{U}_n = \{u_{i_n}\}_{i_n=0}^{i_n=n_n+k_n-1} \quad (3)$$

한편, 위의 식 (1)은 다음과 같이 간략한 형태로 쓸 수 있다. 즉,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{\mathbf{I}} h_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{I}} h_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})} \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(u_1, \dots, u_n)$ ,  $h_{\mathbf{I}} = h_{i_1, \dots, i_n}$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{I}} = \mathbf{A}_{i_1, \dots, i_n}$ ,  $\mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) = N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n)$ ,  $\sum_{\mathbf{I}} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n}$  이다. 또한, 위의 식 (4)는 유리화 형태의 기저 함수를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}) &= \frac{\sum_{\mathbf{I}} h_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{I}} h_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})} = \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \frac{h_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{J}} h_{\mathbf{J}} \mathbf{N}_{\mathbf{J}}(\mathbf{u})} \\ &= \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) = \frac{h_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{J}} h_{\mathbf{J}} \mathbf{N}_{\mathbf{J}}(\mathbf{u})}$  이다.

한편, 위에서 소개한 VNURBS는 다음과 같은 특성을 가지고 있다. 아래의 특성은 일반화된 볼륨 표현식으로서 요구되는 필요 조건이기도 하다. 즉,

- 객체의 다차원성(Multidimensional objects) : 다차원의 볼륨 공간과 그 내부에 존재하는 다차원의 속성 분포를 표현한다. 즉,  $n(n > 0)$  차원의 정의역 차원(domain dimensionality)과  $k(k > 0)$  차원의 치역 차원(range dimensionality)을 가지고 있다.
- 객체의 불균질성(Heterogeneous objects) :  $k$ 차원의 조정점에 임의의 속성 변수, 예를 들어 기하학적 변수, 물리적 변수, 그래픽 처리를 위한 변수 등을 정의하여 설정할 수 있다. 즉 볼륨 공간에서 다루는 장 변수(field variable)의 특성에 무관하다.
- 수학적 표현의 독립성(Independence of mathematical nature) : 정의하려는 속성의 수학적 성질에 무관하다. 즉, 스칼라, 벡터, 텐서 등의 형태에 의존하지 않으며, 복리안, 정수, 실수 등을 모두 포함한다.
- 다분야로의 응용성(A variety of applications) : 여러 응용 분야에서 수행되는 다양한 형태의 기능들, 예를 들어, 형상 모델링, 볼륨 그래픽스, 데이터 가시화, 이미지 모핑 등을 구현하기 위한 도구로서 활용 가능하다.
- NURBS성질의 계승(Inheritance from NURBS) : 기존의 NURBS에서 제공되는 기본 성질들<sup>[3]</sup>, 예를 들어, convex hull property, affine invariance, variation diminishing property, local modification 등을 가지고 있으며, 이밖에 관련된 다수의 알고리즘들, 예를 들어, degree reduction, degree elevation, knot insertion 등을 그대로 활용할 수 있다.

### 3. Volumetric Data Modeling

#### 3.1 분산형 볼륨 데이터의 근사

볼류믹적으로 산만하게 분산된  $M$ 개의 점 데이터 집합  $\{P_j\}$ 가 주어졌을 때, 이를  $M$ 개의 조정점을 가지고, VNURBS볼륨 표현식,  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ 을 근사적으로 생성하는 알고리즘을 소개하면 다음과 같다. 여기서 사용한 기본 방식은 Least-squares 기법 및 Pseudo-inverse (or Moore-Penrose generalized inverse) 기법이며, 절점 벡터의 절점은 균일(uniform)하다고 가정한다. 또한 동차 좌표 값은 모두 1.0( $h_j = 1.0$ )으로 가정한다.

본 연구에서 제시하는 근사법에 의한 생성 알고리

좁은 크게 두 가지 종류의 문제로 나누어 설명할 수 있다. 즉, 과결정 구속(over-determined constraint) 문제와 미결정 구속(under-determined constraint) 문제이다. 과결정 구속이란 구하려는 미지수  $\mathbf{A}_I$ 의 개수  $N$ 보다 주어진 점 데이터  $\mathbf{P}_i$ 의 개수  $M$ 이 큰 경우이며, 미결정 구속이란 반대로  $M$ 보다  $N$ 가 큰 경우이다. 각 경우의 계산 알고리즘을 유도하기 위하여 본 연구에서 제시하는 볼륨 표현식을 다음과 같이 정의 하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} \mathbf{A}_{i_1 \dots i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n) \\ &= \sum_{\mathbf{I}=0}^{N-1} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $N$ 은 조정점의 개수로서  $N = n_1 \times \dots \times n_n$  이며,  $\mathbf{I}$ 는 조정점의 인덱스(index)로서 1차원 배열 형식을 가진다. 즉,

$$\mathbf{I} = i_1 + (n_1) \cdot i_2 + (n_1 n_2) \cdot i_3 + \dots + (n_1 \dots n_{n-1}) \cdot i_n \quad (7)$$

그리고  $\mathbf{N}_{\mathbf{I}}(u_1, \dots, u_n)$ 는 아래와 같이 각 방향의 비스플라인 기저 함수들의 곱이다.

$$\mathbf{N}_{\mathbf{I}}(u_1, \dots, u_n) = N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n) \quad (8)$$

그리고 과결정 구속과 미결정 구속 문제를 다음과 같은 행렬식으로 서술할 수 있다. 즉, 주어진  $M$ 개의 점 데이터  $\mathbf{P}_i (i=0, \dots, M-1)$ 와 이에 해당하는 좌표값  $(u_1^i, \dots, u_n^i)$ 을 각각 VNURBS에 대입하여 정리하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{P}_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^0 & \dots \\ \dots & \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^1 & \dots \\ \dots & \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^2 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^{M-1} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (9)$$

or  $\{\mathbf{P}_i\} = [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] \{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\} \quad (i=0, \dots, M-1)$   
 $(\mathbf{I}=0, \dots, N-1)$

여기서  $\{\mathbf{P}_i\}$ 는  $M$ 개의 점 데이터 벡터이며,  $\{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\}$ 는  $N$ 개의 조정점 벡터이다. 그리고  $\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i = \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(u_1^i, u_2^i, \dots, u_n^i) = N_{i_1}^{k_1}(u_1^i) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n^i)$ 이며,  $[\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i]$ 는  $M \times N$  행렬이다.

### 3.1.1 과결정(over-determined) 구속 문제

위의 식 (9)에서  $M > N$ 일 때, 이를 과결정 구속이라 하며, 미지수  $\{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\}$ 을 결정하기 위해 Least-squares 기법을 적용하면, 아래의 식 (10)을 얻을 수 있다. 즉,

$$[\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] \{\mathbf{P}_i\} = [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] \{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\} \quad (10)$$

그리고 이를 전개하여 정리하면 아래의 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i \mathbf{P}_i \right\} = \left[ a_{\mathbf{I}\mathbf{I}} = \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^{i\prime} \right] \{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\} \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{I} = 0, \dots, N-1, \mathbf{J} = 0, \dots, N-1$ , 여기서 행렬  $[a_{\mathbf{I}\mathbf{I}}]$ 는 대칭 행렬로서 양의 정부호 형식(positive definite form)이므로 유일해(unique solution)를 구할 수 있으며, 이로부터 미지수  $\{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\}$ 는 결정된다.

