

# 러브파와 레일리파의 분산특성을 이용한 동시역산해석(I) - 동시역산해석기법의 구성 -

## Joint Inversion Analysis Using the Dispersion Characteristics of Love Wave and Rayleigh Wave (I) - Constitution of Joint Inversion Analysis Technique -

이 일 화<sup>1</sup>      Lee, Il-Wha  
조 성 호<sup>2</sup>      Joh, Sung-Ho

### Abstract

Love wave and Rayleigh wave are the major elastic waves belonging to the category of the surface wave. Those waves are used to determine the ground stiffness profile using their dispersion characteristics. The fact that Love wave is not contaminated by P-wave makes Love wave superior to Rayleigh wave and other body waves. Therefore, the information that Love wave carries is more distinct and clearer than that of others. Based on theoretical research, the joint inversion analysis that uses the dispersion information of both Love and Rayleigh wave was proposed. This analysis consists of the forward modeling using transfer matrix, the sensitivity matrix for evaluating the ground system and DLSS (Damped Least Square Solution) as an inversion technique. The technique of joint inversion uses the dispersion characteristics of Love wave and Rayleigh wave simultaneously making the sensitivity matrix. The sensitivity matrix was used for inversion analysis repeatedly to find the approximate ground stiffness profile. The purpose of the joint inversion analysis is to improve accuracy and convergency of inversion results by utilizing that frequency contribution of each wave is different.

### 요 지

러브파와 레일리파는 표면파로서 각 파가 가지는 분산특성을 활용하여 지반의 강성주상도를 파악할 수 있는 특징을 가지고 있다. 이 중 러브파는 한 방향에 대한 응력-변위만 고려하면 되기 때문에 수치적 모델링이 간단하다. 전파시에는 이론적으로 체적파의 영향 및 밀도의 변화가 없어 각 각의 물성치를 갖는 다층구조지반에서 적용성이 높다고 할 수 있다. 이러한 장점을 활용하여 최종적으로는 단파장에 유리한 러브파와 장파장에 유리한 레일리파의 분산정보를 같이 이용하여 동시역산해석을 할 수 있는 기법을 제안하고자 한다. 해석기법은 크게 3가지로 구성되는데, 러브파와 레일리파의 정모델링 해석을 위해 전달행렬법의 구성, 대상 지반의 시스템 결정을 위한 민감도행렬의 구성 그리고 역산해석기법인 Damped Least Square Solution (DLSS)이다. 동시역산의 방법은 민감도행렬을 구성할 때 레일리파와 러브파의 분산정보가 동시에 사용되며, 계산된 민감도행렬을 역산해석하여 지반의 전단파 주상도를 반복적으로 계산하게 된다. 동시역산해석의 목적은 각 파의 주파수 기여도가 다른 점을 활용함으로써 역산결과의 정확도와 수렴도를 향상하고자 함이다.

**Keywords :** SASW, Joint inversion, Love wave, Rayleigh wave, Dispersion

1 정회원, 한국철도기술연구원 궤도토목연구본부 선임연구원 (Member, Senior Researcher, Korea Railroad Research Institute, iwlee@krrri.re.kr)

2 정회원, 중앙대학교 건설대학 토목공학과 부교수 (Member, Assoc. Prof., Dept. of Civil Engrg. Chung-Ang Univ.)

## 1. 서론

토목분야에서 지반 강성평가를 목적으로 하는 표면파 시험은 정상표면파시험(steady state surface wave test)으로부터 체계화되기 시작하였다(Jones(1962)). 하지만 정상표면파시험은 각 주파수별로 반복 가진시키기 때문에 현장에서 응용하기에는 많은 시간과 노력이 요구되었다. 특히 이론에 바탕을 둔 역산해석기법이 없었기 때문에 파장을 이용하여 간략하게 파의 전파깊이를 계산하였다. 그 후 SASW기법이 도입되고 체계적으로 연구되면서 Al-Hunaidi(1994), Joh(1996), Gucunski와 Wood(1991), Roesset et al.(1991) 등에 의해 다양한 시험기법과 역산해석기법이 개발되었다. 1990년대부터는 SASW기법이 지반 또는 구조물 조사에 적용되는 사례가 증가하면서, SASW시험 결과의 신뢰성 및 해상도를 향상시키기 위한 다양한 연구가 수행되었다.

SASW기법에서는 레일리파의 수직성분 즉, 전파방향의 수직운동파에 대한 위상분산정보가 주로 이용되는데, 이는 표면파중 레일리파의 수직성분 에너지가 가장 크기 때문이었다. 그러나 지층구조가 복잡하고 층간 강성차가 큰 경우, 포장구조체 등에서는 그 해상도가 낮아 역산해석시에 많은 어려움이 있었다. 해상도가 낮아지는 이유로는 표면파의 고차모드가 저차모드에 영향을 미치는 모드점프현상과 지반조사에서 사용되는 가진원의 크기 및 감진기의 좁은 간격 때문에 감쇠되지 않은 체적파에 의해 분산곡선상에서 오차가 발생하기 때문이었다. 이러한 문제점을 보완하는 방법으로서 Passive SASW(Tokimatsu et al., 1992), Multi channel SASW(조성호와 강태호, 2000) 등이 연구되었으며, 러브파를 이용하는 방법도 동일한 목적을 가지고 있다고 할 수 있다.

수평표면파의 대표적인 종류로는 레일리파의 수평성분과 러브파가 있으며 이 중 러브파의 가장 큰 특징은 이론적으로 압축체적파 및 레일리모드에 의한 영향이 없다는 것이다. 러브파는 상부층의 강성이 상대적으로 작은 지반의 지표면에 SH파 형태의 표면파로 존재한다는 것이 Love(1911)에 의해 처음 밝혀졌다. 러브파는 1950년대부터 지각의 전단파속도를 추정하기 위하여 지구물리학분야에서 사용되기 시작하였는데 그 후 러브파의 분산에 대한 본격적 연구는 Ewing et al.(1957) 등에 의해 정립되었다. 러브파의 분산특성은 지구물리학분야에서 지각의 상부구조를 결정하는데 상당히 유용하게 사용되었다. 가진원은 광대역지진기록 등 러브

파의 장주기성분을 주로 이용하였으며 분산특성연구에는 주로 군속도(group velocity)가 활용되었다. 러브파를 이용한 해석기법은 Haskell(1953)에 의해 체계화되었는데 Haskell은 다층구조모델을 이용하여 러브파와 레일리파의 분산특성을 전달행렬법을 이용하여 계산하였다. 그 후, Knopoff(1964), Shapiro et al.(2000), Schwab et al.(1984)등이 러브파의 분산에 대한 연구를 수행하였으며, Bojan(2000)은 지반의 강성평가를 목적으로 러브파를 적용하였는데, 비틀재하판을 이용하여 발생된 러브파의 분산특성을 이용하는 것이 레일리파를 이용한 기존의 스펙트럴해석에 비하여 충분히 민감하다고 보고하였다. 표면파의 동시역산기법에 대한 연구는 Carlo와 Glenn(1998) 등이 레일리파의 위상속도와 감쇠비를 이용하여 동시역산해석을 연구하였는데, 비선형점탄성해석이론을 바탕으로 위상속도와 감쇠비의 다중모드를 구하여 유효위상속도를 계산하였다.