### 3.1.2 미결정(under-determined) 구속 문제

위의 식 (9)에서  $M < N$ 일 때, 이를 미결정 구속이라 하며, 미지수  $\{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\}$ 을 결정하기 위해 Pseudo-inverse 기법을 적용하면 아래의 식 (12)를 얻을 수 있다. 즉,

$$([\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i]') ([\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i]')^{-1} \{\mathbf{P}_i\} = [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] \{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\} \quad (12)$$

여기서  $([\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i]')^{-1} \{\mathbf{P}_i\} = \{\mathbf{Q}_i\}$ 이라 놓고, 먼저  $\{\mathbf{Q}_i\}$ 을 구한다.  $[\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i]'$ 는 아래의 식 (13)과 같이 정리할 수 있으며, 대칭 행렬이고 양의 정부호 형식이므로  $\{\mathbf{Q}_i\}$ 을 구할 수 있다.

$$[\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] [\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] = \left[ a_{ij} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^{i\prime} \right] \quad (13)$$

여기서  $i = 0, \dots, M-1, j = 0, \dots, M-1$   
 그 다음, 식 (13)을 식 (12)에 대입하여 정리하면, 다음의 식 (14)와 (15)를 얻을 수 있으며, 이로부터 미지수  $\{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\}$ 는 결정된다.

$$[\mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i] \{\mathbf{Q}_i\} = \{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\} \quad (14)$$

or

$$\left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}^i \mathbf{Q}_i \right\} = \{\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\}, \mathbf{I} = 0, \dots, N-1 \quad (15)$$

이상의 알고리즘에 의하여, 측정 혹은 계산에 의해 획득한 점 데이터 집합 즉, 점 데이터에 의해 정의되

는 불연속 볼륨 공간을 VNURBS에 의해 표현함으로써, 연속 공간 상의 임의의 위치에서 근사적으로 볼륨 정보를 추출할 수 있게 된다. 이를 흔히 분산 데이터 모델링(scattered data modeling)<sup>[16]</sup>이라 부른다.

한편, 일정한 순서를 가진 격자망 구조의 점 데이터를 입력하여 VNURBS를 생성하는 보간법 알고리즘을 소개하면 다음과 같다.

3.2 격자형 볼륨 데이터의 보간

$m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$  개의 일정한 배열 형식을 가지는  $n$ 차원의 격자망 형식의 점 데이터 집합  $\{P_{i_1, \dots, i_n}\}$ 가 주어졌을 때, 이들을 보간하여 VNURBS를 구하는 방법을 소개하겠다. 단, 여기서 VNURBS의 동차 좌표 값은 모두 1.0으로 가정한다. 그럼, 이 VNURBS는 바이리화 형식을 가지며, 이를 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
 A(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} A_{i_1, \dots, i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n) \\
 &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \left( \sum_{i_{n-1}=0}^{n_{n-1}-1} \left( \sum_{i_n=0}^{n_n-1} A_{i_1, \dots, i_n}^0 N_{i_n}^{k_n}(u_n) \right) N_{i_{n-1}}^{k_{n-1}}(u_{n-1}) \dots N_{i_1}^{k_1}(u_1) \right) \\
 &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \left( \sum_{i_{n-1}=0}^{n_{n-1}-1} A_{i_1, \dots, i_{n-1}}^1(u_n) N_{i_{n-1}}^{k_{n-1}}(u_{n-1}) \right) \dots N_{i_1}^{k_1}(u_1) \\
 &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \left( \sum_{i_{n-2}=0}^{n_{n-2}-1} A_{i_1, \dots, i_{n-2}}^2(u_{n-1}, u_n) N_{i_{n-2}}^{k_{n-2}}(u_{n-2}) \right) \dots N_{i_1}^{k_1}(u_1) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \left( \sum_{i_2=0}^{n_2-1} A_{i_1, i_2}^{n-2}(u_3, \dots, u_n) N_{i_2}^{k_2}(u_2) \right) N_{i_1}^{k_1}(u_1) \\
 &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} A_{i_1}^{n-1}(u_2, \dots, u_n) N_{i_1}^{k_1}(u_1) \tag{16}
 \end{aligned}$$

여기서

$$A_{i_1, \dots, i_n}^0 = A_{i_1, \dots, i_n} \tag{17}$$

$$A_{i_1, \dots, i_{n-1}}^1(u_n) = \sum_{i_n=0}^{n_n-1} A_{i_1, \dots, i_n}^0 N_{i_n}^{k_n}(u_n) \tag{18}$$

$$A_{i_1, \dots, i_{n-2}}^2(u_{n-1}, u_n) = \sum_{i_{n-1}=0}^{n_{n-1}-1} A_{i_1, \dots, i_{n-1}}^1(u_n) N_{i_{n-1}}^{k_{n-1}}(u_{n-1}) \tag{19}$$

.....

$$A_{i_1, i_2}^{n-2}(u_3, \dots, u_n) = \sum_{i_3=0}^{n_3-1} A_{i_1, i_2, i_3}^{n-3}(u_4, \dots, u_n) N_{i_3}^{k_3}(u_3) \tag{20}$$

$$A_{i_1}^{n-1}(u_2, \dots, u_n) = \sum_{i_2=0}^{n_2-1} A_{i_1, i_2}^{n-2}(u_3, \dots, u_n) N_{i_2}^{k_2}(u_2) \tag{21}$$

한편,  $A(u_1, \dots, u_n)$ 의  $n$ 개의 절점 벡터들을 다음과 같이 정의하자.

$$U_1 = \{u_{i_1}\}_{i_1=0}^{i_1=n_1+k_1-1} \tag{22}$$

.....

$$U_n = \{u_{i_n}\}_{i_n=0}^{i_n=n_n+k_n-1} \tag{23}$$

먼저 첫번째 절점 벡터  $U_1$ 는 다음과 같이 구한다.

점 데이터  $\{P_{i_1, \dots, i_n}\}$ 에서  $i_1$ 가 변하는 경우만을 생각할 때, 즉  $\{P_{i_1, i_2, \dots, i_n}\}_{i_1=0}^{i_1=n_1-1}$ 일 때  $i_1$  방향으로  $n_2 \times n_3 \times \dots \times n_n$  개의 가상 곡선을 생각할 수 있으며, 각각의 곡선에 대해 Hartley-Judd<sup>[15]</sup>의 방법을 사용하여 곡선으로 보간할 때의 절점 벡터들을 구한다. 그리고 이를 평균하여  $U_1$ 를 구한다. 즉 각각의  $i_2, i_3, \dots, i_n$ 에 대하여 절점 벡터  $\{u_{i_1, i_2, \dots, i_n}\}_{i_1=0}^{i_1=n_1+k_1-1}$ 을 구하고, 다음과 같이 평균하여  $u_{i_1}$ 을 구한다. 즉,

$$u_{i_1} = \frac{\sum_{i_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} u_{i_1, i_2, \dots, i_n}}{n_2 \times n_3 \times \dots \times n_n} \tag{24}$$

마찬가지로 각 방향으로의 절점 벡터  $U_2, \dots, U_n$ 을 위에서 설명한 방식에 의해 계산한다.