본 논문에서는 역산해석의 해상도 향상을 위한 방법으로서 기존의 SASW기법에 러브파의 분산정보를 도입하고자 한다. 러브파는 한 방향에 대한 응력-변위만 고려하기 때문에 수치적 모델링이 간단하고 전파시에는 이론적으로 체적파의 영향 및 밀도의 변화가 없어 각각의 물성치를 갖는 다층구조에서의 적용성이 높다고 할 수 있다. 이러한 장점을 활용하여 최종적으로는 러브파와 레일리파의 분산정보를 같이 이용하여 동시역산해석을 할 수 있는 기법을 제안하고자 한다.

## 2. 표면파의 전파특성

### 2.1 레일리파

3차원의 균질한 무한체에서는 압축파와 전단파 두가지의 해만 존재하지만 자유장을 가지고 있는 반무한체의 지표면에서는 또 다른 형태의 파인 레일리파가 존재한다. 이파는 반무한체의 자유장 부근에 국한되어 존재하며 깊이가 깊어질수록 크기는 급속히 감쇠된다. 레일리파는 수평성분과 수직성분이 중첩된 파이며, 수직성분의 크기가 수평성분보다 크기 때문에 지표면에서는 같은 크기의 에너지를 가지지만 깊이에 따라서는 다른 감쇠비를 가진다. 깊이에 따라 에너지감쇠율의 차이로 인하여 90°의 위상차를 가지는 두 성분의 중첩된 파는 전파방향의 반대방향으로 타원궤적을 따라 전파한다.

## 2.2 러브파

등방성의 탄성반무한체에서는 P파, S파, 레일리파만 발생하지만, 반무한체위에 상대적으로 약한 강성을 가진 이질층이 존재하는 경우에는 러브파가 발생된다(그림 1). 러브파는 상부층내에 입사된 SH파의 다중반사(multiple reflections)에 의해 발생한다. 그림과 같이 반무한체 상부에 강성이 상대적으로 약한 지반이 놓여있을 때, x 방향으로 전파되는 러브파는 y 방향으로만 입자변위가 발생하고 다음식으로 표현될 수 있다.

$$v(x, z, t) = V(z)e^{i(k_L x - \omega t)} \quad (1)$$

여기서  $v$ 는 y방향의 입자변위,  $\omega$ 는 각주파수,  $t$ 는 시간,  $V(z)$ 는 깊이의 변화를 나타내고  $k_L$ 은 러브파의 파수(wave number)를 나타낸다.

## 3. SASW시험

SASW(Spectral-Analysis-Of-Surface-Waves; 주파수 영역 표면파 해석) 기법은 충격으로 발생된 응력파의 전파를 이용하여 지반의 강성을 평가하는 탄성파시험기법이다. SASW시험은 기본적으로 지표면이나 구조물의 표면에서 물리적인 충격이나 진동을 가하여 응력파를 발생시키는 것으로 시작된다. 가진원에 의해 발생된 응력파는 지반이나 구조물 매체를 통하여 사방으로 전파되어 나가는데, 진동원에서 일정 거리만큼 떨어진 위치에 설치된 감진기에 의해 지반이나 구조물의 진동을 측정하게 된다. 발생된 응력파의 측정은 가진원과 일직선 상에 위치한 두 지점에서 이루어지는데, 이는 충격 지점에서 출발하여 전파되어 나가는 응력파가 첫 번째 감진기에서 두 번째 감진기까지 도달하는데 소요되는 시간을 측정하여 응력파 전파 속도를 측정한다. 이러한 응력파 전

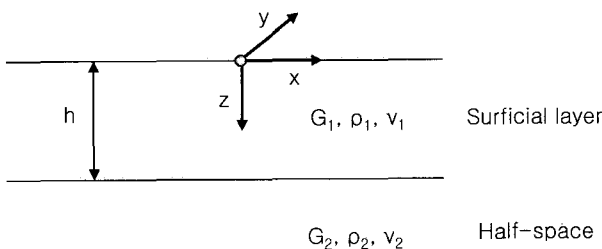


그림 1. 러브파가 발생하는 지반조건( $\frac{G_1}{\rho_1} < \frac{G_2}{\rho_2}$ )

파 속도의 결정은 FFT를 이용하여 여러 가지 주파수 성분의 정현파에 대해 동시에 이루어지게 되는데 일반적으로 약 400~800개 주파수의 정현파에 대한 전파 속도를 한 번의 실험으로 하나의 실험분산곡선을 구할 수 있다. 두 감진기 간 시간차는 전달함수(transfer function,  $H_{21}$ )나 크로스파우어스펙트럼(cross power spectrum,  $G_{21}$ )의 위상각으로부터 결정할 수 있다.

## 4. 해석의 최적화

초기 표면파탐사기법인 정상표면파시험에서는 하나의 파장을 가지는 파를 이용하여 각 주파수별 속도를 계산하였다. 지반의 깊이별 전단파속도를 계산할 때는 각 주파수의 파장에 경험적인 상수를 곱하여 계산하였다. 그러나 이러한 방법은 지반의 특성에 따라 매우 큰 편차를 보이고 있으며 특히 지반의 상부층의 강성이 크거나 지중장애물이 있는 경우에서는 그 신뢰도가 매우 낮은 값을 보여주고 있다. 이에 SASW시험에서는 시험의 정확도를 높일 수 있는 기법으로 역산해석기법을 도입하여 적용하고 있다. 역산해석은 실험분산곡선을 통하여 획득된 신호를 이용하여 공학적 물성치 즉, 지반의 깊이별 전단파속도를 동역학적 응력이론을 사용하여 계산한다. 역산해석에서는 Haskell(1953)의 전달행렬법 및 Kausel과 Peck(1982)의 동적강성행렬기법이 널리 이용되고 있다.

### 4.1 반복적 정모델링

지구물리탐사분야의 정모델링해석은 기본적으로 관측자료를 기초로 지하구조를 도출하기 위하여 그 물리적 성질을 추정하는 것이다. 이러한 목적을 위하여 구하고자 하는 지하구조모델의 매개변수 즉, 물리적 또는 기하학적 성질은 변화시키면서 주어진 함수를 이용, 계산에 의한 이론치와 실제로 얻은 관측치를 비교하여 그 차이가 가장 작아지는 변수값을 시행착오적으로 구하는 것이 보통이다.

SASW기법에서 사용되는 반복적 정모델링해석(iterative forward modeling analysis)은 전단파속도 주상도를 결정하기 위하여 현장에서 실측된 실험분산곡선(experimental dispersion curve)을 이용하여 계산된 평균분산곡선(averaged dispersion curve)과 초기 가정(전단파 속도 주상도)을 사용하게 된다. 응력파 모델이론을 통하여 이

론분산곡선(theoretical dispersion curve)을 계산하고 구해진 이론분산곡선을 실험분산곡선과 비교하여 두 분산곡선이 잘 일치하지 않는다면 처음 가정한 전단파 주상도를 수정하여 새로운 이론분산곡선을 계산하는 과정을 반복한다. 정모델링기법을 수행하기 위해서는 실험 지반내 각 층의 물성치가 정의되어야 한다. 이러한 물성치는 전단파속도, 각 층의 두께, 포아송비, 각층의 밀도이며 이중 정모델링에서 변수는 일반적으로 전단파속도와 층의 두께만이 사용되며 이 두 개의 변수들이 정모델링을 통하여 조정된다.

## 4.2 역산해석

역산해석은 시험 결과로부터 지반구조모델을 추정하는 방법으로 1960년대 초부터 연구되었으며, 본격적인 연구는 Backus와 Gilbert(1970)에 의해 기본적 개념 정립과 방법론의 획기적인 발전을 이루게 되었다. 1980년대 후반부터는 사전정보(a priori information) 개념이 도입되어 비선형 지하구조모델에 대한 문제를 선형화시켜 선형역산알고리즘을 반복적으로 적용하여 모델을 보정해나가는 방법이 많이 사용되었다. 역산해석기법은 자동화되어진 정모델링기법으로서 최적화기법에 의해서 강성도 단면의 변화를 결정하므로 역산해석기법은 유일성(uniqueness)의 문제를 필수적으로 가지게 된다. 또한 모델의 오차와 해상도 사이의 상반관계가 있기 때문에 역산해석의 본질은 오차의 감소와 분해능 향상에 있다고 할 수 있다.

SASW기법에서는 해의 최적화를 위하여 확률밀도함수를 이용한 최대공산법(Maximum Likelihood Method) (Tarantola & Valette, 1982), 초기모델변수(starting model parameters)의 결정, 깊이 해상도 분석(depth resolution analysis) 및 층 예민도 분석(layer sensitivity analysis) 등의 기법들이 적용된다. 지구물리학분야에서도 여러 가지 역산해석기법이 제안되었으나 직접적으로 SASW기법에 적용되는 역산해석기법은 Joh(1996), Gucunski & Wood(1991), Rix & Leipski(1991), Tokimatsu et al.(1992) 등이 제시한 방법이 있다.

## 5. 동시역산해석

동시역산해석의 목적은 지반의 강성주상도 결정시 해상도 및 역산계산능력의 향상을 위하여 레일리파의

분산정보와 러브파의 분산정보를 같이 활용하기 위함이다. SASW시험의 해석에 있어 기지의 정보( $d_m$ )를 이용하여 미지의 정보( $m_n$ )을 구할 때 식 (2)와 같이 민감도 행렬(sensitivity matrix)이라 불리는 모델링 함수  $[G_{mn}] (m < n)$ 를 이용하여 역산해석을 수행한다. 레일리파만 이용할 경우에는 모델링함수 결정에 레일리파의 분산정보만 이용하지만, 동시역산해석에서는 레일리파와 러브파의 분산정보가 같이 사용된다.

$$m_n = G_{mn}^{-1} d_m \quad (2)$$

동시역산해석과정도 반복적 정모델링해석과 역산해석으로 구성된다. 본 논문에서는 정모델링을 위한 이론분산곡선의 계산은 수정전달행렬법(Tzong & Penzien, 1983)을 이용하였으며, 역산해석에서는 Damped Least Square Solution(DLSS)을 사용하였다.

### 5.1 이론분산곡선

반복적 정모델링해석에서는 실험분산곡선을 이용하여 계산된 대표분산곡선과 초기 가정을 이용하여 계산된 이론분산곡선을 사용하게 된다. 이론분산곡선은 응력과 모델이론을 통하여 계산되고 구해진 이론분산곡선을 실험분산곡선과 비교하여 두 분산곡선이 잘 일치하지 않는다면 처음 가정한 전단파주상도를 수정하여 새로운 이론분산곡선을 계산하는 과정을 반복한다. 본 논문에서는 이론분산곡선을 계산하기 위하여 수정전달행렬법을 사용하였다. 이 기법에서는 주어진 주파수와 파수에서 변위-응력 벡터가 구해지며 주파수영역에서의 벡터를 구하기 위해서 Hankel transform 형태의 파수적분을 수행한다.