또한, 주어진  $\{P_{i_1, \dots, i_n}\}$ 에 대응하는 매개 변수, 즉 보간 좌표들  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ 라고 하면, 이들은 앞에서 결정한 절점 벡터  $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}$ 의 노드(또는 Greville abscissa)로서 다음 식과 같이 결정한다.

$$\begin{aligned}
 x_{i_1} &= \frac{u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \dots + u_{i_1+k_1}}{k_1}, \quad i_1 = 0, \dots, n_1-1 \\
 x_{i_2} &= \frac{u_{i_2+1} + u_{i_2+2} + \dots + u_{i_2+k_2}}{k_2}, \quad i_2 = 0, \dots, n_2-1 \tag{25}
 \end{aligned}$$

.....

$$x_{i_n} = \frac{u_{i_n+1} + u_{i_n+2} + \dots + u_{i_n+k_n}}{k_n}, \quad i_n = 0, \dots, n_n-1$$

이제 보간 좌표  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ 와 이에 해당하는 점 데이터  $\{P_{i_1, \dots, i_n}\}$ 을 가지고 조정점  $A_{i_1, \dots, i_n}$ 을 구하는 과정을 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 보간 좌표와 점 데이터를 식 (16)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = \sum_{i_1=0}^{n_1-1} A_{i_1}^{n-1}(x_2, \dots, x_n) N_{i_1}^{k_1}(x_1) = P_{i_1, \dots, i_n} \tag{26}$$

그 다음, 위의 식에서 미지수  $A_{i_1}^{n-1}(x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$  을 구한 후, 이를 식 (21)에 대입하면 다음의 식을 얻게 된다.

$$A_{i_1}^{n-1}(x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = \sum_{i_2=0}^{n-1} A_{i_1 i_2}^{n-2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n}) N_{i_2}^{k_2}(x_{i_2}) \quad (27)$$

마찬가지로 위의 식에서 미지수  $A_{i_1 i_2}^{n-2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n})$  을 구한 후, 이를 식 (20)에 대입한다. 이와 같은 방식으로 식 (19), (18), (17)을 차례로 계산하면, 결국 최종의 조정점  $A_{i_1, \dots, i_n}$  을 구할 수 있게 된다.

### 4. Volumetric Data Analysis

유클리드 공간  $E^3$  상에 존재하는 미소 길이, 미소 면적 등과 같은 미분 요소(differential elements) 및 구배, 발산 등과 같은 미분 연산자(differential operators) 등은 여러 응용 분야에서 다루는 중요한 기하학적 혹은 수학적 요소들로서, 수치 적분 등의 계산 알고리즘에 자주 등장한다. 특히 CFD분야의 경우, 곡선형 좌표계(curvilinear coordinate system)를 설정하고, 설정된 곡선형 좌표계에 대하여 필요한 수치적 계산 작업 시, 미분 요소 및 미분 연산자의 안정되고 빠른 계산은 필수적이다. 본 연구에서는 VNURBS를 가지고, 이러한 곡선형 좌표계를 정의하고, 이로부터 미분 요소 및 미분 연산자 등을 안정적으로 계산할 수 있는 알고리즘을 소개하고자 한다.

먼저 곡선형 좌표계를 정의하기 위해 사용된 VNURBS 표현식은 다음과 같다. 이를 흔히 NURBS 부피라고 부른다. 즉,

$$\mathbf{B}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix} = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \begin{pmatrix} hx \\ hy \\ hz \end{pmatrix}_{ijk} N_i(u) N_j(v) N_k(w)}{\sum_i \sum_j \sum_k h_{ijk} N_i(u) N_j(v) N_k(w)} \quad (28)$$

한편, 3차원 공간 상의 좌표 곡선(coordinate lines)은 공간 곡선(space curve)으로서 두 좌표 곡면(coordinate surfaces) 간의 교선에 의해 구해진다. 일반적으로 곡선형 좌표계 시스템은 두 가지 종류의 기본 벡터(base vectors)를 가지고 기술한다. 즉, 좌표 곡선에 접하는 공변 벡터(covariant vectors)와 좌표 곡면에 수직한 반변 벡터(contravariant vectors)에 의

해 곡선형 좌표계 내부의 구조를 서술한다. 기본 벡터인 공변 벡터와 반변 벡터는 그 정의에 의해 식 (28)을 가지고 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉,

Definition of covariant vectors

$$\mathbf{B}_u = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)'$$

$$\mathbf{B}_v = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)' \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_w = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial w} = \left( \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w} \right)'$$

Definition of contravariant vectors

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)'$$

$$\nabla v = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right)' \quad (30)$$

$$\nabla w = \left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right)'$$

그리고 식 (29)의 공변 벡터는 곡선형 좌표계 표현식 (28)의 미분식을 사용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

Computation of covariant vectors

$$\mathbf{B}_u(u, v, w) = D_u^1 D_v^0 D_w^0 \mathbf{B}(u, v, w)$$

$$\mathbf{B}_v(u, v, w) = D_u^0 D_v^1 D_w^0 \mathbf{B}(u, v, w) \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_w(u, v, w) = D_u^0 D_v^0 D_w^1 \mathbf{B}(u, v, w)$$

또한, 식 (30)의 반변 벡터는 위에서 구한 공변 벡터를 사용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

Computation of contravariant vectors

$$\nabla u = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w$$

$$\nabla v = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{B}_w \times \mathbf{B}_u \quad (32)$$

$$\nabla w = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{B}_u \times \mathbf{B}_v$$

여기서  $\sqrt{g} = \mathbf{B}_u \cdot (\mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w)$  이다.

이상의 결과를 가지고 미소의 곡선 길이, 곡면 면적, 그리고 미소 체적은 다음과 같이 위에서 언급한 기본 벡터들로부터 쉽게 계산된다. 즉,

Arc length element

$$dL^u = \|\mathbf{B}_u\| du, \quad dL^v = \|\mathbf{B}_v\| dv, \quad dL^w = \|\mathbf{B}_w\| dw \quad (33)$$

Surface area element

$$dS^u = \|\mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w\| dv dw$$

$$dS^v = \|\mathbf{B}_w \times \mathbf{B}_u\| dw du \quad (34)$$

$$dS^w = \|\mathbf{B}_u \times \mathbf{B}_v\| du dv$$

Volume element

$$dV = \mathbf{B}_u \bullet (\mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w) du dv dw \quad (35)$$

또한, 공변 메트릭 텐서(covariant metric tensor), 반변 메트릭 텐서(contravariant metric tensor) 및 변환 야코비안(Jacobian of the transformation) 값은 다음과 같은 형태를 가지며, 위에서 언급한 기본 벡터들을 가지고 쉽게 계산된다.

Covariant metric tensor

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_u \bullet \mathbf{B}_u) & (\mathbf{B}_u \bullet \mathbf{B}_v) & (\mathbf{B}_u \bullet \mathbf{B}_w) \\ (\mathbf{B}_v \bullet \mathbf{B}_u) & (\mathbf{B}_v \bullet \mathbf{B}_v) & (\mathbf{B}_v \bullet \mathbf{B}_w) \\ (\mathbf{B}_w \bullet \mathbf{B}_u) & (\mathbf{B}_w \bullet \mathbf{B}_v) & (\mathbf{B}_w \bullet \mathbf{B}_w) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Contravariant metric tensor

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} (\nabla u \bullet \nabla u) & (\nabla u \bullet \nabla v) & (\nabla u \bullet \nabla w) \\ (\nabla v \bullet \nabla u) & (\nabla v \bullet \nabla v) & (\nabla v \bullet \nabla w) \\ (\nabla w \bullet \nabla u) & (\nabla w \bullet \nabla v) & (\nabla w \bullet \nabla w) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Jacobian of the transformation

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det\|g_{ij}\|} \quad \text{or} \quad \sqrt{g} = \mathbf{B}_u \bullet (\mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w) \quad (38)$$

미분 연산자에 관한 수식은 좌표 곡면에 의해 둘러싸인 미소 부피에 발산 정리(divergence theorem)를 적용함으로써 얻어진다. VNURBS가 정의하는 볼륨 공간 상의 임의의 텐서  $F$ 에 대해, 구배(gradient), 발산(divergence), 회전(curl)을 수식 정리하여 계산 가능한 형태로 나타내면 다음과 같다.

Gradient

$$\nabla F = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} (\mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w) F_u + (\mathbf{B}_w \times \mathbf{B}_u) F_v \\ + (\mathbf{B}_u \times \mathbf{B}_v) F_w \end{pmatrix} \quad (39)$$

Divergence

$$\nabla \bullet F = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} (\mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w) \bullet F_u + (\mathbf{B}_w \times \mathbf{B}_u) \bullet F_v \\ + (\mathbf{B}_u \times \mathbf{B}_v) \bullet F_w \end{pmatrix} \quad (40)$$

Curl

$$\nabla \times F = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} (\mathbf{B}_v \times \mathbf{B}_w) \times F_u + (\mathbf{B}_w \times \mathbf{B}_u) \times F_v \\ + (\mathbf{B}_u \times \mathbf{B}_v) \times F_w \end{pmatrix} \quad (41)$$

또한 임의의 텐서  $F$ 에 대해, 좌표 곡선의 접선 방향으로의 미분과 좌표 곡면의 법선 방향으로의 미분은 다음과 같이 계산된다.

Tangential derivatives

$$(F)_i^u = \frac{F_u^i}{\|\mathbf{B}_u\|}, \quad (F)_i^v = \frac{F_v^i}{\|\mathbf{B}_v\|}, \quad (F)_i^w = \frac{F_w^i}{\|\mathbf{B}_w\|} \quad (42)$$

Normal derivatives

$$(F)_n^u = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} (\nabla u \bullet \nabla u) F_u + (\nabla u \bullet \nabla v) F_v \\ + (\nabla u \bullet \nabla w) F_w \end{pmatrix}$$

$$(F)_n^v = \frac{1}{|\nabla v|} \begin{pmatrix} (\nabla v \bullet \nabla u) F_u + (\nabla v \bullet \nabla v) F_v \\ + (\nabla v \bullet \nabla w) F_w \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$(F)_n^w = \frac{1}{|\nabla w|} \begin{pmatrix} (\nabla w \bullet \nabla u) F_u + (\nabla w \bullet \nabla v) F_v \\ + (\nabla w \bullet \nabla w) F_w \end{pmatrix}$$

여기서  $F_i$ 가 정의되는 볼륨 공간은 식 (28)의 조정점에  $F$ 를 추가함으로써 정의될 수 있고, 이렇게 정의된 VNURBS의 각 파라미터 방향으로의 1차 미분을 통하여,  $F_u, F_v, F_w$ 는 쉽게 계산된다.

이상의 기하학적 혹은 수학적 요소들은 곡선형 좌표계에 대하여 정의되며, 곡선형 좌표계 및 그 내부에 존재하는 속성들은 본 연구의 VNURBS에 의해 표현됨으로써, 볼륨 공간 상의 임의의 위치에서 볼륨 공간의 기하학적 혹은 수학적 분석을 위하여 제공되어야 할 기본 계산들이 수치적으로 안정되고 빠르게 수행될 수 있다.

## 5. Volumetric NURBS의 응용

### 5.1 격자 생성

CFD분야에서 현재까지도 가장 널리 사용되는 수치적 계산 기법은 유한 차분법(FDM) 방식이며 이를 위한 격자 생성은 대상 영역(공간)의 표현을 포함하여, 수치 계산적 목적을 위하여, 그리고 더 나아가 성공적 수치 계산을 위하여 매우 중요한 영향 요소로서, 그동안 많은 연구 결과가 발표되어 왔다. 가장 알려진 방식으로 포아송 편미분 방정식의 형태를 가진 타원형 격자 생성 기법(Poisson-type elliptic grid generation)<sup>[6]</sup>이 있다. 즉 포아송 형태의 편미분 방정식을 수치적으

로 반복 순환 기법(iterative refinement)에 의해 반복 계산하여, 주어진 유한 개의 격자점이 편미분 방정식을 만족하게끔 격자점을 이동시켜, 격자망을 구성하는 수치적 기법이다. 흔히 이를 수치적 격자 생성 기법(numerical grid generation)<sup>17)</sup>이라 부르며, 성공적 격자 생성을 위해서는 반드시 초기치로서 초기 격자망이 제공되어야 한다. 즉, 수치적 격자 생성 기법은 주어진 초기 격자망을 타원형 편미분 방정식이 가지고 있는 성질을 활용하여 의도했던 방향으로 각 격자점을 이동시키는 일종의 격자망 평활화(smoothing) 작업에 해당된다. 결국 최종의 격자망을 생성하기 위해서는 초기 격자망의 존재가 필수적이다.

본 연구에서는 VNURBS볼륨 표현 모델을 사용하여 Fig. 1과 같은 초기 격자망을 생성해 보았다. 본 연구의 격자 생성 기법은 일종의 대수적 격자 생성 기법으로, VNURBS 표현식의 0차 미분에 의해 계산된다. 즉, 격자 생성을 위하여 사용된 VNURBS는 식 (28)이고, 식 (28)의 매개변수 공간에서 각 파라미터 방향으로 일정한 간격을 가진 직육면체의 격자망을 구성하고, 이를 식 (28)에 대입하여 0차 미분값을 계산하면, 3차원 공간 상의 최종 격자망을 생성할 수 있다. 아래의 Fig. 1은 이렇게 하여 생성된 격자망의 예제를 보여주고 있다.