#### 5.1.1 전달행렬법

지반내 서로 다른 층의 경계면에서 응력과 변위가 연속해야 한다는 조건으로부터 경계면에서 응력 및 변위는 동일하다고 할 수 있다. 그림 2에서 j-1 번째와 j 번째 경계면 사이의 전달행렬은 j 번째 층 물성값만으로 나타낼 수 있다.

z축의 원점을 j-1 번째 경계면으로 옮기면 j-1 번째와 j 번째 변위-응력 벡터는 각각 다음 식 (3), (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_{j-1} = E_{j-1} e_j(0) A_j \quad (3)$$

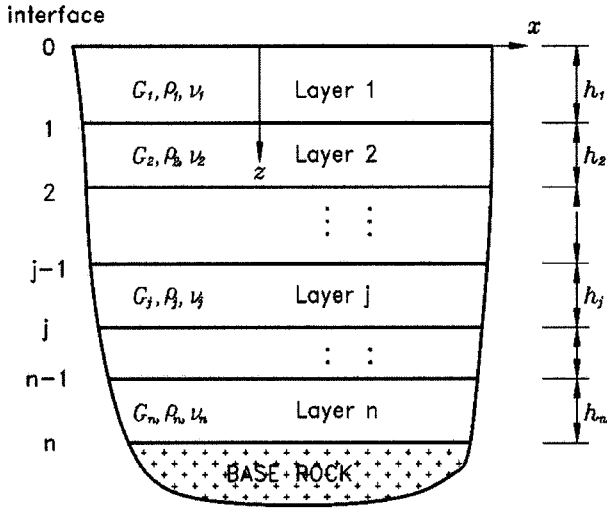


그림 2. 기저암반 위의 다층지반모델

$$Y_j = E_{j-1} e_j(h_j) A_j \quad (4)$$

여기서  $e_j(0)$ 는 단위행렬이고,  $h_j$ 는 j번째 층의 두께, A는 하중과 경계조건으로부터 결정되는 상수이며, 레일리파와 러브파의 E행렬은 다음과 같다.

$$E_R = \begin{bmatrix} -ik & -ik & v' & -v' \\ -v & v & -ik & -ik \\ -i2kGv & -i2kGv & -G(2k^2 - k_s^2) - G(2k^2 - k_p^2) & \\ G(2k^2 - k_s^2) & G(2k^2 - k_p^2) & i2kGv' & -i2kGv' \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$E_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iGv' & -iGv' \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서  $v = \sqrt{k^2 - k_p^2}$ ,  $v' = \sqrt{k^2 - k_s^2}$ 이며,  $k$ 는 표면파의 파수,  $k_p$ 는 압축파의 파수,  $k_s$ 는 전단파의 파수 그리고 G는 전단탄성계수이다. 표면파의 운동방정식을 이용하여 (j-1) 번째 경계면에서의 응력-변위벡터를 j번째 경계면에서의 응력-변위벡터로 나타내면 다음 식과 같다.

$$Y_{j-1} = E_j e_j(h_j) E_j^{-1} Y_j = a_j Y_j \quad (7)$$

여기서 레일리파의 전달행렬  $a_{jR}$ 와 러브파의 전달행렬  $a_{jL}$ 을 구하면 다음 식 (8), (9)와 같이 나타낼 수 있다. 러브파의 전달행렬인 경우, 한 방향에 대한 변위만 고려하면 되기 때문에 레일리파에 비하여 상당히 간단한 것을 알 수 있다.

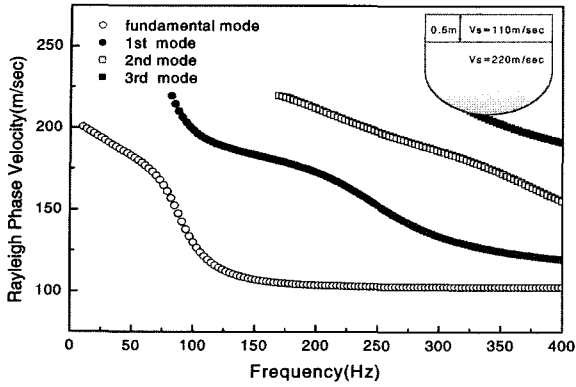
$$a_{jR} = \begin{bmatrix} \frac{2k^2}{k_s^2} (CH - CH') + CH' & \frac{ik}{k_s^2} (2v'SH' - (2k^2 - k_s^2) \frac{SH}{v}) \\ \frac{ik}{k_s^2} (-2vSH - (2k^2 - k_s^2) \frac{SH'}{v}) & CH - \frac{2k^2}{k_s} (CH - CH') \\ \frac{G}{k_s^2} (-4k^2 vSH + (2k^2 - k_s^2)^2 \frac{SH'}{v}) & \frac{2ikG}{k_s^2} ((2k^2 - k_s^2)(CH - CH')) \\ \frac{2ikG}{k_s} ((2k^2 - k_s^2)(CH - CH')) & \frac{G}{k_s^2} ((2k^2 - k_s^2) \frac{SH}{v} - 4k^2 v'SH') \\ \frac{1}{Gk_s^2} (-k^2 \frac{SH}{v} + v'SH') & \frac{ik}{Gk_s^2} (CH - CH') \\ \frac{ik}{Gk_s^2} (CH - CH') & \frac{1}{Gk_s^2} (vSH - k^2 \frac{SH'}{v}) \\ CH' + \frac{2k^2}{k_s} (CH - CH') & \frac{ik}{k_s^2} (-2vSH + (2k^2 - k_s^2) \frac{SH'}{v}) \\ \frac{ik}{k_s^2} (-2v'SH' + (2k^2 - k_s^2) \frac{SH}{v}) & CH - \frac{2k^2}{k_s} (CH - CH') \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$a_{jL} = \begin{bmatrix} CH' & -\frac{SH'}{Gv} \\ -Gv'SH' & CH' \end{bmatrix} \quad (9)$$

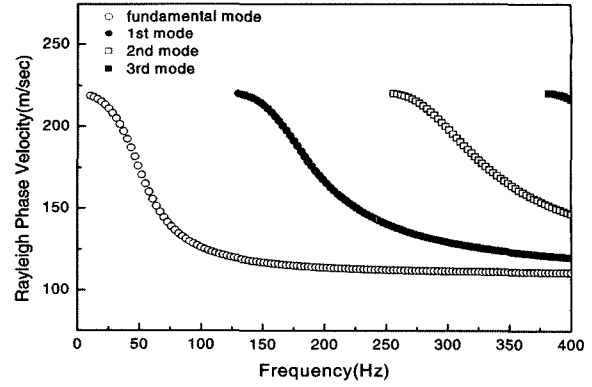
여기서  $SH = \sinh vh$ ,  $SH' = \sinh v'h$ ,  $CH = \cosh vh$ ,  $CH' = \cosh v'h$ 이다.