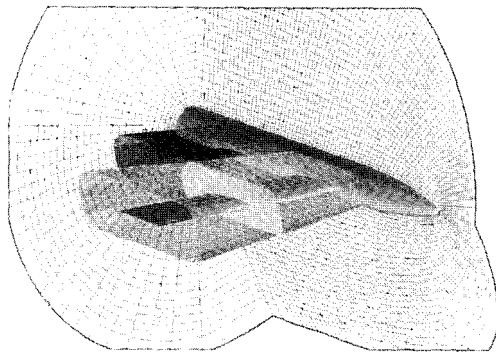


Fig. 1. Multi-block grid generation.

2개의 날개(wing) 주변의 3차원 공간과 1개의 몸통(body) 주변의 3차원 공간을 각각 식 (28)의 VNURBS 표현식에 의해 정의하고, 위에서 설명한 것과 같이, 매개변수 공간  $(u, v, w)$ 에서 3차원 유클리드 공간  $(x, y, z)$ 으로의 VNURBS에 의한 사상(mapping)을 통하여 격자망은 순서로 생성된다.

## 5.2 유동 가시화

컴퓨터를 사용한 유동 가시화의 대부분은 유동 배

터장을 화살표(arrow plots), 유선(streamlines), 입자(particles) 등을 사용하여 나타낸다. 2차원의 경우 이 방식은 효과를 발휘하나, 3차원의 경우 화살표, 입자 등의 방식으로 유동 현상을 가시화한다면 판독하기 힘든 그래픽 결과만을 보게 될 것이며, 경우에 따라 와류 등의 특징적 현상을 놓치기 쉽다. 이것은 현존하는 가시화 기술이 주어진 유동 데이터가 직접적으로 제공하는 데이터 정보만을 사용하여 그래픽적으로만 접근하기 때문이다. 3차원 유동 데이터 자체의 보다 직관적인 그래픽 처리 기법도 중요하지만, 유동 데이터가 내포하고 있는 의미 있는 새로운 특징적 현상을 추출해 내는 과정 역시 실제로 유동 현상을 이해하려는 측면에서 필요하다. 이를 위해서는 먼저 주어진 방대한 유동 데이터로부터 특정한 목적에 부합하는 특징 현상을 추출해 낼 수 있는 알고리즘 및 관련 그래픽 기술<sup>18)</sup>에 관한 연구에 초점을 두어야 할 것이며, 이를 구현하기 위해서는 먼저 유동 데이터를 효과적으로 표현, 관리, 저장, 그리고 가시화에 필요한 유용한 데이터를 손쉽게 제공할 수 있는 일반적인 형태의 유동 가시화 표현 모델에 관한 연구<sup>19)</sup>가 선행되어야 할 것이다.

본 연구의 VNURBS는 이러한 목적에 부합하는 유동 가시화 표현 모델을 제공하며, 기존의 가시화 기법을 포함하여 특징 현상 추출을 위해 요구되는 여러 형태의 정보를 충분히 제공할 수 있다. 본 연구에서 사용한 유동 가시화 표현 모델은 다음과 같다. 즉,

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \sum_I \mathbf{B}_I \mathbf{R}_I(\mathbf{u}) = \sum_I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_I \mathbf{R}_I(\mathbf{u}) \quad (44)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \sum_I \mathbf{D}_I \mathbf{R}_I(\mathbf{u}) = \sum_I \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{V} \\ T \\ p \\ \vdots \end{pmatrix}_I \mathbf{R}_I(\mathbf{u}) \quad (45)$$

여기서  $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ 는 유동 데이터가 차지하는 해석 공간의 기하학적 형상을 표현하며,  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ 는 그 내부에 존재하는 유동 변수들의 분포 상태를 표현한다.  $\rho$ 는 유체의 밀도,  $\mathbf{V}$ 는 속도벡터,  $T$ 는 온도,  $p$ 는 압력 등을 나타낸다. 식 (45)의 조정점에 해당하는 항(term)은 유동 데이터가 제공하는 유동 변수에 의존하여 결정할 수 있는데, 여기서는 밀도, 속도, 내부 에너지를 사용하였다. 그리고 유동상의 영역 차원은  $n = 3$ 이고 속성 차원은 식 (44)의 3차원 공간 좌표 변수  $(x, y, z)$ 을 포



함하여 모두  $k = 8$ 이며, 3장의 생성 기법에 의해 유동 레이더로부터 VNURBS 표현 모델을 생성하였다.

한편, 특징 현상 추출을 위해 자주 등장하는 중요 파라미터는 임계점(critical point) 주변의 유동 속도  $V$ 에 관한 행렬  $3 \times 3$ 인  $\nabla V$ 로서, 이 행렬의 고유값(eigenvalues) 및 고유벡터(eigenvectors)를 가지고 특정 위치에서 유동 상태의 위상 구조<sup>[20,21]</sup>를 파악한다. 유동 속도  $V$ 에 관한  $\nabla V$ 은 다음과 같이 표시되며, 아래의 전개식에 의해 계산된다. 즉,

$$\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] \quad (46)$$

여기서

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{k=0}^2 \frac{\partial V_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (47)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k / \partial}{\partial x_j / \partial} = \frac{1}{V_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial} \right) \quad (48)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial} = \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial} + \frac{\partial u_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial} + \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial} = \nabla u_k \cdot \mathbf{V} \quad (49)$$

이므로, 결국  $\nabla V$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \sum_{k=0}^2 \frac{\partial V_i}{\partial u_k} \left( \frac{\nabla u_k \cdot \mathbf{V}}{V_j} \right) \quad (i=0, 1, 2, j=0, 1, 2) \quad (50)$$

여기서  $V_j$ 와  $\partial V_i / \partial u_k$ 는 각각 VNURBS의 0차 미분, 1차 미분이므로 미분식 계산 알고리즘에 의해 쉽게 구해지며,  $\nabla u_k$ 는 4장의 식 (32)에 의해 계산된다.

이상과 같이 본 연구의 VNURBS에 의해 임계점 주변의 특징 현상 정보는 추출되며, 이를 가지고 Fig. 2와 Fig. 3과 같은 가시화 결과를 생성할 수 있다. Fig. 2와 Fig. 3은 각각 유선 방식과 유곡면(stream surface) 방식에 의해 핀 주변의 유동 흐름을 보여주고 있다. 여기서 Fig. 3의 색깔 분포는 유속의 크기를 나타내며, 핀과 바닥면이 만나는 부위에서 특징 현상에 해당하는 와류 위상 구조를 확인할 수 있다.

### 5.3 음함수 곡면 모델링

본 연구의 VNURBS 볼륨 표현식을 기반으로 음함수 곡면 분야<sup>[19]</sup>에서 수행하는 여러 가지 종류의 모델링 작업을 수행할 수 있다. 비록 엄밀한 의미에서

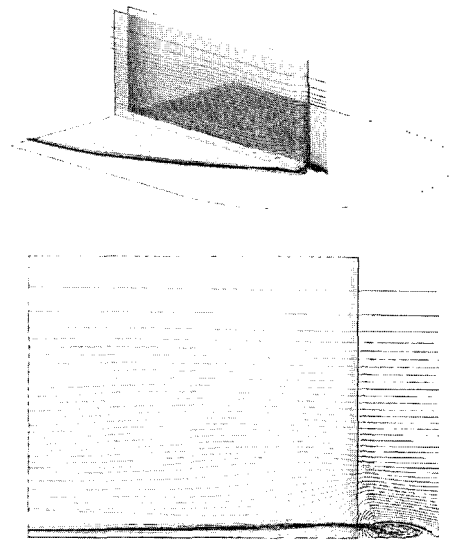


Fig. 2. Streamlines around blunt fin.