### 5.1.2 전달행렬법에 의한 분산 특성

전달행렬법으로 구한 레일리파와 러브파의 분산특성을 검토하기 위하여 그림 3(a)와 같은 지반조건인 경우 각 파의 분산특성을 검토하였다. 지반조건은 러브파가 발생할 수 있는 지반조건으로 상부층의 강성이 약한 2층 지반이며 하부층은 반무한체로 가정하였다. 각 파의 모드는 3차 모드까지 계산되었으며, 각 모드별 위상속도를 그림 3에 표시하였다. 계산 결과, 위상속도가 증가할수록 모드의 차수도 증가하면서 cut-off 주파수를 기준으로 고차모드가 형성되며 러브파의 위상속도가 약 10% 정도 더 크게 계산되었다. 자연지반에서의 표면파 분산특성은 저차모드에 가장 탁월하며 지반의 특성을 가장 잘 대표하기 때문에 SASW해석시에는 보편적으로 탁월모드(fundamental mode)만 사용하여 역산해석을 수행한다. 그림 3에서 레일리파의 탁월모드는 층별 강성차를 충분히 표현할 수 있으나 고차모드로 갈수록 민감도가 떨어지는 반면, 러브파의 민감도는 유사한 형태를 유지하는 것으로 나타났다. 민감도가 떨어지게 되는 것은 레일리파의 수평성분과 체적파에 의한 영향이라고 할 수 있다.



(a) 레일리파인 경우



(b) 러브파인 경우

그림 3. 표면파의 모드별 분산특성

### 5.1.3 탁월모드의 선정

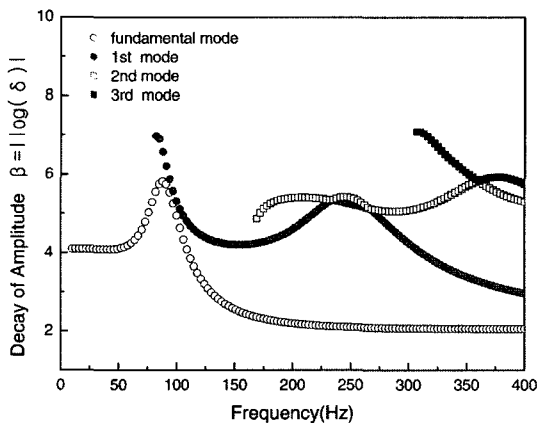
기반암이 존재하는 경우, 표면파 모드특성방정식을 만족하는 근은 무한개가 존재한다. 일반적으로 사용되는 모드수의 증가에 따라 해석결과는 향상되지만 계산 시간상의 문제와 실제 분산곡선에 영향을 미치는 모드는 몇 개의 저차모드이므로 적은 모드수를 사용하여 좋은 결과를 얻기 위해서는 탁월모드(fundamental mode)의 선정이 중요하다. 전형적인 표면파의 파수는 실수부와 허수부로 나누어 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k^i = \alpha^i + i\beta^i \quad (10)$$

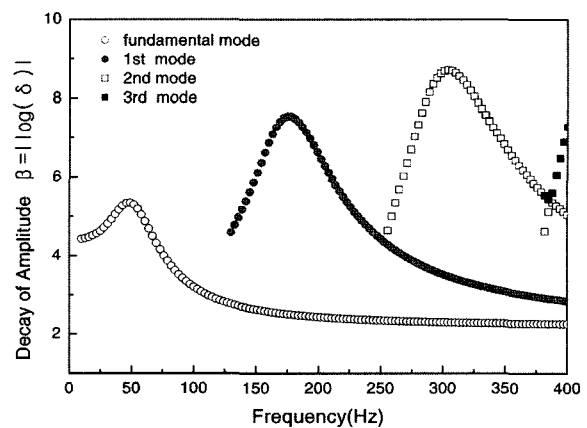
여기서 윗첨자  $i$  는 표면파의  $i$  번째 모드를 나타낸다. 파수의 실수부는 파장  $\lambda = 2\pi/\alpha^i$  를 갖는 파동을 나타내고 허수부는 단위거리당 파의 진폭감쇠비,  $\delta = \exp(\beta^i)$  인 진폭감쇠를 나타낸다.  $\beta^i = 0$  일 때  $\alpha^i$  가 양수이면 파동은  $x$ 축의 양의 방향으로 전파하고 음수이면 음의 방향으로 전파한다. 따라서 에너지방사(energy radiation)를

만족시키기 위해서는  $\alpha^i$ 가 양수인 모드만 선택하여야 한다. 따라서  $\beta^i \neq 0$  인 경우는 거리에 따라 파의 진폭이 감소하는, 즉  $\beta^i < 0$  인 모든 모드를 선택할 수 있다. 이들을 만족하는 모든 모드 중 거리에 따른 진폭감소가 제일 적인 것을 탁월모드(fundamental mode)로 정하였고 차례로 일차, 이차 모드로 정하였다. 그림 4는 그림 3의 조건에서 각 표면파의 진폭감쇠를 나타낸 그림으로서 400Hz까지 총 4개의 감쇠곡선이 계산되었다. 그 중 동일 주파수에서 가장 진폭이 작은 모드를 탁월모드라 할 수 있으며, 순차적으로 일차, 이차, 삼차모드로 구분하였다.

그림 4에서 탁월모드에서는 층경계부가 존재하는 주파수대역(80~90Hz)에서 감쇠가 가장 크게 나타나는 것을 알 수 있다. 레일리파의 경우(그림 4(a)), 탁월모드를 제외하고는 감쇠의 변동이 큰 것을 알 수 있고, 러브파의 경우(그림 4(b))는 모드수의 증가에 따라 동일한 형태로 진폭이 감쇠한다.



(a) 레일리파인 경우



(b) 러브파인 경우

그림 4. 표면파의 모드별 진폭감쇠

### 5.1.4 복소초월함수의 해

복소초월함수 방정식의 근을 구할 수 있는 Newton-Muller(Carnahan et al., 1969)의 방법으로 전달행렬로부터 해를 구할 경우, 초월함수의 복잡성과 초기치 가정의 어려움으로 해를 찾지 못하는 경우가 많다. 그러나 지반 분야에서는 제한된 영역의 해만이 중요하므로 관심영역을 제한할 수 있다. 이러한 제한된 해석영역을 작은 부영역(sub-domain)으로 나누어 각 부영역에서 해를 찾을 경우 관심영역 내에서는 모든 해를 찾을 수 있다는 장점이 있다.(Liou & Boor, 1989) 해석하고자 하는 복소평면을 그림 5와 같이 요소(mesh)로 나눌 때 각각의 격자(grid) 속에 해가 존재하는지에 대한 판별과 그 해를 찾는 과정은 다음과 같다. 먼저 복소함수  $f(z)$ 를 실수부와 허수부로 나누어 격자의 4 꼭지점(1, 2, 3, 4)에서 각각의 함수값들 중 어떤 두개의 함수값이 실수부와 허수부에 다른 부호의 값을 가지는지 검사한다. 다른 부호의 값을 가지는 경우, 그림 6에서 보인 점 5, 6, 7, 8을 Falsi 또는 Muller방법(Conte & Boor, 1980)으로 구한다. 이때 이들 네 개의 점은 그림에서 나타낸 바와 같이 두개의 직선을 형성하는데, 5와 6을 연결하는 직선과 7과 8을 연결하는 직선을 구할 수 있으며, 이들의 교점으로 복소함수를 근사적으로 만족시키는 점을 구할 수 있다. 이러한 판별을 통하여 격자내에 근이 존재하지 않을 경우 같은 방법으로 다음 격자에서 근이 존재하는지를 반복적으로 검사한다.

### 5.2 민감도행렬의 구성

모델변수( $m_n$ )에 대한 정모델링방정식의 민감도는 다음 식 (11)과 같이 민감도행렬[G]에 의해 표현된다. 여

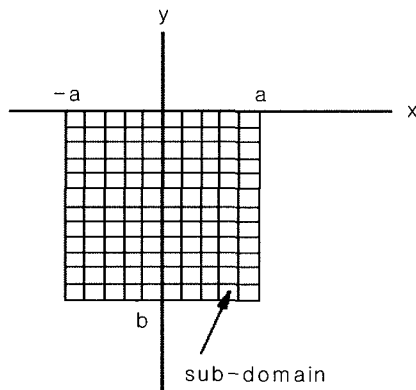


그림 5. 해석영역의 체분화

기서  $G_n^{i\alpha}$ 는 현장측정자료인  $d_m$ 와 모델변수  $m_n$ 을 평가하여 계산된 역산해석결과에 대한 편미분방정식이다.

$$[G_n^{i\alpha}] = \left[ \frac{\partial V_{ph}}{\partial V_s} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{ph,1}}{\partial V_{s,1}} & \dots & \frac{\partial V_{ph,1}}{\partial V_{s,i}} & \dots & \frac{\partial V_{ph,1}}{\partial V_{s,m}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V_{ph,j}}{\partial V_{s,1}} & \dots & \frac{\partial V_{ph,j}}{\partial V_{s,i}} & \dots & \frac{\partial V_{ph,j}}{\partial V_{s,m}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V_{ph,n}}{\partial V_{s,1}} & \dots & \frac{\partial V_{ph,n}}{\partial V_{s,i}} & \dots & \frac{\partial V_{ph,n}}{\partial V_{s,m}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서  $G_{ji} = \frac{\partial V_{ph,i}}{\partial V_{s,i}}$ 는  $i$ 번째층의 전단파 속도에 대한  $j$ 번째 위상속도에 대한 편미분이며,  $m$ 은 사용된 주파수의 수,  $n$ 은 층의 수,  $V_s$ 는 전단파속도,  $V_{ph}$ 는 전단파의 위상속도이다.

동시역산해석에 사용된 민감도행렬의 형태는 식 (12)와 같다. 여기서  $[G]_{Love}$ 는 러브파에 의한 편미분행렬이고  $[G]_{Rayleigh}$ 는 레일리파에 대한 편미분행렬이다.

$$[G_n^{i\alpha}] = \left[ \frac{\partial g^i}{\partial m^\alpha} \right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1m} \\ \vdots & [G]_{Love} & \vdots \\ G_{p1} & \dots & G_{pm} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G_{q1} & \dots & G_{qm} \\ \vdots & [G]_{Rayleigh} & \vdots \\ G_{q1} & \dots & G_{qm} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (12)$$

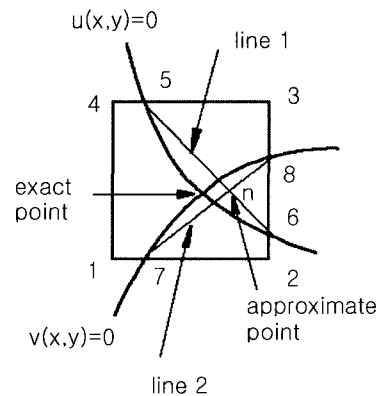


그림 6. 격자내 해를 찾기 위한 근사화 과정

민감도행렬은 흔히 Frechet 미분행렬이나, data kernel 이라고도 불리운다. 식 (12)에 표시한 것과 같이 민감도 행렬은 모델변수들을 미분한 값으로 구성되며 이론적 방법 또는 해석적 방법으로 구할 수 있다.

정보모델링 방정식을 전단파속도에 관한 함수로만 고려할 때 Taylor급수의 확장에 의한 자름(truncation)오차와 정확도에 기인하는 반올림(roundoff)오차가 발생한다. 이 두가지 오차를 최소화하기 위하여 민감도행렬 구성을 위한 적절한  $\Delta V_s$ 를 선택할 수 있다. 오차의 최소화를 위하여 다음 식 (13)을 이용한다(Joh, 1996).

$$\begin{aligned} \Delta V_s &\simeq (2.22 \times 10^{-16})^{1/3} \cdot V_s \\ &\simeq 6.0 \times 10^{-6} \cdot V_s \end{aligned} \quad (13)$$

해석적 미분에서  $\Delta V_s$ 와  $V_s$ 의 비율을 섭동요소(perturbation factor)라 하며 식 (13)에 사용된 계수는 오차를 줄이기 위한 최소값이라 할 수 있다. 적절한 perturbation factor의 결정은 각 층의 정확한 전단파속도와 위상속도를 기초로 하여 구할 수 있다. 지표면에서 측정된 위상속도는 지중에서 측정된 위상속도보다 덜 민감하기 때문에 가장 아래층을 반무한체로 가정하고 미분하면 적절한 값을 구할 수 있다. 일반적으로 적용되는 perturbation factor의 범위는  $1 \times 10^{-5}$ 에서  $1 \times 10^{-2}$ 범위이다.