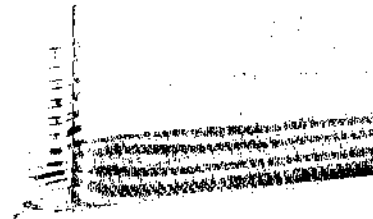


Fig. 3. Stream surfaces around blunt fin.

VNURBS 볼륨식은 매개변수 표현식이지만, 3차원 좌표 공간에서의 스칼라 함수값 및 좌표값에 대한 함수 미분값 등을 계산하여 반환해 줄 수 있다는 측면에서 그 근본 기능은 같다고 할 수 있다. 즉 음함수 곡면에서 물체의 내부, 외부, 및 경계를 함수값의 부호를 가지고 판단하여 경계에 해당하는 점의 집합을 가지고 곡면의 기하학적 형상을 결정하는데, VNURBS도 임

의 위치에서 함수값의 부호를 기반으로 내부, 외부, 경계를 판단할 수 있다. 본 연구에서 사용한 음함수 곡면의 VNURBS 표현식은 다음과 같다. 즉,

$$B(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d_i \end{pmatrix} R_i(\mathbf{u}) \quad (51)$$

여기서  $d_i$ 는 거리(distance) 개념의 스칼라 값으로, 흔히 대수적 거리(algebraic distance)라고 부른다.

결국, 생성하고자 하는 곡면에 대해, 그 내부 공간에 존재하는 점에 양의 거리값을, 그리고 외부 공간의 점에 음의 거리값을 부여하는 방식으로 볼륨 데이터를 구성하여 3장에서 소개한 방법에 의해 식 (51)을 생성한다면, 임의의 위치에서의 함수값 부호를 판단할 수 있고, 이로부터 볼륨의 내부, 외부 및 경계를 결정할 수 있다. 그리고 더 나아가 식 (51)의 표현식은 음함수 곡면의 일반화된 형태인 등위 곡면(level set surfaces)<sup>[22]</sup>도 충분히 표현할 수 있다. Fig. 4는 이러한 등위 곡면의 표현이 본 연구의 VNURBS에 의해 정의될 수 있음을 보여주고 있다.

Fig. 4에서 구(sphere) 형상을 가진 등위 곡면들은 다음의 과정을 통하여 생성하였다. 먼저 불규칙하게 분포된 측정점들을 샘플링하고, 각 측정점에서의 함수값을 구 곡면의 중심점과 측정점 간의 거리 계산을 통하여 결정한다. 그 다음, 이들 측정점과 함수값 데이터를 볼륨 데이터로서 입력하여 식 (51)의 볼륨 표현식을 완성한다. 그리고 이렇게 생성된 VNURBS 볼륨식으로부터 Marching Cubes<sup>[23]</sup> 등의 알고리즘을 사용하여 특정 등위값에 해당하는 등위 곡면들을 추출한다.

한편, 음함수 곡면의 가장 대표적인 모델링 작업으로 불리언 연산 작업(set theoretic operations)이 있다. 즉 두 음함수 곡면 간의 합집합(union), 교집합(intersection) 및 차집합(difference)을 계산하는 작업으로서, 간단한 대수적 관계식<sup>[9]</sup>에 의해 정의된다. 이러

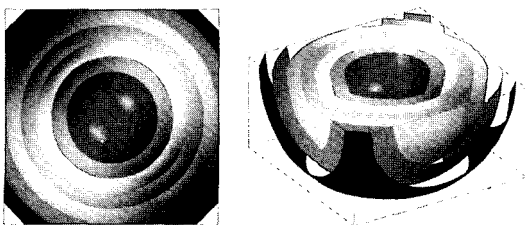
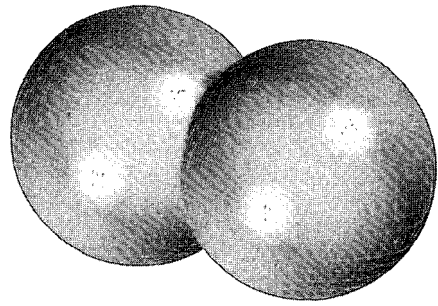
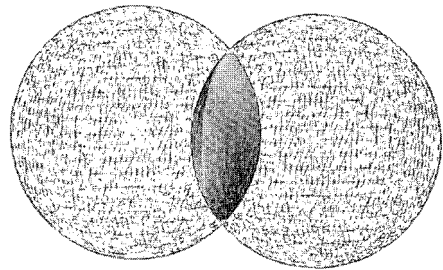


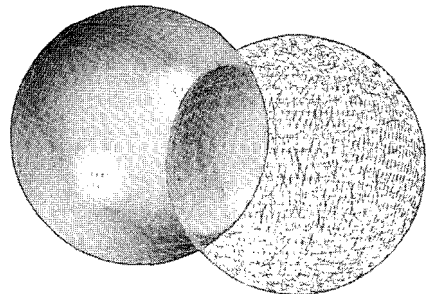
Fig. 4. Isosurfaces of sphere function.



(a) union



(b) intersection



(c) difference

Fig. 5. Implicit surface modeling.

한 음함수 곡면 모델링 작업도 본 연구의 VNURBS 볼륨 표현식이 음함수 곡면의 구조 및 성질을 가지고 있으므로 쉽게 구현된다. Fig. 5의 (a), (b), (c)는 Fig. 4에서 생성한 구 곡면의 볼륨 표현식을 가지고, 각각 합집합, 교집합, 차집합에 의해 모델링한 결과를 보여주고 있다.

결국, 이상의 결과로부터 본 연구의 VNURBS가 매개변수 표현식이지만, 음함수 곡면의 표현 및 모델링 작업을 충분히 구현할 수 있는 표현 구조라는 점을 확인할 수 있다.

### 5.4 이미지 모핑

이미지 모핑(image morphing)<sup>[24]</sup>이란 입력된 두 개

의 이미지로부터 그 사이에 존재할 중간 형태의 이미지를 적당한 이미지 변형 및 혼합 과정을 거쳐 생성하고, 이를 연속적으로 보여주는 일련의 과정을 말하는데, 흔히 image metamorphosis라고 부르기도 하며, 영화 및 텔레비전 등의 영상 제작 분야에 특별한 시각적 효과를 주기 위한 기능으로서 널리 알려져 있다.

본 연구에서 수행한 이미지 모핑은 기존의 모핑 알고리즘인 메쉬 와핑(Mesh warping)<sup>[23]</sup> 방식으로서, 그 내부에 사용된 이미지 변형 및 혼합 과정은 VNURBS에 의해 표현되고 계산된다. 이들 VNURBS에 의해 수행되는 이미지 모핑 과정은 다음과 같다.