### 5.3 역산기법

표면파를 이용한 역산해석에 있어 기지의 정보( $d_m$ )와 미지의 정보( $m_n$ )는 행렬의 차수가 다르기 때문에( $m > n$ ) 일반적인 역행렬을 이용한 계산이 불가능하다. 때문에 SVD(single value decomposition)등에 기초한 비선형역산 해석기법들이 적용된다. 본 논문에서도 비선형성의 정확도향상을 위하여 DLSS(damped least-squares solution)을 사용하였다. SASW기법의 역산해석에 있어 주파수 대역별 정보는 동일하지 않다. 즉 고주파수영역에 대한 데이터는 다양한 주파수대역을 이용할 수 있고 사용 가능 자료도 많지만 저주파대역 즉, 지반의 깊이가 깊어질수록 장파장에 대한 자료는 상대적으로 작아지게 된다. 이는 표면파해석에 있어 깊이가 깊어질수록 사용가능한 정보가 감소한다는 것을 의미한다. DLSS에서는 이러한 혼합행렬 형태를 계산하면서 오차와 해의 길이를 최소화한다. 측정치  $d_m^{<meas>}$ 를 이용한  $m_n^{<est>}$ 에 대한 해는  $(G^T \cdot G + \eta^2 \cdot I)$ 를 비특이치라고 가정하면 다음 식

(14)와 같다.

$$d_m^{<est>} = (G^T \cdot G + \eta^2 \cdot I)^{-1} \cdot G^T \cdot m_n^{<meas>} \quad (14)$$

여기서 G는 민감도행렬, I는 단위행렬,  $\eta$ 는 감쇠계수이다. 합리적인 감쇠계수는 역산해석의 최종해에서 표준이 되는 최소길이와 최소자승오차의 상관관계로 조절한다. 역산해석에서 정방행렬  $\eta^2 \cdot I$ 을 증가시키는 것은 정확도를 향상시키고 유일해의 크기를 증가시킨다. 실질적으로는 DLSS에서의 감쇠계수는 해의 고주파 노이즈를 감소시키는 역할을 한다.

일반화된 자료해상도에 대한 행렬(D)와 모델해상도에 대한 행렬(G)는 다음 식 (15), (16)과 같이 나타낼 수 있다. 이 경우, 단위행렬로부터의 자료 또는 모델 해상도행렬의 편차는 사용된 감쇠계수에 의해 결정된다.

$$D = h \cdot (h^T \cdot h + \eta^2 \cdot I)^{-1} \cdot h^T \quad (15)$$

$$G = (h^T \cdot h + \eta^2 \cdot I)^{-1} \cdot h^T \cdot h \quad (16)$$

### 5.4 동시역산해석의 알고리즘

이상에서 설명한 해석기법들을 활용하여 구성된 동시역산해석의 절차는 우선 대표실험분산곡선을 이용하여 주어진 층구조에 대한 초기 전단파속도 주상도를 결정한다. 초기 전단파속도 주상도의 합리적 추정은 역산해석의 발산방지와 역산 해석의 국부 최소해(local minimum)로의 접근 방식을 위해 필수적이며, 실험에 의해서 결정한 대표분산곡선을 근거로 이루어진다. 초기 전단파속도 주상도의 추정을 위해 본 연구에서 채택한 방법은 Foinquinos(1991)에 의해 제안된 방법을 다소 수정 보완한 방법으로 실험분산곡선을 이용하여 파동의 침투 깊이와 파장의 관계를 가정함으로써 구한다.

모델 변수( $m_i$ , model parameter)의 수정, 즉 모델 변수의 변화  $\Delta m$ 은 민감도 행렬 G와 분산곡선의 이론치와 실험치의 차이인  $\Delta d$ 를 이용하여 식 (11)과 (14)에 의해서 결정된다. 러브파와 레일리파의 분산특성은 민감도 행렬(jointed sensitivity matrix, G) 구성시 동시에 고려되며, 역산해석을 위해 계산된 모델변수는 러브파와 레일리파에서 동일하게 적용된다.

역산 해석의 결과가 합리적인지는 실험치와 이론치 사이의 RMS(root mean square)오차를 이용하여 판단하는데 오차를 만족하지 않으면 반복계산별 러브파와 레일리파의 동시민감도행렬을 다시 구성하고 역산해석을



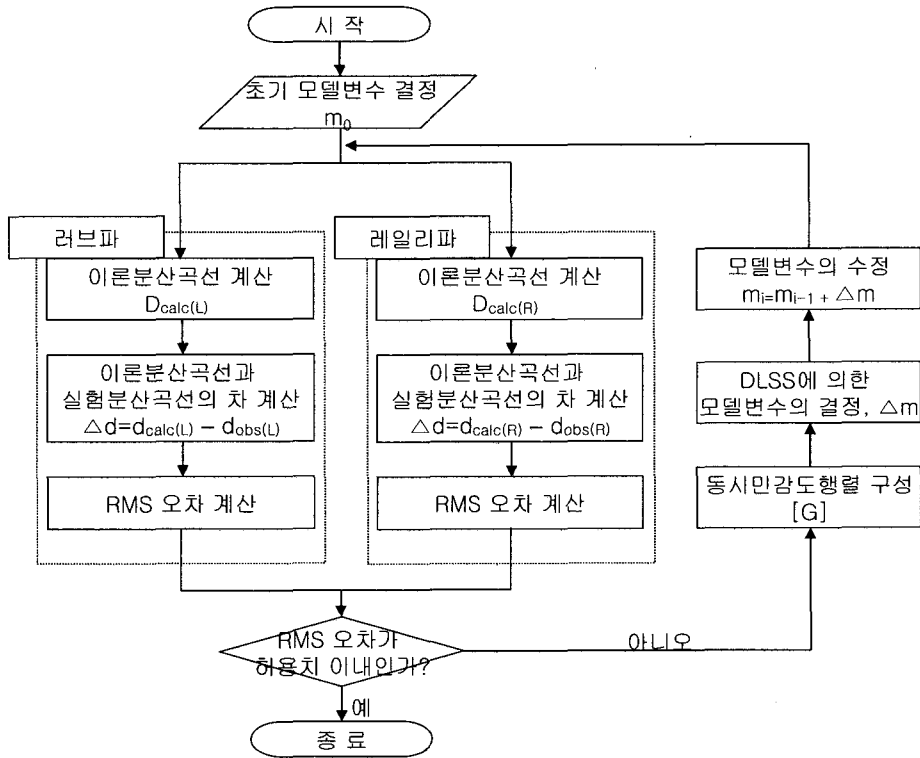


그림 7. 동시역산해석기법의 흐름도

수행한다. 역산해석의 결과에 따라 모델변수를 변화시켜가면서 최종 RMS오차가 허용치 이내가 될 때까지 계산을 반복한다. 역산 해석 절차의 각 단계는 그림 7과 같이 정리된다.