먼저, 입력된 두 이미지 즉, 출발 이미지(source image)와 목표 이미지(target image)에서 각각 특징점들을 설정하고 이들 간의 대응 관계를 정의한다. 그리고 이를 입력 데이터로 구성하여 3장의 보간법에 의해 식 (52)와 같은 공간 매핑(space mapping) 함수를 생성한다.

$$Mapping(\mathbf{u}) = \sum_1 \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ x_t \\ y_t \end{pmatrix} \mathbf{R}_t(\mathbf{u}) \quad (52)$$

여기서  $s$ 와  $t$ 는 각각 출발 이미지와 목표 이미지를 표시하는 첨자이고,  $(x, y)$ 는 이미지 픽셀 좌표계를 표시하며,  $\mathbf{u}$ 는  $\mathbf{u} = (u, v)$ 로서 이미지의 매개변수 공간을 나타낸다.

그리고 식 (52)의 공간 매핑 함수를 사용하여, 변형 전과 변형 후의 이미지를 생성하고, 이를 선형 보간하여 식 (53)과 같은 형태의 이미지 볼륨 함수를 생성한다.

$$Warping(\mathbf{u}) = \sum_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ r \\ g \\ b \\ \alpha \end{pmatrix} \mathbf{R}_t(\mathbf{u}) \quad (53)$$

여기서  $r, g, b, \alpha$ 는 이미지의 색깔 데이터이며, 변형 전과 변형 후의 이미지는 각각  $z = 0$ 와  $z = 1$ 의 위치에 존재한다. 그리고  $\mathbf{u}$ 는  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 로서  $(u, v)$ 는 2차원 이미지 평면을 나타내는 파라미터로서 사용되고,  $w$ 는 이미지의 변형 방향을 나타내는 파라미터로서 사용된다. 결국, 식 (53)에서  $w$ 의 범위가

$0 \leq w \leq 1$  일 때,  $Warping(u, v, w=0.5)$ 는 변형 전( $w = 0$ )과 변형 후( $w = 1$ )의 두 이미지 사이에 존재하는 변형된 이미지를 나타낸다.

그 다음, 이상의 이미지 와핑 과정을 입력된 두 이미지 각각에 대해 적용한다. 그리고 이렇게 생성된 두 볼륨 함수를 다음의 식 (54)와 같이 가중치 합에 의하여 최종의 혼합된 이미지를 생성한다. 즉,

$$Morphing(\mathbf{u}) = (1-w) \cdot W_{warping}^s(u, v, w) + w \cdot W_{warping}^t(u, v, 1-w) \quad (54)$$

여기서  $W_{warping}^s(\mathbf{u})$ 와  $W_{warping}^t(\mathbf{u})$ 는 각각 출발 이미지 및 목표 이미지의 이미지 와핑을 정의하는 볼륨 함수이다. 그리고  $w$ 는 가중치 평균을 위한 매개 변수이자 동시에 모핑 과정의 방향을 나타내는 파라미터이다. 즉,  $Morphing(u, v, w=0.5)$ 는 출발 이미지( $w = 0$ )와 목표 이미지( $w = 1$ ) 사이의 중간 위치에 존재하는 모핑된 이미지를 나타낸다.

Fig. 6은 이미지 모핑의 가장 원시적 형태로서, 식 (52)의 공간 매핑 없이, 출발 이미지와 목표 이미지를 선형적으로 1차 보간 하였을 때 생성된 볼륨 함수의 단면 이미지를 차례로 보여주고 있다. 즉, 위쪽 줄의 맨 왼쪽에서 아래 쪽 줄의 맨 오른쪽 방향으로 모핑이 진행되는데, 중간 위치에서 두 이미지가 겹쳐지는 모습을 확인할 수 있다.

한편, Fig. 7은 위에서 설명한 식 (52), (53)의 이미지 와핑 과정과 식 (54)의 이미지 혼합 과정을 모두 보여주고 있다. 1번째 줄과 2번째 줄의 이미지는 출발 이미지의 와핑 과정을 오른쪽 진행 방향으로 보여주고 있으며, 반면 4번째 줄과 5번째 줄의 이미지는 왼쪽 방향으로 목표 이미지의 와핑 과정을 보여주고 있다. 여기서 이미지 위의 흰색 격자망은 특징 형상을 정의하기 위해 사용한 점들로서 이 점들의 와핑 과정도 함께 표시되어 있다. 그리고 가운데 3번째 줄의 이미지는 2번째 줄의 와핑 이미지와 4번째 줄의 와핑 이미지를 식 (54)에 의해 가중치 평균한 결과를 보여



Fig. 6. Cross-dissolve.



Fig. 7. Image morphing.

주고 있다. 즉, 이미지 모핑의 최종 과정을 보여주고 있다.

결국, 서술적으로 표현되는 기존의 이미지 모핑 알고리즘이 수학적으로 식 (54)와 같은 VNURBS표현식에 의해 정의되고 계산됨을 확인할 수 있다. 즉, 2차원 이미지 공간과 외핑 및 모핑 과정이 일어나는 방향으로의 1차원 공간을 합한 3차원 볼륨 공간 상에 모핑에 의해 얻고자 했던 모든 이미지는 존재하며, 이를 VNURBS에 의해 표현함으로써 서술적 알고리즘이 수학적 표현식으로 변환되었다고 말할 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는  $m$ 차원의 공간 속에 존재하는  $k$ 개의 속성을 가진 닫힌 볼륨 공간 혹은 객체를 표현할 수 있는 VNURBS 볼륨 표현식에 대해 소개하였고, 측정 및 계산을 통하여 획득한 볼륨 데이터로부터 VNURBS를 생성하는 근사법 및 보간법 알고리즘을 서술하였다. 그리고 이렇게 생성된 볼륨 공간을 분석하는데 있어서, 응용 분야의 목적에 따라 다르겠지만, 기본적으로 제공되어야 할 여러 형태의 수학적 혹은

기하학적 요소들의 계산 알고리즘에 관하여 소개하였다.

또한 VNURBS가 여러 응용 분야에 적용되어 다양한 형태의 모델링 및 분석을 위한 도구로서 사용될 수 있음을 보였다. 즉, 격자 생성의 예제를 통하여 VNURBS의 매개변수 공간이 3차원의 기하학적 공간으로 매핑되며, 이를 통하여 격자망 구조가 쉽게 생성됨을 확인하였다. 그리고 유동 가시화 예제를 통하여 VNURBS가 임의의 위치에서 유동 상태에 관한 위상 구조 등을 분석할 수 있는 수학적 도구로서 사용될 수 있음을 확인하였다. 또한, 음함수 곡면 모델링 예제를 통하여 기하학적 형상 모델링의 가능성을 확인하였고, 이미지 모핑 예제를 통하여 서술적 알고리즘이 VNURBS에 의해 표현될 수 있음을 확인하였다.

이상과 같이, 특정 응용 분야에서 다루는 볼륨 공간의 차원 및 그 내부에 존재하는 속성의 차원을 결정하고, 이를 VNURBS의 매개변수 공간 및 조정점 등에 반영하여 표현할 수 있다면, 그 응용 분야의 대상 객체는 수학적으로 정의되는 것이며, 표현된 VNURBS가 지배 방정식의 역할 및 수치적 계산 도구로서의 역할을 모두 수행할 수 있게 된다. 즉 VNURBS는 일반화된 개념의 볼륨 표현식으로서 특정 응용 분야의 특성에 무관하다고 말할 수 있다.

한편, 추후 연구 과제로서 볼륨 공간의 극부적 복잡성 혹은 해상도를 효율적으로 표현하고 관리할 수 있는 VNURBS기반의 계층적 구조에 관한 연구가 필요하다. 현재, VNURBS의 결점 삽입(knot insertion) 방식에 의한 해상도 표현 구조가 연구 중에 있다.

또한 추후 과제로서 비메쉬(meshless) 기법<sup>126,271</sup>으로의 응용을 살펴볼 수 있다. VNURBS가 불균질의 볼륨 공간을 표현할 수 있으므로, 특정 영역의 물리적 상태를 기술하는 지배 방정식에 대하여, 이를 만족시키는 볼륨 공간을 생성할 수 있는 것이다. 즉 지배 방정식의 해를 제공할 수 있는 솔루션 구조를 가지고 있는 것이다. 먼저 VNURBS를 지배 방정식에 대입하고, 지배 방정식의 수치적 반복 계산 과정에서 요구되는 볼륨 공간의 물리적 상태를 VNURBS에 의해 계산하여 제공한다. 이러한 방식으로 반복 계산이 진행되어 최종의 수렴 상태에 놓인다면, 결국 VNURBS가 지배 방정식의 해를 제공할 것이 된다. 여기서 VNURBS의 조정점은 마치 메쉬의 노드점 역할을 수행하는데, 조정점의 기하학적 위치는 고정되어 있고, 조정점 위치에 존재하는 물리적 속성값만이 변화하여 볼륨 공간의 물리적 상태를 기술한다.

## 감사의 글

이 논문은 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국 학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(R05-2004-000-10448-0).

## 참고문헌

- Kaufman, A. E., "State-of-the-art in Volume Graphics", In *Volume Graphics*, Springer, 2000.
- Elvins, T. T., "A Survey of Algorithm for Volume Visualization", *Computer Graphics*, Vol. 15, pp. 194-201, 1992.
- Hesselink, L., "Research Issues in Vector and Tensor Field Visualization", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 14, No. 2, pp. 50-56, 1994.
- Bloomenthal, J. et al., *Introduction to Implicit Surfaces*, Morgan Kaufmann, 1997.
- Blinn, J. F., "A Generalization of Algebraic Surface Drawing", *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 1, No. 3, pp. 235-256, July 1982.
- McInerney, T. and Terzopoulos, D., "Deformable Models in Medical Image Analysis : A Survey", *Medical Image Analysis*, Vol. 1, No. 2, pp. 91-108, 1996.
- Osborne, F., Pfister, H., Lauer, H., McKenzie, N., Gibson, S., Hiatt, W. and Ohkami, T., "EM-Cube: An Architecture for Low-cost Real-time Volume Rendering", *Eurographics Workshop on Graphics Hardware '97*, pp. 131-138, August 1997.
- Mitchell, D. P. and Neত্রavali, A. N. "Reconstruction Filters in Computer Graphics", *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 88)*, Vol. 22, No. 4, pp. 221-228, August 1988.
- Pasko, A., Adzhiev, V., Sourin, A. and Savchenko, V., "Function Representation in Geometric Modeling: Concepts, Implementation and Applications", *The Visual Computer*, Vol. 11, No. 8, pp. 429-446, 1995.
- Pasko, A., Adzhiev, V. and Schmitt, B., "Constructive Hypervolume Modeling", Technical Report TR-NCCA-2001-01, National Centre for Computer Animation, Bournemouth University, UK, February 2001.
- Chen, M. and Tucker, J. V., "Constructive Volume Geometry", *Computer Graphics Forum*, Vol. 19, No. 4, pp. 281-293, 2000.
- 박상근, "VNURBS기반의 다차원 불균질 볼륨 객체의 표현: 개념 및 형성", 한국CAD/CAM학회 논문집, 제10권, 제5호, pp. 303-313, 2005.
- Picgl, I. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer-Verlag, 1995.
- Nielson, G. M., "Scattered Data Modeling", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 12, No. 1, pp. 60-70, 1993.
- Hartley, P. J. and Judd, C. J., "Parametrization and Shape of B-spline Curves for CAD", *Computer Aided Design*, Vol. 12, No. 5, pp. 235-238, 1980.
- Schwartz, W., "Elliptic Grid Generation System for Three-dimensional Configuration Using Poisson's Equation", *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*. Hauser, J. and Taylor, C. (eds.), Pineridge Press Limited, 1986.
- Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C., *Numerical Grid Generation Foundation and Applications*, Elsevier Science Publishing, 1985.
- Sanna, A., Montrucchio, B. and Montuschi, P., "A Survey on Visualization of Vector Fields by Texture-based Methods", *Research Developments in Pattern Recognition*, Vol. 1, No. 1, 2000.
- Park, S. K. and Lee, K. W., "High-dimensional trivariate NURBS Representation for Analyzing and Visualizing Fluid Flow Data", *Computers & Graphics*, Vol. 21, No. 4, pp. 473-482, 1997.
- Globus, A., Levit, C. and Lasinski, T., "A Tool for Visualizing the Topology of Three-dimensional Vector Fields", In *Proceedings IEEE Visualization '91*, pp. 33-40, 1991.
- Helman, J. and Hesselink, L., "Visualizing Vector Field Topology in Fluid Flows", *IEEE Computer Graphics & Applications*, Vol. 11, No. 3, pp. 36-46, 1991.
- Sethian, J. A., *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- Lorenson, W. E. and Cline, H. E., "Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm", *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 87)*, Vol. 21, No. 4, pp. 163-169, July 1987.
- Lee, S., Chwa, K.-Y., Ilahn, J. and Shin, S. Y., "Image Morphing Using Deformation Techniques", *J. Visualization and Computer Animation*, Vol. 7, No. 1, pp. 3-23, 1996.
- Wolberg, G., *Digital Image Warping*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- Atfuri, S. N. and Zhu, T., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. 22, pp. 117-127, 1998.
- Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y.F., "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.



**박 상 근**

1991년 포항공과대학교 기계공학과 학사  
1993년 서울대학교 기계설계학과 석사  
1997년 서울대학교 기계설계학과 박사  
1997년~1999년 삼성SDS 정보기술연구  
소 선임연구원  
2000년 서울대 BK21 기계분야사업단 계  
약교수

2000년~2002년 (주)K&I 테크놀로지 전무기술이사  
2003년~현재 국립충주대학교 기계공학과 조교수  
관심분야: Computational Geometry, CAD/CAM, Scientific Data  
Visualization, Virtual Engineering

---