동시역산해석에서 러브파와 레일리파의 주파수범위(분산범위)는 다르게 사용될 수 있으며, 층 두께는 동일한 값을 사용한다. 동시역산에서 초기 층 두께의 결정이 중요한데 이는 각 파의 기여도가 틀리고 현장 측정자료의 주파수범위도 다르기 때문에 두 파의 특성을 충분히 반영하기 위해서는 주파수의 범위와 층의 수를 결정할 때 세심한 주의가 요구된다.

## 6. 결론

러브파는 한 방향에 대한 응력-변위만 고려하기 때문에 수치적 모델링이 간단하고 전파시에는 이론적으로 체적파의 영향 및 밀도의 변화가 없어 각 각의 물성치를 갖는 다층구조에서의 적용성이 높다. 이러한 장점을 활용하여 기존의 SASW기법을 응용, 러브파와 레일리파의 위상속도 분산정보를 같이 이용하여 동시역산해석을 할 수 있는 기법을 제안하였다. 동시역산해석의 목적은 각 파의 주파수 기여도가 다른 점을 활용함으로써

역산결과의 정확도와 수렴도를 향상하고자 함이다. 해석기법은 러브파와 레일리파의 정모델링 해석을 위해 수정전달행렬법의 구성, 대상 지반의 시스템 결정을 위한 민감도행렬의 구성 그리고 역산해석기법인 Damped Least Square Solution으로 구성된다. 동시역산의 방법은 민감도행렬을 구성할 때 레일리파와 러브파의 분산정보가 동시에 사용되며, 계산된 민감도행렬을 역산해석하여 지반의 전단파 주상도를 반복적으로 계산한다.

## 참고 문헌

1. 조성호, 강태호 (2000), “지반의 전단파속도 토모그래피영상을 구하기 위한 Multi-Channel Tomographic SASW (MTSASW) 기법”, 대한토목학회, 가을학술발표회 논문집, pp.387-390.
2. Al-Hunaidi, M. O. (1994), “Analysis of dispersed multi-mode signals of the SASW method using multiple filter/crosscorrelation technique”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 13/24, pp.13-24.
3. Backus, G. and Gilbert, F. (1970), Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A266, pp.123-192.
4. Bojan, B. Guzina. (2000), “Dynamic soil sensing via horizontally-polarized shear waves”, *Proceeding of sessions of Geo-Denver 2000*, ASCE Geotechnical special publication No. 108, pp.95-108.
5. Carlo, G. Lai. and Glenn, J. Rix (1998), “Simultaneous inversion of Rayleigh phase velocity and attenuation for near-surface site

- characterization”, national Science Foundation and U.S.Geological Survey, Georgia Institute of Technology.
6. Carnahan, B., Luther, H. A., and Wilkes, J. O. (1969), “*Applied numerical methods*”, John Willy & Sons Ins.
  7. Conte, S. D. and de Boor, C. (1980), “*Elementary numerical analysis*”, McGraw-Hill, New York, pp.72-127.
  8. Ewing, A. G., W. S. Jardetzky, and F. Press (1957), “*Elastic Waves in Layered Media*”, McGraw-Hill, New York, NY, USA.
  9. Gucunski, N. and Woods, R.D. (1991), “Inversion of Rayleigh Wave Dispersion Curve for SASW Test”, *Proceeding of the 5th International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, pp.127-138.
  10. Haskell, N. A. (1953), “The distribution of surface waves on multilayered media”, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 43, pp.17-34.
  11. Joh, S.-H. (1996), *Advancement in the Data Interpretation and Analysis in the Spectral-Analysis-of-Surface-Waves Method*, Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin.
  12. Jones, R. B. (1962), “Surface wave technique for measuring the elastic properties and thickness of roads”, theoretical development, *Jornal of Applied Physics*, 13, pp.21-29.
  13. Kausel, Eduardo, and Peek, Ralf (1982), “Dynamic Loads in the Interior of a Layered Stratum: An Explicit Solution”, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 75/5 pp.1459-1508.
  14. Knopoff, L.(1964), “A Matrix method for elastic wave problems”, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 54, pp.431-438.
  15. Liou, G.S. and de Boor, C. (1989), “Analytical solutions for soil-structure interaction in layered media”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.18, pp.667-686.
  16. Rix, Glenn J. and Leipski, Elizabeth A. (1991), “Accuracy and Resolution of Surface Wave Inversion”, *Recent advances in Instrumentation, Data Acquisition and Testing in Soil Dynamics*, New York : ASCE pp.17-32.
  17. Roesset, J. M., Chang, D.,-M., and Stokes, K.H., II. (1991), “Comparison of 2-D and 3-D Models for Analysis of Surface Wave Tests”, *Preceedings of the 5th International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, pp.111-126.
  18. Schwab, F., Nakanishi, K., Cuscito, M., Panza, et al. (1984), “Surface wave computations and the synthesis of theoretical seismograms at high frequencies”, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 74, pp.1555-1578.
  19. N. M. Shapiro, A. V. Gorbatov, E. Gordeev, and J. Dominguez (2000), “Average shear-wave velocity structure of the Kamchatka peninsula from the dispersion of surface waves”, *Earth Planets Space*, 52, pp.573-577.
  20. Tarantola, A. and Valette, B. (1982), “Generalized Nonlinear Inverse Problems Solved Using the Least Squares Criterion”, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 20.
  21. Tokimatsu, Kohji, Tamura, Shuji, and Kojima, Hisaya. (1992), “Effects of Multiple Modes on Rayleigh Wave Dispersion Characteristics”, *Journal of Geotechnical Engineering*, 118/10, pp.529-1543.
  22. Tzong, T. J. and Penzien, J. (1983), “*Hybrid modelling of soil-structure interaction in layered media*”, Rep. No. UCB/EERC-83/22, Earthquake Engineering Research Center, Univ. of California, Berkeley, Calif.

(접수일자 2005. 4. 20, 심사완료일 2005. 6. 14)